William H. Hayt Jr.
John A. Buck

ELETROMAGNETISMO

8ª EDIÇÃO

McGraw Hill

bookman

William H. Hayt Jr.
Professor emérito (falecido)
Purdue University

John A. Buck
Georgia Institute of Technology

ELETROMAGNETISMO

8ª EDIÇÃO

Tradução:
Marco Aurélio de Oliveira Schroeder
Doutor em Engenharia Elétrica pela UFMG
Professor Associado do Departamento de Engenharia Elétrica (DEPEL) e do Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica (PPGEL) da Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ)

Consultoria, supervisão e revisão técnica desta edição:
Antonio Pertence Júnior
Mestre em Engenharia pela UFMG (DEMEC)
Professor de Eletromagnetismo, Ondas e Antenas da Universidade FUMEC
Engenheiro Eletrônico e de Telecomunicações
Membro da SBMAG (Sociedade Brasileira de Eletromagnetismo)

Versão impressa
desta obra: 2013

Mc Graw Hill

bookman

AMGH Editora Ltda.

2013

Obra originalmente publicada sob o título
Engineering Electromagnetics, 8th Edition
ISBN 0073380660 / 9780073380667

Gerente Editorial – CESA: *Arysinha Jacques Affonso*

Colaboraram nesta edição:

Editora: *Viviane R. Nepomuceno*

Assistente editorial: *Caroline L. Silva*

Capa: *Aero Comunicação (arte sobre capa original de Diana Fouts)*

Imagem da capa: *Padrões de intensidade radiada de uma antena dipolo, mostrando casos nos quais o comprimento de onda é igual ao comprimento total da antena (vermelho), a dois terços do comprimento da antena (verde) e à metade do comprimento da antena (azul).*

Leitura final: *Lucas Cartaxo*

Projeto e editoração: *Techbooks*

AMGH EDITORA LTDA., uma parceria entre GRUPO A EDUCAÇÃO S.A. e McGRAW-HILL EDUCATION
Av. Jerônimo de Ornelas, 670 – Santana
90040-340 – Porto Alegre – RS
Fone: (51) 3027-7000   Fax: (51) 3027-7070

Unidade São Paulo
Av. Embaixador Macedo Soares, 10.735 – Pavilhão 5 – Cond. Espace Center
Vila Anastácio – 05095-035 – São Paulo – SP
Fone: (11) 3665-1100   Fax: (11) 3667-1333

SAC 0800 703-3444 – www.grupoa.com.br

IMPRESSO NO BRASIL
PRINTED IN BRAZIL

OS AUTORES

William H. Hayt Jr. (*in memoriam*) recebeu os títulos de B.S. e de M.S. da Purdue University e de Ph.D. da Illinois University. Após passar quatro anos trabalhando na indústria, o professor Hayt ingressou na Purdue University, onde trabalhou como professor e chefe da Escola de Engenharia Elétrica, e, após se aposentar, em 1986, continuou ainda como professor emérito dessa faculdade. As filiações do professor Hayt a associações profissionais incluíam Eta Kappa Nu, Tau Beta Pi, Sigma Xi, Sigma Delta Chi, Fellow do IEEE, ASEE e NAEB. Enquanto estava em Purdue, recebeu numerosos prêmios de ensino, incluindo o prêmio de melhor professor da universidade. Ele também constou no *Purdue's Book of Grear Teachers*, uma menção permanente na Purdue Memorial Union, dedicada em 23 de abril de 1999. O livro traz os nomes do grupo inaugural de 225 membros da faculdade, do passado e do presente, os quais dedicaram suas vidas à excelência no ensino e na erudição. Eles foram escolhidos pelos seus estudantes e seus colegas como os melhores educadores da Purdue.

John A. Buck natural de Los Angeles, Califórnia, recebeu os títulos de M.S. e de Ph.D. em Engenharia Elétrica da University of California, Berkeley, em 1977 e 1982, e de B.S. em Engenharia da UCLA em 1975. Em 1982, ingressou na faculdade da Escola de Engenharia Elétrica e de Computação na Georgia Tech, onde ficou nos últimos 28 anos. Suas pesquisas e publicações se concentraram nas áreas de chaveamentos ultrarrápidos, ótica não linear e comunicações por fibras óticas. Ele é o autor do livro para graduados *Fundamentals of Optical Fibers* (Wiley Interscience), que recebeu três prêmios do instituto de ensino e a Terceira Medalha do Milênio do IEEE.

Para Amanda e Olivia

PREFÁCIO

A primeira edição deste livro foi publicada há 52 anos, sob a autoria única de William H. Hayt Jr. Como eu tinha 5 anos de idade naquele tempo, esta publicação teve pouco significado para mim. Mas, 15 anos mais tarde, quando usei a segunda edição do livro em um curso básico de eletromagnetismo na faculdade, isso mudou bastante. Lembro de minha sensação de mau agouro em decorrência das histórias de terror contadas por meus amigos. Contudo, ao abrir o livro pela primeira vez, fiquei agradavelmente surpreso pelo estilo de escrita amigável e pela abordagem adotada na apresentação do assunto, características que – pelo menos para mim – tornaram o livro bastante compreensível, de tal forma que fui capaz de aprender o conteúdo com pouca ajuda do meu professor. Fiz referências ao livro enquanto estava na pós-graduação, e utilizei, como membro do corpo docente, a quarta e quinta edições para lecionar eletromagnetismo. Depois, tornei-me coautor da sexta e sétima edições, na aposentadoria (e subsequente morte prematura) de Bill Hayt. As memórias de meu tempo como iniciante são claras, e tentei manter o estilo acessível que encontrei nas edições anteriores.

Durante esses 50 anos, o assunto não mudou; porém, as ênfases sofreram alterações. Nas universidades, a tendência nos cursos de engenharia elétrica continua na direção da redução da carga horária e, assim, de conteúdos essenciais de eletromagnetismo. Nesta nova edição, fiz esforços para permitir que o estudante tenha contato com as equações de Maxwell o mais cedo possível e adicionei material mais avançado. Muitos dos capítulos estão agora um pouco mais curtos em relação à sétima edição. Isso foi feito para economizar na formulação, encurtando algumas seções ou removendo inteiramente outras. Em alguns casos, os tópicos excluídos foram convertidos em artigos e inseridos no site do livro; assim, podem ser baixados para um computador. A seguir, lista-se as principais alterações no texto: (1) o conteúdo sobre dielétricos, anteriormente no Capítulo 6, foi para o final do Capítulo 5; (2) o capítulo sobre equações de Poisson e de Laplace foi eliminado, e manteve-se somente o tratamento unidimensional, que foi movido para o final do Capítulo 6. A discussão da equação de Laplace em duas dimensões e dos métodos numéricos foram movidos para o site do livro; (3) o tratamento de guias de onda retangulares (Capítulo 13) foi expandido, com a apresentação dos problemas bidimensionais de valor de fronteira naquele contexto, e o conteúdo sobre radiação e antenas foi expandido, ocupando agora o Capítulo 14 inteiro.

Aproximadamente 130 novos problemas foram adicionados ao longo do livro. Para alguns deles escolhi, particularmente, bons "problemas clássicos" das edições anteriores, e também adotei um novo sistema, no qual o nível de dificuldade aproximado é indicado ao lado de cada problema, em uma escala de três níveis (). O nível mais baixo é considerado um problema de cálculo direto, requerendo pouco trabalho, considerando-se que o conteúdo já esteja compreendido; um problema de nível 2 é conceitualmente mais difícil, e pode requerer mais trabalho para sua solução; já um problema de nível 3 é considerado conceitualmente difícil, ou pode exigir esforço extra (incluindo, possivelmente, o auxílio de um computador) para sua resolução.

Como na edição anterior, o capítulo sobre linhas de transmissão (Capítulo 10) é independente e, assim, pode ser lido ou estudado em qualquer parte do curso, inclusive no início. Neste capítulo, linhas de transmissão são tratadas inteiramente dentro de um contexto de teoria de circuito. Fenômenos de onda são introduzidos e utilizados exclusivamente na forma de tensões

e correntes. Os conceitos de indutância e de capacitância são tratados como parâmetros conhecidos, e assim não há dependência em relação a qualquer outro capítulo. Isso permite que as linhas de transmissão sejam abordadas como o tópico inicial do curso se isso for desejado. Os conceitos de campo e o cálculo dos parâmetros em linhas de transmissão aparecem na parte inicial do Capítulo 13, sobre ondas guiadas, onde possuem a função adicional de ajudar a introduzir os conceitos de guiamento de ondas. Referentes a ondas eletromagnéticas, os Capítulos 11 e 12 são independentes em relação à teoria de linha de transmissão, e assim pode-se progredir do Capítulo 9 diretamente para o Capítulo 11. Dessa maneira, os fenômenos de onda são introduzidos a partir de seus princípios básicos, mas dentro do contexto da onda plana uniforme. O Capítulo 11 faz referências ao Capítulo 10 em locais nos quais esse último pode apresentar perspectivas adicionais, juntamente com mais detalhes. Entretanto, todo o material necessário para se aprender sobre ondas planas sem que se estude primeiramente as linhas de transmissão está presente no Capítulo 11, caso o estudante ou o professor desejem proceder segundo essa ordem.

O novo capítulo sobre antenas aborda conceitos de radiação, com base na discussão de potencial retardado do Capítulo 9. A discussão tem como foco a antena dipolo, considerada individualmente e em arranjos simples. A última seção aborda sistemas elementares de transmissão e recepção, novamente usando o dipolo como instrumento.

O livro é concebido de forma otimizada para um curso de dois semestres. Como é evidente, conceitos sobre estática são enfatizados e aparecem primeiramente na apresentação, mas, mais uma vez, o Capítulo 10 (linhas de transmissão) pode ser lido inicialmente. Em um curso que coloca mais ênfase na dinâmica, o capítulo sobre linhas de transmissão pode ser abordado logo de início conforme foi mencionado, ou em qualquer momento do curso. O material sobre estática pode ser abordado mais rapidamente, com menos ênfase nas propriedades dos materiais (já que esses são abordados em outros cursos) e em alguns dos tópicos avançados. Isso envolve a omissão do Capítulo 1 (que pode ser passado como uma revisão) e das Seções 2.5, 2.6, 4.7, 4.8, 5.5-5.7, 6.3, 6.4, 6.7, 7.6, 7.7, 8.5, 8.6, 8.8, 8.9 e 9.5.

O material disponibilizado no site www.mhhe.com/haytbuck, é um suplemento desta edição, e é composto dos artigos sobre tópicos especiais anteriormente mencionados e, adicionalmente, de programas interativos desenvolvidos por Natalya Nikolova da McMaster University e Vikram Jandhyala da University of Washington. Suas excelentes contribuições estão ligadas ao texto, como os ícones que aparecem nas margens do livro sempre que existe um exercício associado com a narrativa. Além disso, são fornecidos *quizzes* para auxiliar em estudos adicionais.

O tema do texto é o mesmo desde a primeira edição em 1958. Utiliza-se aqui uma abordagem induzida, consistente com os desenvolvimentos históricos. Nela, as leis experimentais são apresentadas como conceitos individuais que são mais tarde unificados nas equações de Maxwell. Após o primeiro capítulo sobre análise vetorial, ferramentas matemáticas adicionais são introduzidas no texto de acordo com a necessidade. Em todas as edições, assim como nesta, o objetivo principal foi o de capacitar os estudantes a aprenderem independentemente. Numerosos exemplos, exercícios propostos (que usualmente possuem partes múltiplas), os problemas no final de cada capítulo e o material na internet são disponibilizados para proporcionar exatamente isso. Respostas para os exercícios propostos são dadas após cada problema, assim como respostas aos problemas ímpares do final de cada capítulo são encontradas no **Apêndice F**. Um manual de soluções e um conjunto de *slides* em inglês, contendo figuras e equações pertinentes são disponibilizados para o professor no site www.grupoa.com.br.

Eu gostaria de agradecer a ajuda valiosa de diversas pessoas, cujo auxílio tornou esta edição melhor. Agradecimentos especiais a Glenn S. Smith (Georgia Tech), que revisou o capítulo sobre antenas, com muitos comentários e sugestões importantes. Sugestões detalhadas e errata* foram feitas por Clive Woods (Louisiana State University), Natalya Nikolova e Don

* N. de E.: As correções indicadas na errata já foram inseridas nesta edição em português.

Davis (Georgia Tech). Confirmações precisas dos novos problemas foram realizadas por Todd Kaiser (Montana State University) e Steve Weis (Texas Christian University). Outros revisores providenciaram comentários e sugestões detalhados no início do projeto – suas observações afetaram muitos aspectos do produto final –; são eles:

Sheel Aditya – Nanyang Technological University, Cingapura
Yaqub M. Amani – SUNY Maritime College
Rusnani Ariffin – Universiti Teknologi MARA
Ezekiel Bahar – University of Nebraska Lincoln
Stephen Blank – New York Institute of Technology
Thierry Blu – The Chinese University of Hong Kong
Jeff Chamberlain – Illinois College
Yinchao Chen – University of South Carolina
Vladimir Chigrinov – Hong Kong University of Science and Technology
Robert Coleman – University of North Carolina Charlotte
Wilbur N. Dale
Ibrahim Elshafiey – King Saud University
Wayne Grassel – Point Park University
Essam E. Hassan – King Fahd University of Petroleum and Minerals
David R. Jackson – University of Houston
Karim Y. Kabalan – American University of Beirut
Shahwan Victor Khoury, Professor Emeritus – Notre Dame University,
Louaize-Zouk Mosbeh, Lebanon
Choon S. Lee – Southern Methodist University
Mojdeh J. Mardani – University of North Dakota
Mohamed Mostafa Morsy – Southern Illinois University Carbondale
Sima Noghanian – University of North Dakota
W.D. Rawle – Calvin College
Gönül Sayan – Middle East Technical University
Fred H. Terry – Professor Emeritus, Christian Brothers University
Denise Thorsen – University of Alaska Fairbanks
Chi-Ling Wang – Feng-Chia University

Agradeço também o retorno e muitos comentários de estudantes: são muitos nomes para serem citados, incluindo vários que fizeram contato comigo a distância. Eu continuo aberto e grato por esses retornos, que podem ser enviados para john.buck@ece.gatech.edu. Inúmeras sugestões foram feitas e eu as considerei construtivas e legítimas. Lamento que nem todas tenham sido incluídas, devido a restrições de tempo. Produzir este livro foi um esforço de equipe, envolvendo diversas pessoas proeminentes na McGraw-Hill. Elas incluem meu editor, Raghu Srinivasan, e editor patrocinador, Peter Massar, cuja visão e encorajamento foram inestimáveis, assim como Robin Reed, que habilmente coordenou a fase de produção, com excelentes ideias e entusiasmo e Darlene Schueller, que foi minha guia e atuou como minha consciência desde o início, com valiosas percepções, impulsionando-me quando necessário. A composição tipográfica foi supervisionada por Vipra Fauzdar da Glyph International, que empregou a melhor editora de texto que já tive: Laura Bowman. Diana Fouts (Georgia Tech) aplicou sua vasta habilidade artística para desenhar a capa, como já tinha feito nas duas edições anteriores. Finalmente, como já é comum nesses projetos, sou grato à paciência e ao apoio de minha família e, particularmente, à minha filha, Amanda, que auxiliou na preparação do manuscrito.

John A. Buck
Marietta, Geórgia

Nota para esta edição

Nesta edição, optamos disponibilizar o material de apoio – que na edição anterior foi oferecido em CD – nos sites mencionados anteriormente. Dessa forma, caso haja algum problema no acesso ao site www.grupoa.com.br, solicitamos que entre em contato com o nosso SAC.

Para os materiais disponíveis no site www.mhhe.com/haytbuck, não nos responsabilizamos por quaisquer alterações, caso não sejamos comunicados.

SUMÁRIO RESUMIDO

SUMÁRIO

Capítulo 6

Capacitância 143

Capítulo 7

Campo Magnético Estacionário 180

Capítulo 8

Forças Magnéticas, Materiais e Indutância 230

Capítulo 9

Campos Variantes no Tempo e Equações de Maxwell 277

Capítulo 10

Linhas de Transmissão 301

1

Análise Vetorial

A análise vetorial é um tópico matemático que é mais bem ensinado por matemáticos do que por engenheiros. A maioria dos estudantes iniciantes e avançados em engenharia não têm tempo (ou talvez a inclinação) para frequentar um curso de análise vetorial, apesar de ser provável que muitos conceitos e operações elementares com vetores tenham sido introduzidos nas disciplinas de cálculo. Esses conceitos e operações vetoriais fundamentais são abordados neste capítulo, e o tempo que será dedicado a eles vai depender do grau de conhecimento que cada leitor possui a respeito do tema.

O ponto de vista aqui é aquele do engenheiro ou do físico, e não do matemático, uma vez que as deduções matemáticas são somente indicadas, em vez de serem rigorosamente apresentadas. Desta forma, a interpretação física é enfatizada. É mais fácil para os engenheiros acompanharem um curso mais rigoroso e completo no departamento de matemática após serem apresentados a alguns cenários físicos e aplicações.

A análise vetorial se compara a uma taquigrafia matemática*. Ela possui alguns símbolos novos e algumas regras novas, e também demanda concentração e prática. Os exercícios propostos, encontrados pela primeira vez neste capítulo no final da Seção 1.4, devem ser considerados parte integrante do texto e devem ser resolvidos. Esses exercícios não devem apresentar nenhuma dificuldade se o texto de suas respectivas seções for inteiramente compreendido. Leva um pouco mais de tempo “ler” o capítulo dessa forma, mas o investimento no tempo será compensador. ■

1.1 ESCALARES E VETORES

O termo *escalar* se refere a uma grandeza cujo valor pode ser representado por um único número real (positivo ou negativo). O x, o y e o z que usamos na álgebra básica são escalares, assim como as grandezas que eles representam. Se falarmos de um corpo que cai de uma distância L em um tempo t, ou a temperatura T em qualquer ponto de uma tigela de sopa, cujas coordenadas são x, y e z, então L, t, T, x, y e z são todos escalares. Outras grandezas escalares são massa, densidade, pressão (mas não força), volume, resistividade volumétrica e tensão elétrica.

* N. de T.: Taquigrafia é a escrita por meio de símbolos e abreviaturas.

Uma *grandeza vetorial* possui intensidade,[1] direção e sentido* no espaço. Neste livro, trabalharemos somente com espaços bi e tridimensionais, mas os vetores podem ser definidos em espaços n-dimensionais em aplicações mais avançadas. Força, velocidade, aceleração e uma linha reta do terminal positivo para o negativo de uma bateria são exemplos de vetores. Cada grandeza é caracterizada por uma intensidade, uma direção e um sentido.

Aqui devemos nos concentrar, principalmente, nos *campos vetoriais* e *escalares*. Um campo (escalar ou vetorial) pode ser definido, matematicamente, como alguma função que conecta uma origem arbitrária a um ponto genérico no espaço. Usualmente, conseguimos associar algum efeito físico com um campo, tal como a força em uma agulha de bússola exercida pelo campo magnético da Terra ou o movimento de partículas de fumaça no campo definido pelo vetor velocidade do ar em alguma região do espaço. Note que o conceito de campo está relacionado, invariavelmente, a uma região. Alguma grandeza é definida em cada ponto, em uma região do espaço. Existe tanto o *campo escalar* quanto o *vetorial*. A temperatura na tigela de sopa e a densidade em qualquer ponto na Terra são exemplos de campos escalares. Os campos gravitacional e magnético na Terra, o gradiente de potencial em um cabo e o gradiente de temperatura na ponta de um ferro de soldar são exemplos de campos vetoriais. Geralmente, o valor de um campo varia tanto com a posição quanto com o tempo.

Neste livro, assim como na maioria dos outros que utilizam notação vetorial, os vetores serão indicados por letras em negrito, como **A**, por exemplo. Já os escalares são impressos em tipo itálico (A, por exemplo). Quando se escreve à mão, é costume desenhar uma linha, ou uma seta, sobre uma grandeza vetorial, com o objetivo de realçar seu caráter vetorial. (CUIDADO: Essa é a primeira armadilha. Uma notação pouco cuidadosa, tal como a omissão do símbolo "linha ou seta" para um vetor, é a principal fonte de erros em análise vetorial.)

1.2 ÁLGEBRA VETORIAL

Com o estabelecimento das definições de vetores e campos vetoriais, podemos proceder à definição das regras da aritmética vetorial, da álgebra vetorial e (mais tarde) do cálculo vetorial. Algumas das regras serão similares àquelas da álgebra escalar, outras terão leves diferenças, e outras ainda serão inteiramente novas.

Para iniciar, a adição de vetores segue a lei do paralelogramo. A Figura 1.1 mostra a soma de dois vetores, **A** e **B**. É facilmente verificado que $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$, ou que a adição de vetores obedece à propriedade comutativa**. A adição vetorial também obedece à propriedade associativa,

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$$

Note que, quando um vetor é desenhado como uma seta de comprimento finito, sua posição é definida no início da seta.

[1] Adotamos a convenção de que "intensidade" se refere a valor absoluto (ou módulo). Portanto, a intensidade de qualquer grandeza é sempre positiva.

* N. de T.: Alguns autores preferem apresentar duas características de uma grandeza vetorial: a intensidade e a orientação. Mas deve ficar claro que nestes casos a "orientação" concentra duas informações: a direção e o sentido.

** N. de T.: Também denominada "lei da comutatividade".

Vetores coplanares são aqueles que pertencem a um mesmo plano, tais como os mostrados na Figura 1.1. Ambos pertencem ao plano do papel e podem ser somados ao expressar cada vetor em relação aos componentes "horizontal" e "vertical" e depois somar os componentes correspondentes.

Vetores em três dimensões podem ser somados da mesma maneira: cada vetor é representado utilizando-se três componentes, e os componentes correspondentes são somados. Exemplos desse processo de adição serão dados após a discussão sobre componentes vetoriais, na Seção 1.4.

A regra para subtração de vetores deriva diretamente daquela da adição, uma vez que podemos expressar $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ como $\mathbf{A} + (-\mathbf{B})$. O sinal ou sentido do segundo vetor é invertido, e então soma-se esse vetor ao primeiro mediante a regra da adição vetorial.

Vetores podem ser multiplicados por escalares. A intensidade do vetor resultante é alterada, mas sua direção e seu sentido permanecem inalterados quando o escalar é positivo, apesar de o sentido se inverter quando a multiplicação for por um escalar negativo. A multiplicação de um vetor por um escalar também obedece às propriedades associativa e distributiva da álgebra, de forma que:

$$(r + s)(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + s(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = r\mathbf{A} + r\mathbf{B} + s\mathbf{A} + s\mathbf{B}$$

A divisão de um vetor por um escalar é simplesmente a multiplicação do vetor pelo inverso do escalar. A multiplicação de um vetor por outro vetor será discutida nas Seções 1.6 e 1.7. Dois vetores são ditos iguais se a diferença entre os dois é zero, ou $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ se $\mathbf{A} - \mathbf{B} = 0$.

No uso que fazemos de campos vetoriais, devemos sempre somar e subtrair vetores que estão definidos em um mesmo ponto. Será mostrado aqui, por exemplo, que o campo magnético *total* próximo a um pequeno imã em forma de ferradura é a soma dos campos produzidos pela Terra e pelo imã permanente. O campo total em qualquer ponto é a soma dos campos individuais naquele ponto.

Entretanto, se não considerarmos um *campo vetorial*, podemos somar ou subtrair vetores que não são definidos no mesmo ponto. Por exemplo, a soma da força gravitacional que atua em um homem de 68,0 kgf (quilograma-força) no Polo Norte com aquela que age em um homem de 79,4 kgf no Polo Sul pode ser obtida ao deslocar cada vetor de força até o Polo Sul antes de realizar a adição. A resultante é uma força de 11,4 kgf no Polo Sul, direcionada para o centro da Terra. Se desejássemos dificultar as coisas, poderíamos, da mesma maneira, descrever a força como 11,4 kgf, no Polo Norte,[2] direcionada no sentido contrário ao do centro da Terra (ou "para cima").

Figura 1.1 Dois vetores podem ser adicionados graficamente, e para isso podemos tanto desenhar ambos a partir de uma origem comum e completar o paralelogramo quanto desenhar o segundo vetor a partir da ponta (da seta) do primeiro e completar o triângulo. Qualquer desses métodos pode ser facilmente estendido para a soma de três ou mais vetores.

[2] Alguns estudantes argumentaram que a força poderia ser descrita à linha do Equador, direcionada para o norte. Eles estão certos, mas aqui não cabe a discussão.

1.3 SISTEMA DE COORDENADAS RETANGULARES

Para descrever um vetor de forma precisa temos que fornecer algumas informações específicas, tais como comprimentos, direções e sentidos, ângulos, projeções ou componentes. Existem três métodos simples de fazer isso e aproximadamente oito ou dez outros métodos que são úteis em casos muito especiais. Vamos usar somente os três métodos simples. O mais simples dos três é o *sistema de coordenadas retangulares*, ou *sistema de coordenadas cartesianas retangulares*.

No sistema de coordenadas cartesianas, estabelecemos três eixos coordenados que formam ângulos retos (90°) uns em relação aos outros e os denominamos de eixos x, y e z. É costume escolher um sistema de coordenadas do tipo *triedro direto*, no qual a rotação do eixo x em relação ao y (pelo menor ângulo) faz um parafuso *dextrogiro* avançar na direção do eixo z. Se fizermos um paralelo com nossa mão direita, os dedos polegar, indicador e médio poderão ser identificados, respectivamente, com os eixos x, y e z. A Figura 1.2*a* ilustra um sistema de coordenadas cartesianas do tipo triedo direto.

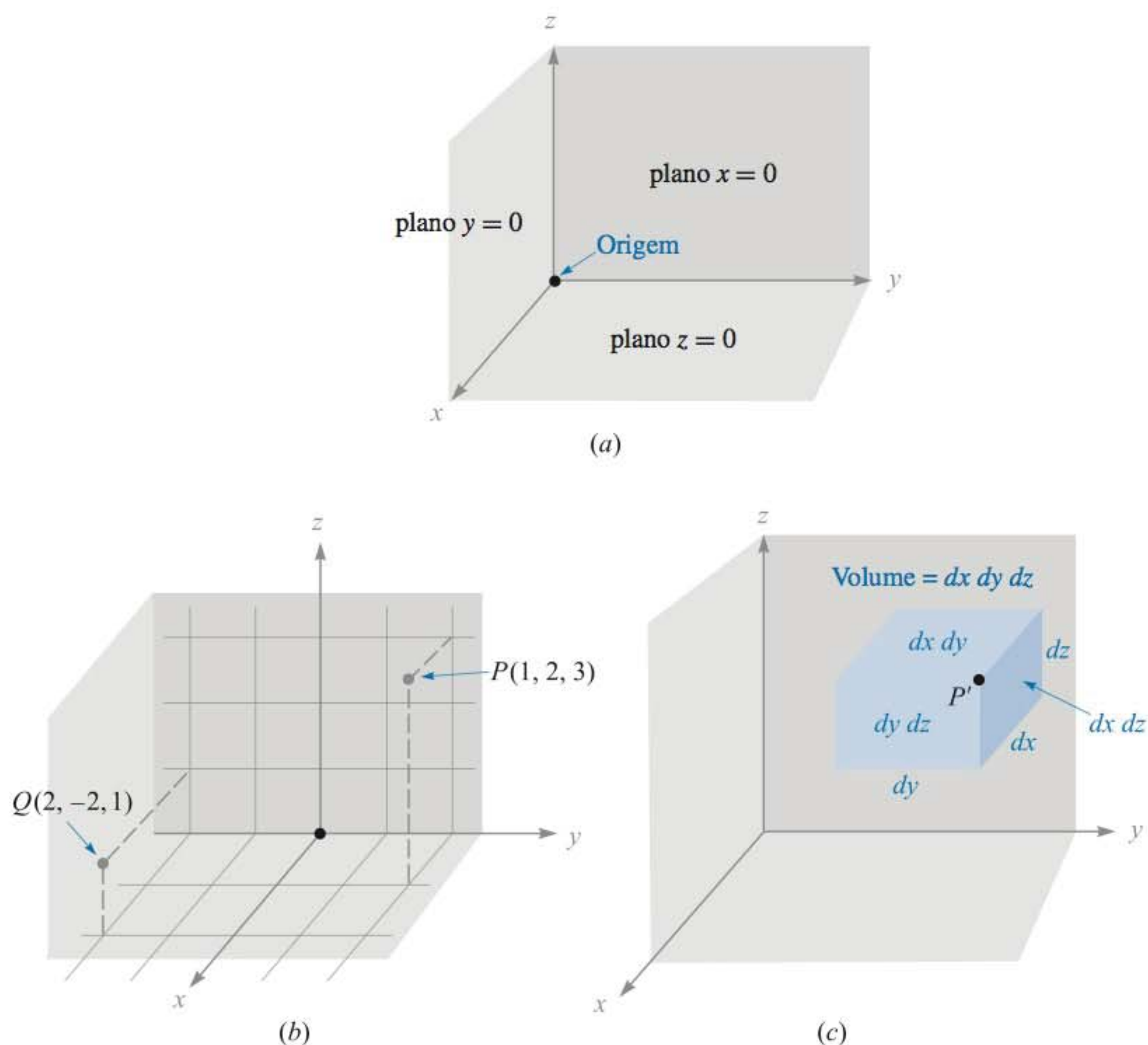



Figura 1.2 (*a*) Um sistema de coordenadas cartesianas retangulares do tipo triedo direto. Se os dedos da mão direita indicarem a direção e o sentido no qual o eixo x deve ser girado para coincidir com o eixo y, o dedo polegar mostrará a direção do eixo z. (*b*) A localização dos pontos $P(1, 2, 3)$ e $Q(2, -2, 1)$. (*c*) O elemento de volume diferencial em coordenadas retangulares; dx, dy e dz geralmente são elementos diferenciais independentes.

Um ponto é localizado por suas coordenadas x, y e z. Essas são, respectivamente, as distâncias da origem até a interseção de linhas perpendiculares desenhadas do ponto aos eixos x, y e z. Um método alternativo de interpretar os valores das coordenadas, o qual *deve* ser utilizado em todos os outros sistemas de coordenadas, é considerar o ponto como a interseção comum de três superfícies. Essas superfícies são os planos $x =$ constante, $y =$ constante e $z =$ constante, onde as constantes são os valores das coordenadas do ponto.

A Figura 1.2*b* mostra os pontos P e Q, cujas coordenadas são, respectivamente, $(1, 2, 3)$ e $(2, -2, 1)$. O ponto P está, desta forma, posicionado no ponto de interseção comum dos planos $x = 1$, $y = 2$ e $z = 3$, enquanto o ponto Q está localizado na interseção dos planos $x = 2$, $y = -2$ e $z = 1$.

À medida que encontrarmos outros sistemas de coordenadas nas Seções 1.8 e 1.9, devemos esperar que os pontos se localizem na interseção comum de três superfícies, não necessariamente planas, mas ainda mutuamente perpendiculares entre si no ponto de interseção.

Se visualizarmos três planos que se interceptam no ponto genérico P, cujas coordenadas são x, y e z, podemos incrementar cada valor coordenado de uma quantidade diferencial e obter três planos ligeiramente deslocados que se interceptam no ponto P', cujas coordenadas são $x + dx$, $y + dy$ e $z + dz$. Os seis planos definem um paralelepípedo retangular, cujo volume é $dv = dxdydz$. As superfícies possuem áreas diferenciais dS iguais a $dxdy$, $dydz$ e $dxdz$. Finalmente, a distância dL de P a P' é a diagonal do paralelepípedo e tem comprimento de $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$. O elemento de volume é mostrado na Figura 1.2*c*, na qual o ponto P' é indicado enquanto o ponto P está localizado no único vértice invisível.

Tudo isso é familiar da trigonometria ou da geometria espacial e envolve apenas grandezas escalares. Descreveremos os vetores em relação a um sistema de coordenadas na próxima seção.

1.4 COMPONENTES VETORIAIS E VETORES UNITÁRIOS

Para descrever um vetor no sistema de coordenadas cartesianas retangulares, vamos primeiro considerar um vetor $\mathbf{r}$ que parte da origem. Uma maneira lógica de identificar esse vetor é fornecer os três *componentes vetoriais* tomados ao longo dos três eixos coordenados, cuja soma vetorial deve representar o vetor fornecido. Se os componentes vetoriais do vetor $\mathbf{r}$ são $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$, então $\mathbf{r} = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}$. Os componentes vetoriais são mostrados na Figura 1.3*a*. Em vez de apenas um vetor, temos agora três, mas isso representa um ganho, pois os três vetores são de natureza muito simples: cada um está sempre na direção de um dos eixos coordenados.

Em outras palavras, os componentes vetoriais possuem intensidades que dependem do vetor dado (como $\mathbf{r}$), mas cada um possui direção e sentido constantes e conhecidos. Tal fato sugere o uso de *vetores unitários*, que possuem, por definição, intensidade igual a um (unitária) além de direção e sentido coincidentes com os dos eixos coordenados, ou seja, são paralelos aos eixos coordenados (direção) e estão no mesmo sentido do crescimento dos valores coordenados (sentido). Devemos reservar o símbolo $\mathbf{a}$ para um vetor unitário e identificar sua direção e seu sentido por um subscrito apropriado. Logo, $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$ e $\mathbf{a}_z$ são os vetores unitários no sistema

de coordenadas retangulares.[3] Eles estão direcionados ao longo dos eixos x, y e z respectivamente, conforme ilustrado na Figura 1.3*b*.

Se o componente vetorial $\mathbf{y}$ tiver duas unidades de intensidade e estiver direcionado no sentido crescente dos valores de y, devemos então escrever $\mathbf{y} = 2\mathbf{a}_y$. Um vetor $\mathbf{r}_P$ apontando da origem para o ponto $P(1, 2, 3)$ é escrito como $\mathbf{r}_P = \mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$. O vetor de P para Q pode ser obtido pela aplicação da regra de adição vetorial. Essa regra mostra que o vetor da origem para P mais o vetor de P para Q é igual ao vetor da origem para Q. Em consequência, o vetor desejado de $P(1, 2, 3)$ para $Q(2, -2, 1)$ é

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{PQ} = \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P &= (2-1)\mathbf{a}_x + (-2-2)\mathbf{a}_y + (1-3)\mathbf{a}_z \\ &= \mathbf{a}_x - 4\mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z\end{aligned}$$

Os vetores $\mathbf{r}_P$, $\mathbf{r}_Q$ e $\mathbf{R}_{PQ}$ são mostrados na Figura 1.3*c*.

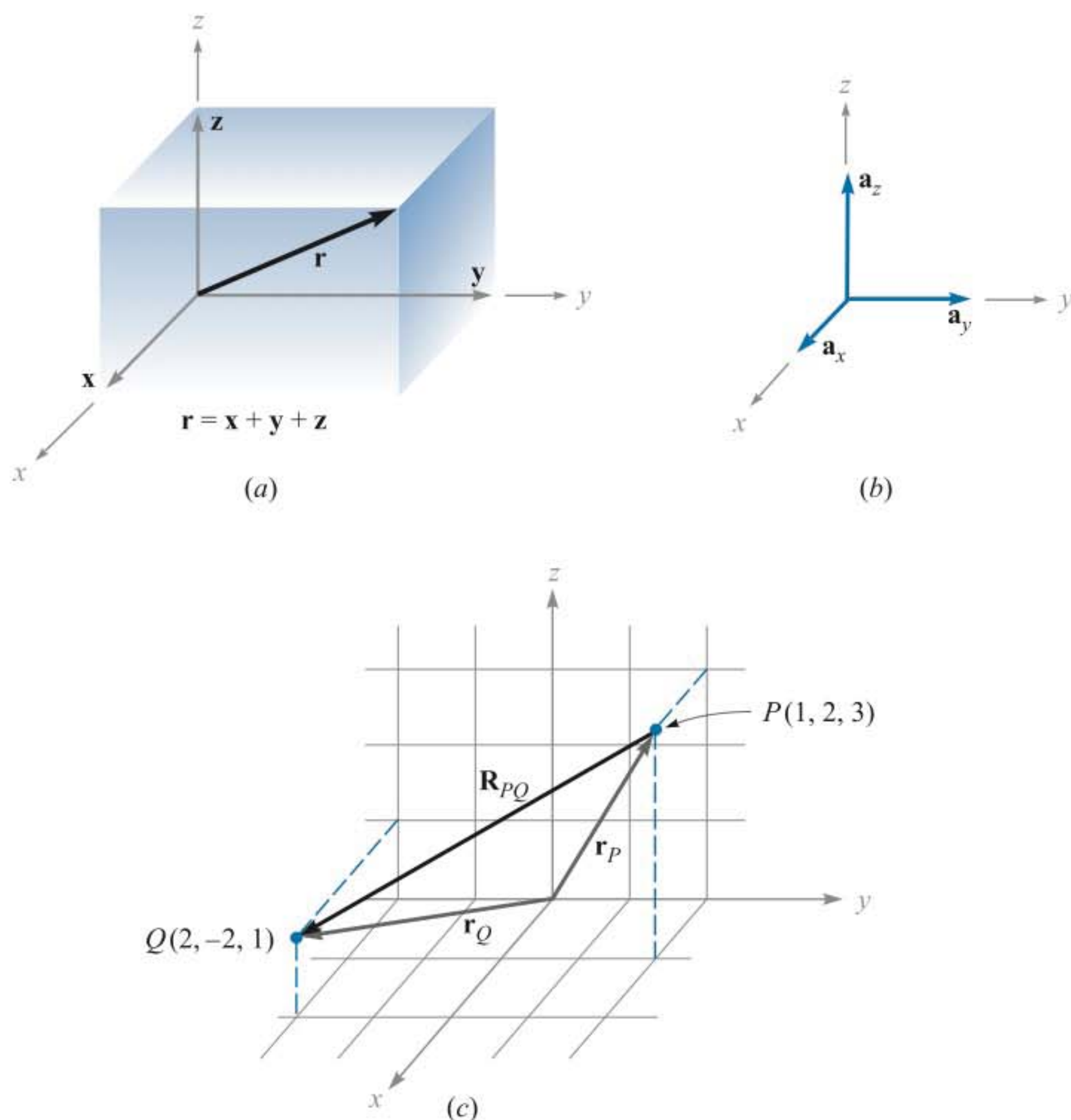



Figura 1.3 (*a*) Os componentes vetoriais **x**, **y** e **z** do vetor **r**. (*b*) Os vetores unitários do sistema de coordenadas retangulares têm intensidade unitária e estão direcionados no sentido crescente dos valores de suas respectivas variáveis. (*c*) O vetor $\mathbf{R}_{PQ}$ é igual à diferença vetorial $\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P$.

[3] Os símbolos **i**, **j** e **k** também são comumente utilizados para os vetores unitários em coordenadas cartesianas.

Este último vetor ($\mathbf{R}_{PQ}$) não parte da origem, como foi o caso do vetor $\mathbf{r}$ inicialmente considerado. Contudo, já aprendemos que vetores com a mesma intensidade, direção e sentido são iguais, e por isso, para auxiliar nossos processos de visualização, temos a liberdade de deslocar qualquer vetor até a origem antes de determinarmos seus componentes vetoriais. Evidentemente, o paralelismo deve ser mantido durante o processo de deslocamento.

Se nos referirmos a um vetor de força $\mathbf{F}$ ou a qualquer outro vetor que não seja referente a posicionamento, tal como $\mathbf{r}$, surge um problema para designar letras adequadas para seus três componentes vetoriais. Não seria apropriado denominá-las x, y e z, pois essas são letras associadas a deslocamentos ou distâncias orientadas e, assim, são medidas por metros (abreviados por m) ou alguma outra unidade de comprimento. Esse problema é frequentemente evitado mediante o uso de *componentes escalares*, simplesmente chamadas de *componentes*: F_x, F_y e F_z. Os componentes são as intensidades dos componentes vetoriais, com a inclusão dos sinais. Podemos, então, escrever $\mathbf{F} = F_x\mathbf{a}_x + F_y\mathbf{a}_y + F_z\mathbf{a}_z$. Os componentes vetoriais são $F_x\mathbf{a}_x$, $F_y\mathbf{a}_y$ e $F_z\mathbf{a}_z$.

Assim, qualquer vetor $\mathbf{B}$ pode ser descrito por $\mathbf{B} = B_x\mathbf{a}_x + B_y\mathbf{a}_y + B_z\mathbf{a}_z$. A intensidade de $\mathbf{B}$, escrita como $|\mathbf{B}|$ ou simplesmente B, é dada por

$$|\mathbf{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \tag{1}$$

Cada um dos sistemas coordenados que discutiremos terão seus três vetores unitários fundamentais e perpendiculares entre si, os quais são utilizados para decompor qualquer vetor em seus componentes vetoriais. Entretanto, o uso de vetores unitários não se limita apenas a essa aplicação. É sempre útil escrever um vetor unitário que possua direção e sentido especificados. Isso pode ser facilmente conseguido, pois um vetor unitário, em uma dada direção e sentido, é simplesmente um vetor naquela direção e sentido dividido por sua intensidade. Um vetor unitário na direção e sentido de $\mathbf{r}$ é $\mathbf{r}/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, e um vetor unitário na direção e sentido do vetor $\mathbf{B}$ é

$$\mathbf{a}_B = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} = \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} \tag{2}$$

EXEMPLO 1.1

Especifique o vetor unitário que parte da origem em direção ao ponto $G(2, -2, -1)$.

Solução. Primeiro construímos o vetor que parte da origem e vai até o ponto G,

$$\mathbf{G} = 2\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$$

Em seguida, encontramos a intensidade de $\mathbf{G}$,

$$|\mathbf{G}| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3$$

e, finalmente, expressamos o vetor unitário desejado como o quociente

$$\mathbf{a}_G = \frac{\mathbf{G}}{|\mathbf{G}|} = \tfrac{2}{3}\mathbf{a}_x - \tfrac{2}{3}\mathbf{a}_y - \tfrac{1}{3}\mathbf{a}_z = 0{,}667\mathbf{a}_x - 0{,}667\mathbf{a}_y - 0{,}333\mathbf{a}_z$$

Um símbolo identificador especial é desejável para um vetor unitário, para que assim seu caráter unitário se torne imediatamente aparente. Símbolos comuns são $\mathbf{u}_B$, $\mathbf{a}_B$, $\mathbf{1}_B$ ou mesmo **b**. Devemos utilizar consistentemente a letra minúscula **a** com o subscrito apropriado.

[NOTA: Ao longo do texto, exercícios propostos aparecem após as seções, nos quais um novo princípio é introduzido, com o objetivo de fazer com que os estudantes testem o entendimento que adquiriram sobre os conceitos abordados na seção. Os problemas são úteis para proporcionar familiaridade com novos termos e ideias, e por isso todos devem ser resolvidos. Problemas mais gerais aparecem nos finais dos capítulos. As respostas dos exercícios propostos são apresentadas na mesma sequência das partes do exercício.]

EP1.1. Dados os pontos $M(-1, 2, 1)$, $N(3, -3, 0)$ e $P(-2, -3, -4)$, determine: (*a*) $\mathbf{R}_{MN}$; (*b*) $\mathbf{R}_{MN} + \mathbf{R}_{MP}$; (*c*) $|\mathbf{r}_M|$; (*d*) $\mathbf{a}_{MP}$; (*e*) $|2\mathbf{r}_P - 3\mathbf{r}_N|$.

Resp. $4\mathbf{a}_x - 5\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$; $3\mathbf{a}_x - 10\mathbf{a}_y - 6\mathbf{a}_z$; 2,45; $-0{,}14\mathbf{a}_x - 0{,}7\mathbf{a}_y - 0{,}7\mathbf{a}_z$; 15,56

1.5 CAMPO VETORIAL

Já definimos o campo vetorial como uma função vetorial de um vetor posição. Em geral, a intensidade, a direção e o sentido da função mudarão à medida que nos movermos pela região, e assim o valor da função vetorial deverá ser determinado com a utilização dos valores das coordenadas do ponto em questão. Uma vez que, até o momento, abordamos apenas o sistema de coordenadas cartesianas, devemos esperar que o vetor seja uma função das variáveis x, y e z.

Se novamente representarmos o vetor posição como **r**, então um campo vetorial **G** será expresso em notação funcional como **G**(**r**), enquanto um campo escalar T será escrito como $T(\mathbf{r})$.

Se observássemos a velocidade da água no oceano em alguma região próxima da superfície, onde marés e correntes marinhas são importantes, poderíamos decidir representá-la por um vetor velocidade que teria qualquer direção e sentido, até mesmo para cima e para baixo. Se considerarmos que o eixo z aponta para cima o eixo x, para o norte, e o eixo y, para o oeste, admitindo a origem na superfície, temos um sistema de coordenadas do tipo triedro direto e podemos escrever o vetor velocidade como $\mathbf{v} = v_x\mathbf{a}_x + v_y\mathbf{a}_y + v_z\mathbf{a}_z$ ou $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v_x(\mathbf{r})\mathbf{a}_x + v_y(\mathbf{r})\mathbf{a}_y + v_z(\mathbf{r})\mathbf{a}_z$. Cada um dos componentes v_x, v_y e v_z podem ser uma função das três variáveis x, y e z. Se o problema for simplificado considerando que estamos em alguma parte da Corrente do Golfo, onde a água se move apenas no sentido norte, então v_y e v_z valeriam zero. Outras considerações simplificadoras podem ser feitas se a velocidade diminuir com a profundidade e variar lentamente à medida que nos movermos para o norte, sul, leste ou oeste. Uma expressão apropriada poderia ser $\mathbf{v} = 2e^{z/100}\mathbf{a}_x$. Tem-se uma velocidade de 2 m/s (metros por segundo) na superfície e uma velocidade de $0{,}368 \times 2$, ou 0,736 m/s, na profundidade de 100 m ($z = -100$ m), que continuaria a diminuir com a profundidade. Neste exemplo, o vetor velocidade tem direção e sentido constantes.

EP1.2. Um campo vetorial $\mathbf{S}$ é expresso em coordenadas cartesianas como $\mathbf{S} = \{125/[(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2]\}\{(x-1)\mathbf{a}_x + (y-2)\mathbf{a}_y + (z+1)\mathbf{a}_z\}$. (*a*) Avalie $\mathbf{S}$ em $P(2, 4, 3)$. (*b*) Determine um vetor unitário que forneça a direção e o sentido de $\mathbf{S}$ em P. (*c*) Especifique a superfície $f(x, y, z)$, onde $|\mathbf{S}| = 1$.

Resp. $5{,}95\mathbf{a}_x + 11{,}90\mathbf{a}_y + 23{,}80\mathbf{a}_z$; $0{,}218\mathbf{a}_x + 0{,}436\mathbf{a}_y + 0{,}873\mathbf{a}_z$; $\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2} = 125$

1.6 PRODUTO ESCALAR

Consideramos agora o primeiro de dois tipos de multiplicação de vetores. O segundo tipo será discutido na seção seguinte.

Dados dois vetores $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, o *produto escalar* é definido como o produto da intensidade de $\mathbf{A}$ pela intensidade de $\mathbf{B}$ e pelo cosseno do menor ângulo entre eles,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos \theta_{AB} \tag{3}$$

Na notação, o símbolo "·" (ponto) aparece entre os dois vetores e deve ser fortemente grafado, para dar ênfase*. O resultado de um produto escalar é também um escalar, conforme indica o próprio nome, e obedece à propriedade comutativa,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \tag{4}$$

pois o sinal do ângulo não afeta o termo em cosseno. A expressão $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ deve ser lida como "**A** escalar **B**".

Talvez a aplicação mais comum do produto escalar seja em mecânica, uma força constante $\mathbf{F}$, aplicada ao longo de um deslocamento retilíneo $\mathbf{L}$, em que executa uma quantidade de trabalho $F L \cos \theta$, mais facilmente escrita como $\mathbf{F} \cdot \mathbf{L}$. Podemos antecipar um dos resultados do Capítulo 4 ressaltando que, se a força variar ao longo do caminho, uma integração é necessária para encontrar o trabalho total, e o resultado será:

$$\text{Trabalho} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L}$$

Outro exemplo da aplicação de produto escalar pode ser extraído dos campos magnéticos**. O fluxo total Φ que atravessa uma superfície de área S é dado por BS, se a densidade de fluxo magnético B for perpendicular à superfície e uniforme*** sobre a mesma. Um *vetor superfície* $\mathbf{S}$ possui intensidade igual à área usual e direção *normal* à superfície (evitando, no momento, o problema de haver duas normais possíveis de serem tomadas). Assim, o fluxo atravessando a superfície vale $\mathbf{B} \cdot \mathbf{S}$. Essa expressão é válida para qualquer direção e sentido da densidade de fluxo magnético uniforme. Contudo, se a densidade de fluxo magnético não é uniforme sobre a superfície, o fluxo total vale $\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$. Integrais nessa forma genérica aparecerão no Capítulo 3, quando estudarmos densidade de fluxo elétrico.

---

* N. de T.: Alguns autores preferem utilizar "produto ponto" em vez de "produto escalar".

** N. de T.: Assunto que inicialmente será abordado no Capítulo 7.

*** N. de T.: Nesse contexto, "uniforme" quer dizer que B não varia ao longo das coordenadas espaciais associadas à superfície $\mathbf{S}$.

Encontrar o ângulo entre dois vetores em um espaço tridimensional normalmente é uma tarefa que preferimos evitar, e por essa razão a definição do produto escalar não é utilizada na sua forma básica. Um resultado mais útil é obtido quando consideramos dois vetores cujos componentes cartesianos são dados, tais como $\mathbf{A} = A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z$ e $\mathbf{B} = B_x\mathbf{a}_x + B_y\mathbf{a}_y + B_z\mathbf{a}_z$. O produto escalar também obedece à propriedade distributiva, portanto $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ leva à soma de nove termos escalares, cada um envolvendo o produto escalar de dois vetores unitários. Uma vez que o ângulo entre dois vetores unitários diferentes no sistema de coordenadas é 90°, temos

$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_y = 0$$

Os três termos restantes envolvem o produto escalar de um vetor unitário por ele mesmo, que é igual à unidade, resultando finalmente em

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z} \qquad (5)$$

Vemos que essa é uma expressão que não envolve ângulos.

O produto escalar de um vetor por ele mesmo resulta no quadrado da sua intensidade, ou

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2 = |\mathbf{A}|^2} \qquad (6)$$

e o produto escalar de qualquer vetor unitário por ele mesmo resulta na unidade

$$\mathbf{a}_A \cdot \mathbf{a}_A = 1$$

Uma das mais importantes aplicações do produto escalar permite encontrar o componente de um vetor em uma dada direção. Como mostra a Figura 1.4*a*, podemos obter o componente (escalar) de **B** na direção especificada pelo vetor unitário **a** por meio de

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{B}||\mathbf{a}|\cos\theta_{Ba} = |\mathbf{B}|\cos\theta_{Ba}$$

O sinal do componente é positivo se $0 \leq \theta_{Ba} \leq 90°$ e negativo caso $90° \leq \theta_{Ba} \leq 180°$.

Com o objetivo de obter o componente *vetorial* de **B** na direção de **a**, simplesmente multiplicamos o componente (escalar) por **a**, conforme ilustrado na Figura 1.4*b*. Por exemplo, o componente de **B** na direção de $\mathbf{a}_x$ é $\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_x = B_x$ e o componente vetorial é $B_x\mathbf{a}_x$ ou $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_x)\mathbf{a}_x$. Com isso, o problema de encontrar o componente de um vetor em qualquer direção desejada se torna o problema de determinar um vetor unitário naquela direção, e isso podemos fazer.

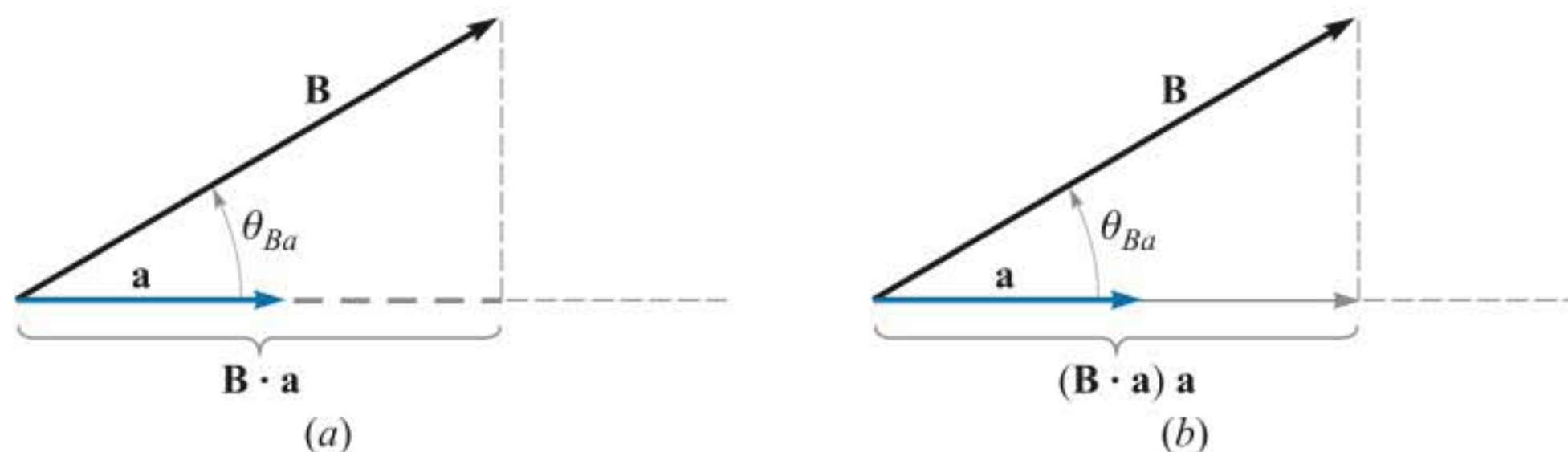



Figura 1.4 (*a*) O componente escalar de B na direção do vetor unitário a é B · a. (*b*) O componente vetorial de B na direção do vetor unitário a é (B · a)a.

O termo geométrico *projeção* é também usado com o produto escalar. Logo, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}$ é a projeção de **B** na direção de **a**.

EXEMPLO 1.2

Com o objetivo de ilustrar essas definições e operações, consideremos um campo vetorial $\mathbf{G} = y\mathbf{a}_x - 2{,}5x\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$ e o ponto $Q(4, 5, 2)$. Desejamos encontrar: **G** em Q; o componente escalar de **G** em Q na direção de $\mathbf{a}_N = \frac{1}{3}(2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z)$; o componente vetorial de **G** em Q na direção de $\mathbf{a}_N$; e finalmente, o ângulo θ_{Ga} entre $\mathbf{G}(\mathbf{r}_Q)$ e $\mathbf{a}_N$.

Solução. Substituindo as coordenadas do ponto Q na expressão de **G**, temos

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}_Q) = 5\mathbf{a}_x - 10\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$$

Em seguida, encontramos o componente escalar. Utilizando o produto escalar, temos

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_N = (5\mathbf{a}_x - 10\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z) \cdot \tfrac{1}{3}(2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z) = \tfrac{1}{3}(10 - 10 - 6) = -2$$

O componente vetorial é obtido pela multiplicação do componente escalar pelo vetor unitário na direção de $\mathbf{a}_N$,

$$(\mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_N)\mathbf{a}_N = -(2)\tfrac{1}{3}(2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z) = -1{,}333\mathbf{a}_x - 0{,}667\mathbf{a}_y + 1{,}333\mathbf{a}_z$$

O ângulo entre $\mathbf{G}(\mathbf{r}_Q)$ e $\mathbf{a}_N$ é encontrado de

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_N = |\mathbf{G}| \cos \theta_{Ga}$$
$$-2 = \sqrt{25 + 100 + 9} \cos \theta_{Ga}$$

e

$$\theta_{Ga} = \cos^{-1} \frac{-2}{\sqrt{134}} = 99{,}9°$$

EP1.3. Os três vértices de um triângulo são localizados em $A(6, -1, 2)$, $B(-2, 3, -4)$ e $C(-3, 1, 5)$. Encontre: (*a*) $\mathbf{R}_{AB}$; (*b*) $\mathbf{R}_{AC}$; (*c*) o ângulo θ_{BAC} no vértice A; (*d*) a projeção (vetorial) de $\mathbf{R}_{AB}$ em $\mathbf{R}_{AC}$.

Resp. $-8\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y - 6\mathbf{a}_z$; $-9\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$; 53,6°; $-5{,}94\mathbf{a}_x + 1{,}319\mathbf{a}_y + 1{,}979\mathbf{a}_z$

1.7 PRODUTO VETORIAL

Dados dois vetores **A** e **B**, podemos agora definir o *produto vetorial* de **A** e **B**, que é escrito com um sinal "de cruz" entre os dois vetores, como $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, e é lido como **A** vetorial **B**. O resultado do produto vetorial $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ é um vetor. A intensidade de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ é igual ao produto das intensidades de **A**, de **B** e do seno do menor ângulo entre **A** e **B**. A direção de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ é perpendicular ao plano que contém **A** e **B**, e o sentido é aquele relacionado ao avanço de um parafuso dextrogiro que é girado de **A** para **B***. A

* N. de T.: Uma regra prática equivalente para a determinação da direção e do sentido de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ é denominada "regra do tapa", na qual os dedos da mão (à exceção do polegar) são dispostos na mesma direção e sentido do vetor **A**. Depois disso, um "tapa" é dado em direção ao vetor **B**, e o polegar indicará a direção e o sentido de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

direção e o sentido aqui considerados são ilustrados na Figura 1.5. Deve-se lembrar que ambos os vetores podem ser movidos à vontade sem que a sua direção e o seu sentido sejam alterados, até que ambos tenham uma “origem comum”. Tal procedimento determina o plano que contém **A** e **B**. Entretanto, na maioria das nossas aplicações, devemos lidar com vetores que são definidos no mesmo ponto.

Na forma de equação, podemos escrever

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{a}_N \, |\mathbf{A}| \, |\mathbf{B}| \text{ sen } \theta_{AB} \tag{7}$$

onde uma informação adicional, tal como a dada anteriormente, é ainda necessária para explicar a direção e o sentido do vetor unitário $\mathbf{a}_N$. O subscrito N significa “normal”.

Ao inverter a ordem dos vetores **A** e **B**, teremos um vetor unitário na mesma direção mas em sentido oposto, e assim veremos que o produto vetorial não é comutativo, uma vez que $\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$. Se a definição do produto vetorial for aplicada aos vetores unitários $\mathbf{a}_x$ e $\mathbf{a}_y$, encontraremos $\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z$, uma vez que cada vetor é unitário, os dois vetores são perpendiculares entre si e a rotação de $\mathbf{a}_x$ em direção a $\mathbf{a}_y$ indica a direção positiva de z pela definição de um sistema de coordenadas do tipo triedro direto. De maneira semelhante, $\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x$ e $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y$. Note a simetria alfabética. Uma vez que os três vetores $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$ e $\mathbf{a}_z$ são escritos nessa sequência (admitindo que $\mathbf{a}_x$ vem logo em seguida de $\mathbf{a}_z$, como três elefantes em círculo, um segurando o rabo do outro; dessa forma, poderíamos também escrever $\mathbf{a}_y$, $\mathbf{a}_z$, $\mathbf{a}_x$ ou $\mathbf{a}_z$, $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$), os sinais de “cruz” e de igualdade podem ser colocados em qualquer um dos dois espaços vazios adjacentes. Na verdade, agora é mais fácil definir um sistema de coordenadas do tipo triedro direto afirmando que $\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z$.

Um exemplo simples do uso do produto vetorial pode ser tirado da geometria ou da trigonometria. Para a determinação da área de um paralelogramo, o produto do comprimento de dois lados adjacentes é multiplicado pelo seno do ângulo entre eles. Utilizando a notação vetorial para os dois lados, podemos então expressar a área (escalar) como a *intensidade* de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, ou $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$.

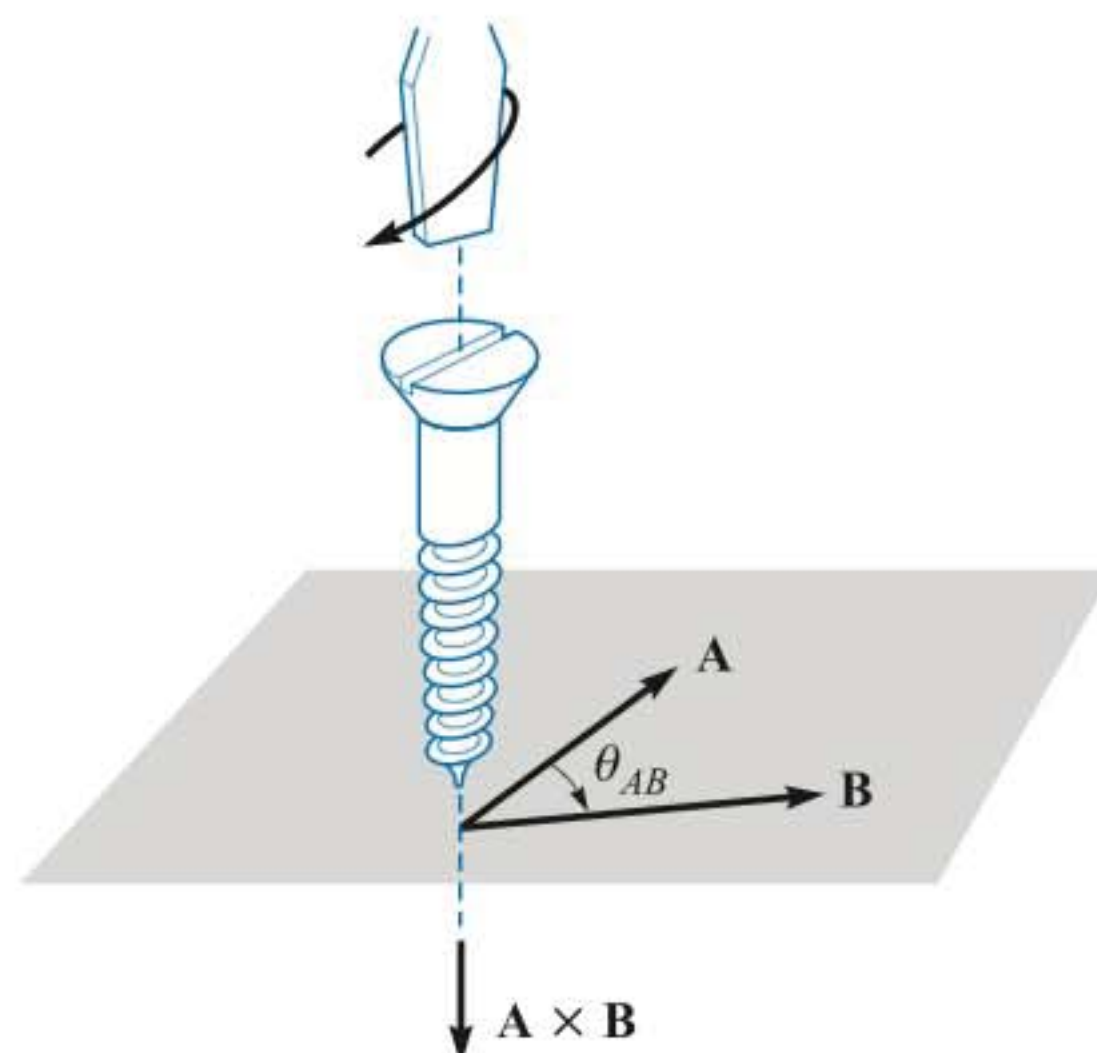



Figura 1.5 A direção e o sentido de A × B são na direção e no sentido de avanço de um parafuso dextrogiro rotacionado no sentido de A para B.

O produto vetorial pode ser utilizado para substituir a regra da mão direita, a qual é familiar a todos os engenheiros eletricistas. Considere uma força em um condutor retilíneo de comprimento **L**, no qual a direção e o sentido correspondem à direção e ao sentido de uma corrente contínua I, e um campo magnético uniforme com densidade de fluxo **B**. Utilizando a notação vetorial, podemos escrever o resultado de forma elegante como $\mathbf{F} = I\mathbf{L} \times \mathbf{B}$. Essa relação será obtida mais tarde no Capítulo 9.

O cálculo do produto vetorial com essa definição torna-se mais trabalhoso que o cálculo do produto escalar pela sua definição, e não somente porque temos de encontrar o ângulo entre os vetores, mas também porque temos de determinar uma expressão para o vetor unitário $\mathbf{a}_N$. Esse trabalho pode ser evitado ao se utilizar componentes cartesianos para os dois vetores **A** e **B** e expandir o produto vetorial como uma soma de nove produtos vetoriais mais simples, cada um envolvendo dois vetores unitários,

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} = & A_x B_x \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_x + A_x B_y \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y + A_x B_z \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_z \\ & + A_y B_x \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_x + A_y B_y \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_y + A_y B_z \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z \\ & + A_z B_x \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x + A_z B_y \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_y + A_z B_z \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_z\end{aligned}$$

Já descobrimos que $\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z$, $\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x$ e $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y$. Os três termos restantes são todos iguais a zero, uma vez que o produto vetorial de qualquer vetor por ele mesmo é nulo, pois o ângulo envolvido será zero. Esses resultados podem ser combinados resultando em

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\mathbf{a}_x + (A_z B_x - A_x B_z)\mathbf{a}_y + (A_x B_y - A_y B_x)\mathbf{a}_z \qquad (8)$$

ou escritos como um determinante, em uma forma que pode ser mais facilmente lembrada,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad (9)$$

Assim, se $\mathbf{A} = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$ e $\mathbf{B} = -4\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= [(-3)(5) - (1)(-2)]\mathbf{a}_x - [(2)(5) - (1)(-4)]\mathbf{a}_y + [(2)(-2) - (-3)(-4)]\mathbf{a}_z \\ &= -13\mathbf{a}_x - 14\mathbf{a}_y - 16\mathbf{a}_z\end{aligned}$$

EP1.4. Os três vértices de um triângulo estão localizados em $A(6, -1, 2)$, $B(-2, 3, -4)$ e $C(-3, 1, 5)$. Encontre: (*a*) $\mathbf{R}_{AB} \times \mathbf{R}_{AC}$; (*b*) a área do triângulo; (*c*) o vetor unitário perpendicular ao plano ao qual o triângulo pertence.

Resp. $24\mathbf{a}_x + 78\mathbf{a}_y + 20\mathbf{a}_z$; 42,0; $0{,}286\mathbf{a}_x + 0{,}928\mathbf{a}_y + 0{,}238\mathbf{a}_z$

1.8 OUTROS SISTEMAS DE COORDENADAS: COORDENADAS CILÍNDRICAS CIRCULARES

O sistema de coordenadas cartesianas é, geralmente, aquele que os estudantes preferem utilizar em todos os problemas. Isso frequentemente resulta em mais trabalho para ele, porque muitos problemas possuem um tipo de simetria que pede por um tratamento mais adequado. Por isso, é mais fácil fazer agora, de uma vez por todas, o esforço necessário para se familiarizar com coordenadas cilíndricas e esféricas, em vez de aplicar futuramente um esforço igual ou superior em todos os problemas que envolvem simetria cilíndrica ou esférica. Tendo em mente essa economia de tempo futuro, devemos dar uma olhada cuidadosa e sem pressa no tema coordenadas cilíndricas e esféricas.

O sistema de coordenadas cilíndricas é a versão tridimensional das coordenadas polares da geometria analítica. Nas coordenadas polares bidimensionais, um ponto era localizado em um plano pela sua distância ρ em relação à origem e o ângulo ϕ entre a reta que liga o ponto à origem e uma reta radial arbitrária, tomada como $\phi = 0$.[4] Um sistema de coordenadas tridimensionais, as coordenadas cilíndricas circulares, é obtido pela especificação adicional da distância z do ponto em relação a um plano de referência $z = 0$, o qual é perpendicular à reta $\rho = 0$. Por simplicidade, normalmente nos referimos às coordenadas cilíndricas circulares apenas como coordenadas cilíndricas. Isso não causará nenhuma confusão na leitura deste livro, mas deve-se ressaltar que também existem outros sistemas, como coordenadas cilíndricas elípticas, coordenadas cilíndricas hiperbólicas e coordenadas cilíndricas parabólicas, entre outras.

Não mais consideramos três eixos como nas coordenadas cartesianas, mas devemos, em vez disso, considerar qualquer ponto como a interseção de três superfícies mutuamente perpendiculares. Essas superfícies são um cilindro circular (ρ = constante), um plano (ϕ = constante) e outro plano (z = constante). Isso corresponde à localização de um ponto em um sistema de coordenadas cartesianas pela interseção de três planos (x = constante, y = constante e z = constante). As três superfícies das coordenadas cilíndricas circulares são mostradas na Figura 1.6*a*. Note que superfícies como essas podem passar por qualquer ponto, a não ser que esse esteja sobre o eixo z, quando um único plano é suficiente.

Três vetores unitários devem também ser definidos, mas já não temos que direcioná-los ao longo dos "eixos coordenados", pois esses eixos existem apenas nas coordenadas cartesianas. Em vez disso, devemos adotar uma visão mais ampla dos vetores unitários das coordenadas cartesianas e perceber que eles apontam, na verdade, no sentido crescente dos valores das coordenadas e são perpendiculares à superfície na qual o valor da coordenada em questão é constante (isto é, o vetor unitário $\mathbf{a}_x$ é normal ao plano x = constante e aponta no sentido dos valores crescentes de x). De maneira correspondente, podemos agora definir os três vetores unitários em coordenadas cilíndricas $\mathbf{a}_\rho$, $\mathbf{a}_\phi$ e $\mathbf{a}_z$.

---

[4] As duas variáveis das coordenadas polares são usualmente denominadas r e θ. Com três coordenadas, entretanto, é mais comum usar ρ para a variável associada ao raio das coordenadas cilíndricas e r para a variável relacionada ao raio (que é diferente da anterior) das coordenadas esféricas. Além disso, a variável associada ao ângulo das coordenadas cilíndricas é usualmente denominada ϕ, porque todos usam θ para outro ângulo em coordenadas esféricas. O ângulo ϕ é comum para ambas as coordenadas cilíndricas e esféricas. É possível perceber isso?

O vetor unitário $\mathbf{a}_\rho$ em um ponto $P(\rho_1, \phi_1, z_1)$ aponta radialmente para fora e é normal à superfície cilíndrica $\rho = \rho_1$. Ele pertence aos planos $\phi = \phi_1$ e $z = z_1$. O vetor unitário $\mathbf{a}_\phi$ é normal ao plano $\phi = \phi_1$, aponta no sentido crescente de ϕ, pertence ao plano $z = z_1$ e é tangente à superfície cilíndrica $\rho = \rho_1$. O vetor unitário $\mathbf{a}_z$ é o mesmo que o vetor unitário $\mathbf{a}_z$ do sistema de coordenadas cartesianas. A Figura 1.6*b* mostra os três vetores em coordenadas cilíndricas.

Em coordenadas cartesianas, os vetores unitários não são funções das coordenadas. Entretanto, dois dos vetores unitários em coordenadas cilíndricas, $\mathbf{a}_\rho$ e $\mathbf{a}_\phi$ *variam* com a coordenada ϕ, uma vez que suas direções também variam. Assim, em operações de integração ou diferenciação em relação a ϕ, $\mathbf{a}_\rho$ e $\mathbf{a}_\phi$ não devem ser tratados como constantes.

Dessa forma, os vetores unitários são novamente perpendiculares entre si, pois cada um é normal a uma das três superfícies mutuamente perpendiculares, e assim podemos definir um sistema de coordenadas cilíndricas do tipo triedro direto como aquele no qual $\mathbf{a}_\rho \times \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_z$, ou (para aqueles que possuem dedos flexíveis) como aquele em que os dedos polegar, indicador e médio apontam, respectivamente, nas direções de ρ, ϕ e z.

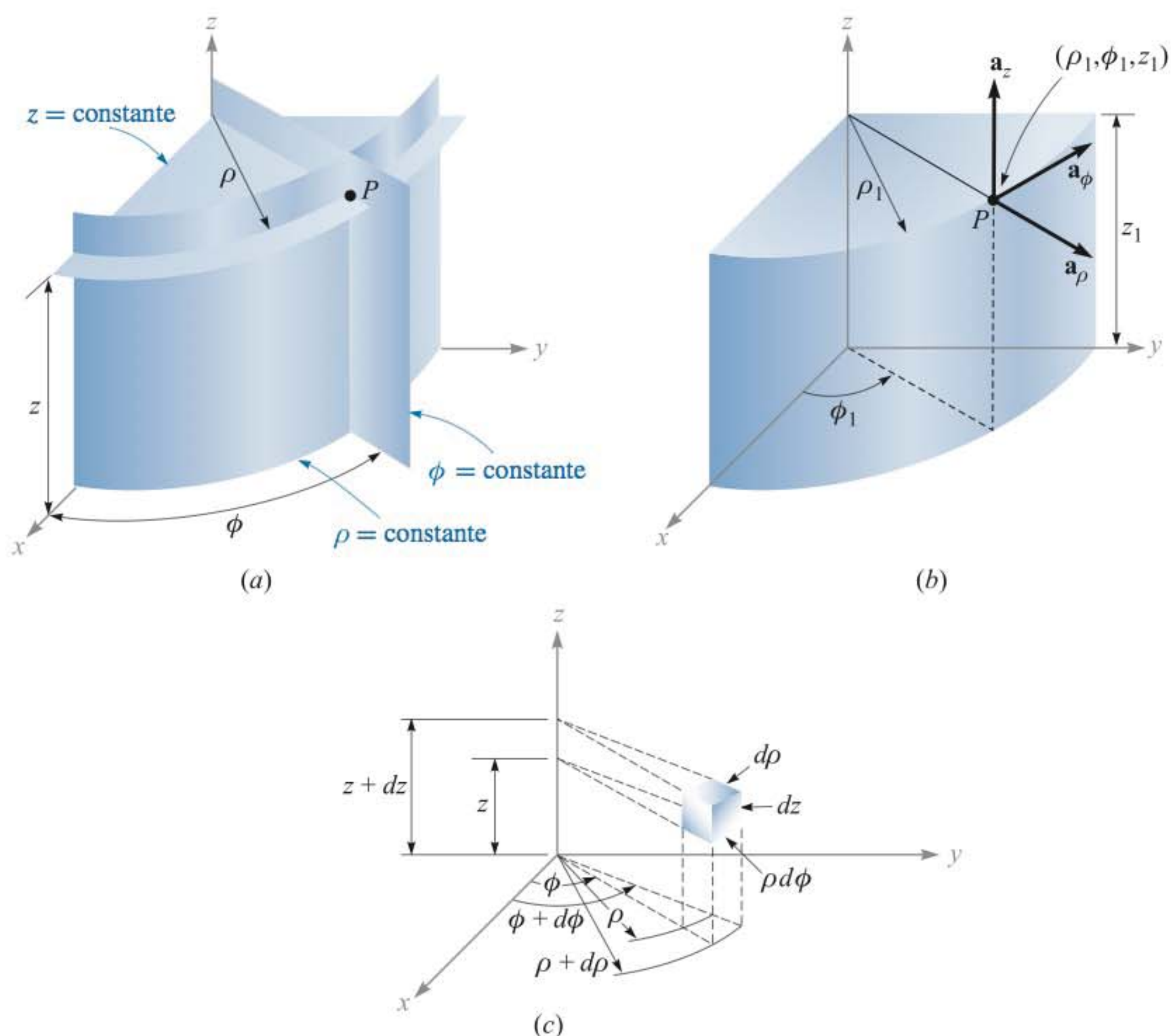



Figura 1.6 (*a*) As três superfícies mutuamente perpendiculares do sistema de coordenadas cilíndricas circulares. (*b*) Os três vetores do sistema de coordenadas cilíndricas circulares. (*c*) O elemento de volume diferencial no sistema de coordenadas cilíndricas circulares; $d\rho$, $\rho d\phi$ e dz são todos elementos diferenciais de comprimento.

Um elemento de volume diferencial em coordenadas cilíndricas pode ser obtido aumentando-se ρ, ϕ e z com os incrementos diferenciais $d\rho$, $d\phi$ e dz. Os dois cilindros de raios ρ e $\rho + d\rho$, os dois planos radiais nos ângulos ϕ e $\phi + d\phi$ e os dois planos "horizontais" nas "elevações" z e $z + dz$ limitam, agora, um volume pequeno, conforme ilustra a Figura 1.6*c*, que tem o formato de uma cunha truncada. À medida que o elemento de volume torna-se muito pequeno, seu formato se aproxima ao de um paralelepípedo retângulo com lados de comprimentos $d\rho$, $\rho d\phi$ e dz. Note que $d\rho$ e dz possuem dimensão de comprimento, mas $d\phi$ não; $\rho d\phi$ é que representa comprimento. As superfícies possuem áreas de $\rho\, d\rho\, d\phi$, $d\rho\, dz$ e $\rho\, d\phi\, dz$, e o volume se torna $\rho\, d\rho\, d\phi\, dz$.

As variáveis dos sistemas de coordenadas cartesianas e cilíndricas podem ser facilmente relacionadas umas às outras. Considerando a Figura 1.7, podemos ver que

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \operatorname{sen} \phi \\ z &= z \end{aligned} \tag{10}$$

Por outro ponto de vista, podemos expressar as variáveis cilíndricas por x, y e z:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\rho \geq 0) \\ \phi &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned} \tag{11}$$

Devemos considerar a variável ρ como positiva ou zero, usando, para isso, apenas o sinal positivo para a radiciação na Equação (11). O valor correto do ângulo ϕ é determinado observando os sinais de x e y. Desse modo, se $x = -3$ e $y = 4$ verificamos que o ponto está situado no segundo quadrante, de forma que $\rho = 5$ e $\phi = 126{,}9°$. Para $x = 3$ e $y = -4$ temos $\phi = -53{,}1°$ ou $306{,}9°$, o que for mais conveniente.

Usando as Equações (10) ou (11), funções escalares fornecidas em um sistema de coordenadas podem ser facilmente transformadas para o outro sistema.

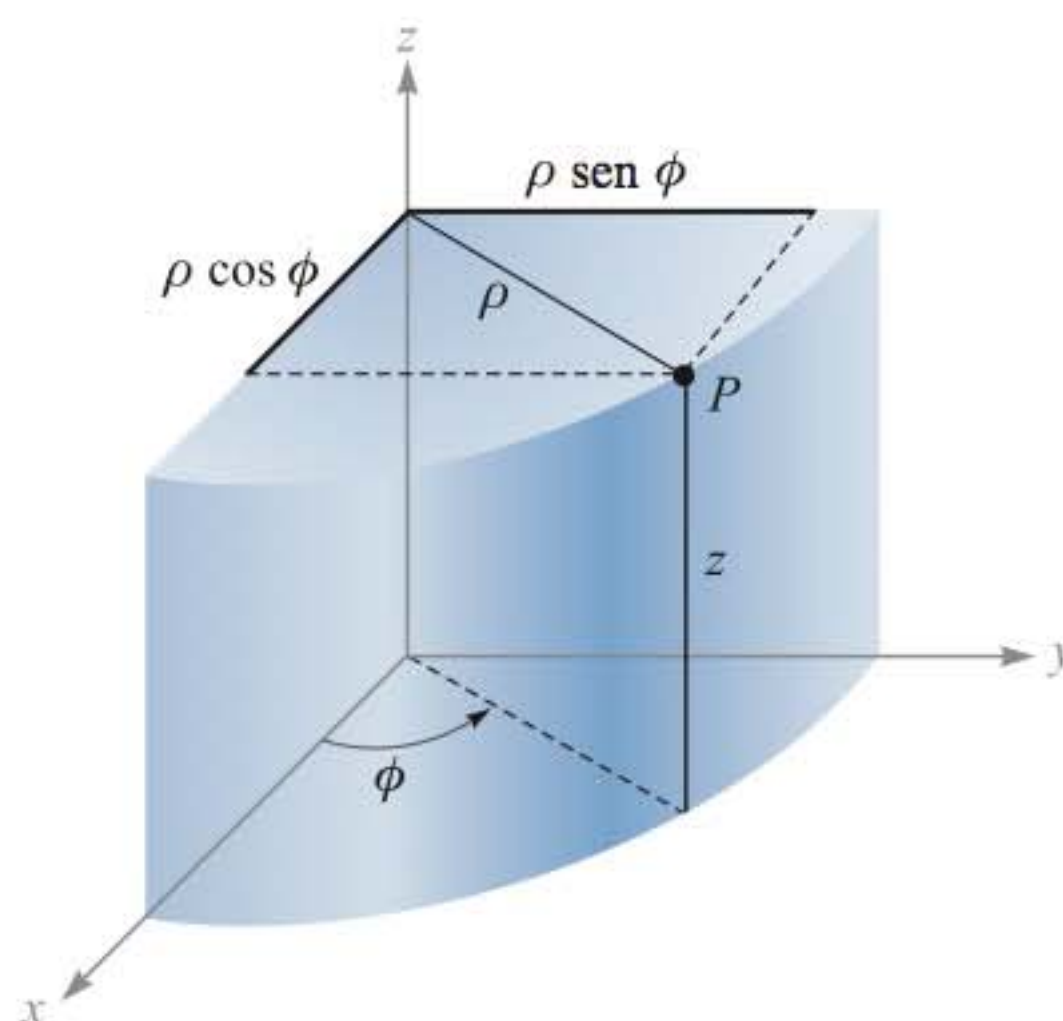



Figura 1.7 As relações entre as variáveis cartesianas x, y e z e as variáveis das coordenadas cilíndricas circulares ρ, ϕ e z. Não há mudança na variável z entre os dois sistemas.

Contudo, uma função vetorial em um sistema de coordenadas requer dois passos para que seja transformada para outro sistema de coordenadas, pois um conjunto diferente de componentes vetoriais é normalmente necessário. Isto é, pode ser apresentado um vetor em coordenadas cartesianas

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z$$

no qual cada componente é dado como uma função de x, y e z, e precisamos de um vetor em coordenadas cilíndricas

$$\mathbf{A} = A_\rho\mathbf{a}_\rho + A_\phi\mathbf{a}_\phi + A_z\mathbf{a}_z$$

onde cada componente corresponde a uma função de ρ, ϕ e z.

Para encontrar qualquer componente vetorial desejado, relembremos a discussão sobre o produto escalar, em que o componente em uma dada direção pode ser obtido tomando-se o produto escalar entre o vetor e o vetor unitário na direção de interesse. Logo,

$$A_\rho = \mathbf{A}\cdot\mathbf{a}_\rho \qquad \text{e} \qquad A_\phi = \mathbf{A}\cdot\mathbf{a}_\phi$$

Expandindo esses produtos escalares, temos

$$A_\rho = (A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z)\cdot\mathbf{a}_\rho = A_x\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_\rho + A_y\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{a}_\rho \tag{12}$$

$$A_\phi = (A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z)\cdot\mathbf{a}_\phi = A_x\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_\phi + A_y\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{a}_\phi \tag{13}$$

e

$$A_z = (A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z)\cdot\mathbf{a}_z = A_z\mathbf{a}_z\cdot\mathbf{a}_z = A_z \tag{14}$$

uma vez que $\mathbf{a}_z\cdot\mathbf{a}_\rho$ e $\mathbf{a}_z\cdot\mathbf{a}_\phi$ são iguais a zero.

Com o objetivo de completar a transformação dos componentes, é necessário conhecer os produtos escalares $\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_\rho$, $\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{a}_\rho$, $\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_\phi$ e $\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{a}_\phi$. Aplicando a definição do produto escalar, já que estamos interessados em vetores unitários, percebemos que o resultado é simplesmente o cosseno do menor ângulo entre os dois vetores unitários em questão. Consultando a Figura 1.7 e fazendo um esforço de raciocínio, identificamos o ângulo entre $\mathbf{a}_x$ e $\mathbf{a}_\rho$ como ϕ; com isso, $\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_\rho = \cos\phi$, mas o ângulo entre $\mathbf{a}_y$ e $\mathbf{a}_\rho$ é $90° - \phi$. Assim, $\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{a}_\rho = \cos(90° - \phi) = \operatorname{sen}\phi$. Os produtos escalares restantes entre os vetores unitários são encontrados de maneira semelhante. Os resultados estão tabulados em função de ϕ na Tabela 1.1.

Portanto, a transformação de vetores de coordenadas cartesianas para cilíndricas, ou vice-versa, é alcançada utilizando as Equações (10) e (11) para a alteração das variáveis,

Tabela 1.1 Produtos escalares de vetores unitários nos sistemas de coordenadas cartesianas e cilíndricas

	$\mathbf{a}_\rho$	$\mathbf{a}_\phi$	$\mathbf{a}_z$
$\mathbf{a}_x\cdot$	$\cos\phi$	$-\operatorname{sen}\phi$	0
$\mathbf{a}_y\cdot$	$\operatorname{sen}\phi$	$\cos\phi$	0
$\mathbf{a}_z\cdot$	0	0	1

e usando os produtos escalares entre vetores unitários dados na Tabela 1.1, para a mudança dos componentes. Esses dois passos podem ser executados em qualquer ordem.

EXEMPLO 1.3

Transforme o vetor $\mathbf{B} = y\mathbf{a}_x - x\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$ para coordenadas cilíndricas.

Solução. Os novos componentes são

$$B_\rho = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_\rho = y(\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\rho) - x(\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\rho)$$
$$= y \cos\phi - x \operatorname{sen}\phi = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\phi - \rho \cos\phi \operatorname{sen}\phi = 0$$
$$B_\phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_\phi = y(\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi) - x(\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\phi)$$
$$= -y \operatorname{sen}\phi - x \cos\phi = -\rho \operatorname{sen}^2\phi - \rho \cos^2\phi = -\rho$$

Com isso,

$$\mathbf{B} = -\rho\mathbf{a}_\phi + z\mathbf{a}_z$$

EP1.5. (*a*) Forneça as coordenadas cartesianas do ponto $C(\rho = 4{,}4, \phi = -115°, z = 2)$. (*b*) Forneça as coordenadas cilíndricas do ponto $D(x = -3{,}1, y = 2{,}6, z = -3)$. (*c*) Especifique a distância entre C e D.

Resp. $C(x = -1{,}860, y = -3{,}99, z = 2)$; $D(\rho = 4{,}05, \phi = 140{,}0°, z = -3)$; 8,36

EP1.6. Transforme em coordenadas cilíndricas: (*a*) $\mathbf{F} = 10\mathbf{a}_x - 8\mathbf{a}_y + 6\mathbf{a}_z$ no ponto $P(10, -8, 6)$. (*b*) $\mathbf{G} = (2x + y)\mathbf{a}_x - (y - 4x)\mathbf{a}_y$ no ponto $Q(\rho, \phi, z)$. (*c*) Forneça os componentes cartesianos do vetor $\mathbf{H} = 20\mathbf{a}_\rho - 10\mathbf{a}_\phi + 3\mathbf{a}_z$ em $P(x = 5, y = 2, z = -1)$.

Resp. $12{,}81\mathbf{a}_\rho + 6\mathbf{a}_z$; $(2\rho\cos^2\phi - \rho\operatorname{sen}^2\phi + 5\rho\operatorname{sen}\phi\cos\phi)\mathbf{a}_\rho + (4\rho\cos^2\phi - \rho\operatorname{sen}^2\phi - 3\rho\operatorname{sen}\phi\cos\phi)\mathbf{a}_\phi$; $H_x = 22{,}3$, $H_y = -1{,}857$, $H_z = 3$

1.9 SISTEMA DE COORDENADAS ESFÉRICAS

Não existe um sistema de coordenadas bidimensional para nos auxiliar no entendimento do sistema de coordenadas esféricas tridimensional, conforme acontece com o sistema de coordenadas cilíndricas circulares. Em certos aspectos, podemos recorrer ao nosso conhecimento do sistema de latitude e longitude de localização na superfície da Terra, mas nesse caso, usualmente, consideramos apenas pontos na superfície, e não aqueles abaixo ou acima do solo.

Vamos começar construindo um sistema de coordenadas esféricas nos três eixos cartesianos (Figura 1.8*a*). Primeiro definimos a distância da origem até um ponto qualquer como r. A superfície $r =$ constante é uma esfera.

A segunda coordenada é um ângulo entre o eixo z e a linha traçada da origem até o ponto em questão. A superfície $\theta =$ constante é um cone e as duas superfícies, cone e esfera, são perpendiculares entre si em qualquer ponto de sua interseção, que é um círculo de raio $r \operatorname{sen}\theta$. A coordenada θ corresponde à latitude, exceto pelo fato de a latitude ser medida a partir da linha do Equador e θ ser medido a partir do "Polo Norte".

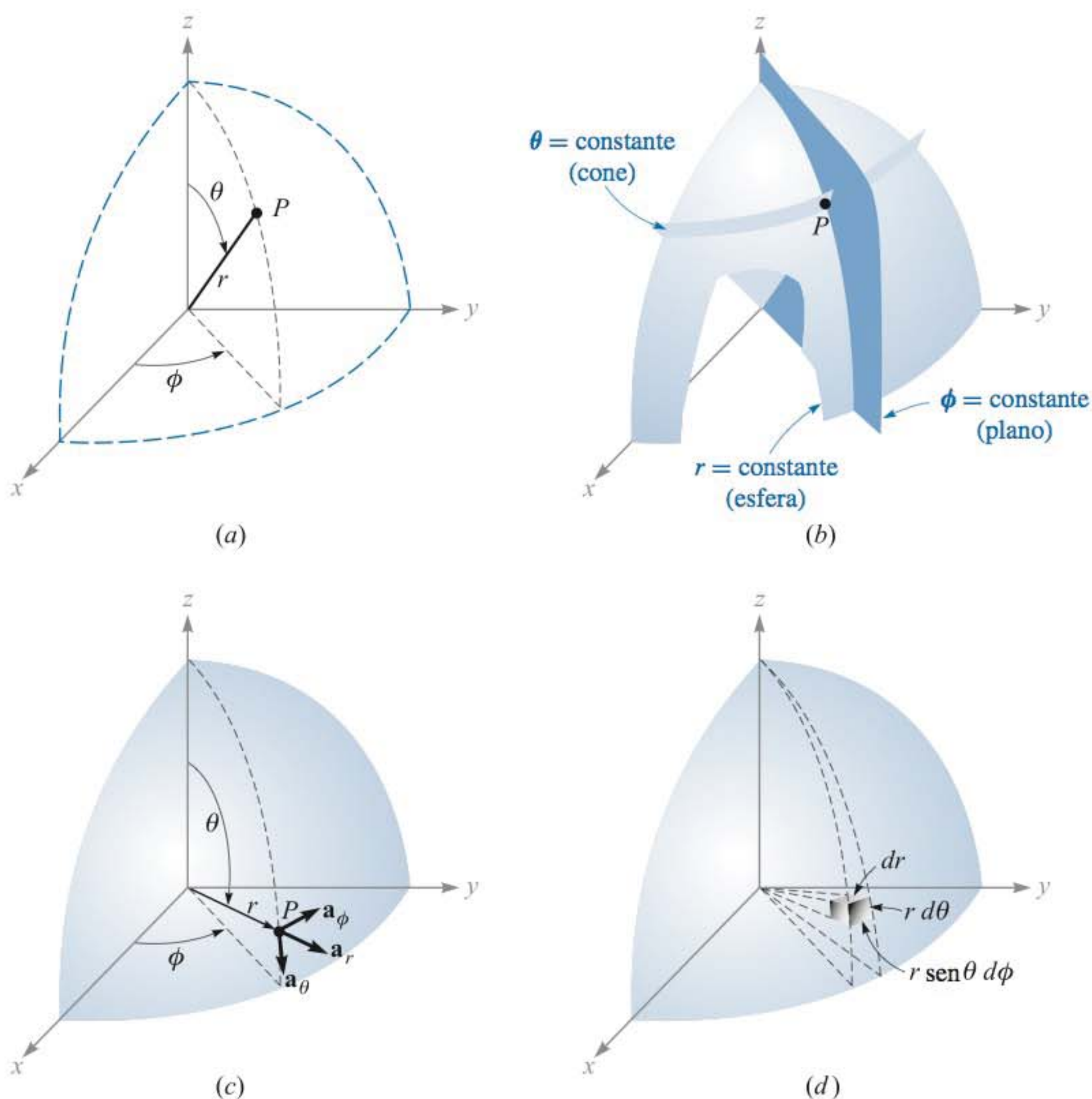



Figura 1.8 (a) As três coordenadas esféricas. (b) As três superfícies mutuamente perpendiculares do sistema de coordenadas esféricas. (c) Os três vetores unitários das coordenadas esféricas: $\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\phi$. (d) O elemento de volume diferencial no sistema de coordenadas esféricas.

A terceira coordenada ϕ é também um ângulo, e é exatamente a mesma do ângulo ϕ das coordenadas cilíndricas. É o ângulo entre o eixo x e a projeção, no plano $z = 0$, da reta traçada da origem até o ponto. Corresponde ao ângulo da longitude, mas o ângulo ϕ aumenta em direção ao "leste". A superfície $\phi =$ constante é um plano que passa pela reta $\theta = 0$ (ou eixo z).

Devemos novamente considerar qualquer ponto como a interseção entre três superfícies mutuamente perpendiculares – uma esfera, um cone e um plano –, cada uma orientada exatamente da maneira descrita. As superfícies são mostradas na Figura 1.8*b*.

Três vetores unitários podem novamente ser definidos em qualquer ponto. Cada vetor unitário é perpendicular a uma das três superfícies mutuamente perpendiculares e é orientado no sentido crescente da coordenada. O vetor unitário $\mathbf{a}_r$ direciona-se radialmente no sentido "para fora", é normal à esfera $r =$ constante e pertence ao cone $\theta =$ constante e ao plano $\phi =$ constante. O vetor unitário $\mathbf{a}_\theta$ é normal à superfície cônica, pertence ao plano e é tangente à esfera. Direciona-se ao longo da linha de "longitude", apontando para o "sul". O terceiro vetor $\mathbf{a}_\phi$ é o mesmo das coordenadas

cilíndricas, sendo normal ao plano e tangente tanto ao cone quanto à esfera. É direcionado no sentido "leste".

Os três vetores unitários são ilustrados na Figura 1.8*c*. Evidentemente, eles são perpendiculares entre si, e um sistema de coordenadas do tipo triedro direto pode ser definido considerando-se $\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\phi$. Nosso sistema é realmente do tipo triedro direto, como uma inspeção na Figura 1.8*c* pode mostrar, quando da aplicação da definição do produto vetorial. A regra da mão direita serve para identificar os dedos polegar, indicador e médio como correspondentes às direções e aos sentidos crescentes de r, θ e ϕ, respectivamente. (Note que a identificação em coordenadas cilíndricas foi ρ, ϕ e z, e em coordenadas cartesianas, foi x, y e z). Um elemento de volume diferencial pode ser construído em coordenadas esféricas incrementando r, θ e ϕ de dr, $d\theta$ e $d\phi$, conforme mostra a Figura 1.8*d*. A distância entre as duas superfícies esféricas de raios r e $r + dr$ é dr; a distância entre os dois cones cujos ângulos geradores são θ e $\theta + d\theta$ é $r\,d\theta$, e a distância entre os dois planos radiais nos ângulos ϕ e $\phi + d\phi$ é definida como $r \operatorname{sen}\theta\, d\theta$, após alguns momentos de raciocínio trigonométrico. As superfícies possuem áreas de $r\,dr\,d\theta$, $r \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\phi$ e $r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi$. O volume é igual a $r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$.

A transformação de escalares do sistema de coordenadas cartesianas para esféricas é fácil de fazer. Se utilizar a Figura 1.8*a* para relacionar os dois conjuntos de variáveis:

$$
\begin{aligned}
x &= r \operatorname{sen}\theta \cos\phi \\
y &= r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \\
z &= r \cos\theta
\end{aligned}
\tag{15}
$$

A transformação na direção inversa é obtida com o auxílio de

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} && (r \geq 0) \\
\theta &= \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} && (0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ) \\
\phi &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

A variável r para o raio é sempre não negativa, e θ é restrito à faixa de variação de 0° a 180°, inclusive. Os ângulos são colocados nos quadrantes apropriados, observando os sinais de x, y e z.

A transformação de vetores requer a determinação dos produtos dos vetores unitários em coordenadas cartesianas e esféricas. Podemos calcular esses produtos com o auxílio da Figura 1.8*c* e um pouco de trigonometria. Uma vez que o produto escalar de qualquer vetor unitário esférico com qualquer vetor unitário cartesiano é o componente do vetor esférico na direção do vetor cartesiano, os produtos escalares com $\mathbf{a}_z$ são calculados como

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r &= \cos\theta \\
\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\theta &= -\operatorname{sen}\theta \\
\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\phi &= 0
\end{aligned}
$$

Os produtos escalares envolvendo $\mathbf{a}_x$ e $\mathbf{a}_y$ requerem primeiro a projeção do vetor unitário esférico no plano xy e depois a projeção no eixo desejado. Por exemplo,

Tabela 1.2 Produtos escalares de vetores unitários nos sistemas de coordenadas cartesianas e esféricas

	$\mathbf{a}_r$	$\mathbf{a}_\theta$	$\mathbf{a}_\phi$
$\mathbf{a}_x \cdot$	$\text{sen}\,\theta \cos\phi$	$\cos\theta\cos\phi$	$-\text{sen}\,\phi$
$\mathbf{a}_y \cdot$	$\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi$	$\cos\theta\,\text{sen}\,\phi$	$\cos\phi$
$\mathbf{a}_z \cdot$	$\cos\theta$	$-\text{sen}\,\theta$	0

$\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_x$ é obtido pela projeção de $\mathbf{a}_r$ no plano xy, resultando em sen θ; depois, projeta--se sen θ no eixo x, o que leva a sen θ cos ϕ. Os outros produtos escalares são encontrados de maneira similar, e todos são mostrados na Tabela 1.2.

EXEMPLO 1.4

Ilustramos este procedimento de transformação convertendo o campo vetorial $\mathbf{G} = (xz/y)\mathbf{a}_x$ em variáveis e componentes esféricos.

Solução. Encontramos os três componentes esféricos calculando o produto escalar entre $\mathbf{G}$ e os vetores unitários apropriados, e mudamos as variáveis durante este procedimento:

$$G_r = \mathbf{G}\cdot\mathbf{a}_r = \frac{xz}{y}\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_r = \frac{xz}{y}\,\text{sen}\,\theta\cos\phi$$
$$= r\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\frac{\cos^2\phi}{\text{sen}\,\phi}$$
$$G_\theta = \mathbf{G}\cdot\mathbf{a}_\theta = \frac{xz}{y}\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_\theta = \frac{xz}{y}\cos\theta\cos\phi$$
$$= r\cos^2\theta\frac{\cos^2\phi}{\text{sen}\,\phi}$$
$$G_\phi = \mathbf{G}\cdot\mathbf{a}_\phi = \frac{xz}{y}\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_\phi = \frac{xz}{y}(-\text{sen}\,\phi)$$
$$= -r\cos\theta\cos\phi$$

Reunindo esses resultados, temos

$$\mathbf{G} = r\cos\theta\cos\phi\,(\text{sen}\,\theta\,\text{cotg}\,\phi\,\mathbf{a}_r + \cos\theta\,\text{cotg}\,\phi\,\mathbf{a}_\theta - \mathbf{a}_\phi)$$

O Apêndice A descreve o sistema genérico de coordenadas curvilíneas, no qual os sistemas de coordenadas cartesiana, cilíndrica circular e esférica são casos especiais. Agora seria um bom momento para uma leitura da primeira seção desse apêndice.

EP1.7. Dados dois pontos, $C(-3, 2, 1)$ e $D(r = 5, \theta = 20°, \phi = -70°)$, encontre: (*a*) as coordenadas esféricas de C; (*b*) as coordenadas cartesianas de D; (*c*) a distância entre C e D.

Resp. $C(r = 3{,}74, \theta = 74{,}5°, \phi = 146{,}3°)$; $D(x = 0{,}585, y = -1{,}607, z = 4{,}7)$; 6,29

EP1.8. Transforme os seguintes vetores em coordenadas esféricas nos pontos dados: (*a*) $10\mathbf{a}_x$ em $P(x = -3, y = 2, z = 4)$; (*b*) $10\mathbf{a}_y$ em $Q(\rho = 5, \phi = 30°, z = 4)$; (*c*) $10\mathbf{a}_z$ em $M(r = 4, \theta = 110°, \phi = 120°)$.

Resp. $-5{,}57\mathbf{a}_r - 6{,}18\mathbf{a}_\theta - 5{,}55\mathbf{a}_\phi$; $3{,}90\mathbf{a}_r + 3{,}12\mathbf{a}_\theta + 8{,}66\mathbf{a}_\phi$; $-3{,}42\mathbf{a}_r - 9{,}40\mathbf{a}_\theta$

REFERÊNCIAS

1. Grossman, S.I. *Calculus*. 3. ed. Orlando, Fla.: Academic Press and Harcourt Brace Jovanovich, 1984. Álgebra vetorial e coordenadas cilíndricas e esféricas aparecem no Capítulo 17, e o cálculo vetorial é introduzido no Capítulo 20.
2. Spiegel, M.R. *Vector Analysis*. Schaum Outline Series. New York: McGraw-Hill, 1959. Com diversos exemplos e problemas com respostas.
3. Swokowski, E.W. *Calculus with Analytic Geometry*. 3. ed. Boston: Prindle, Weber, & Schmidt, 1984. Álgebra vetorial e os sistemas de coordenadas cilíndricas e esféricas são discutidos no Capítulo 14, e o cálculo vetorial é abordado no Capítulo 18.
4. Thomas, G.B., Jr., and Finney, R.L. *Calculus and Analytic Geometry*. 6. ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, 1984. Álgebra vetorial e os três sistemas de coordenadas que utilizamos são discutidos no Capítulo 13. Outras operações vetoriais são discutidas nos Capítulos 15 e 17.

WWW Quizzes

PROBLEMAS

1.1 Dados os vetores $\mathbf{M} = -10\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y - 8\mathbf{a}_z$ e $\mathbf{N} = 8\mathbf{a}_x + 7\mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z$, encontre: (*a*) um vetor unitário na direção de $-\mathbf{M} + 2\mathbf{N}$; (*b*) a intensidade de $5\mathbf{a}_x + \mathbf{N} - 3\,\mathbf{M}$; (*c*) $|\mathbf{M}||2\mathbf{N}|(\mathbf{M} + \mathbf{N})$.

1.2 Um vetor **A** se estende da origem até (1, 2, 3), e um vetor **B**, da origem a (2, 3, −2). Encontre: (*a*) o vetor unitário na direção de (**A** − **B**); (*b*) o vetor unitário na direção da linha que se estende da origem ao ponto médio da reta que une as extremidades de **A** e **B**.

1.3 O vetor direcionado da origem ao ponto *A* é dado como (6, −2, −4), e o vetor unitário posicionado na origem com direção ao ponto *B* é (2, −2, 1)/3. Se os pontos *A* e *B* estão afastados por 10 unidades, encontre as coordenadas do ponto *B*.

1.4 Um círculo centrado na origem e com raio de 2 unidades pertence ao plano *xy*. Determine o vetor unitário, em componentes cartesianos, que pertence ao plano *xy*, é tangente ao círculo em $(-\sqrt{3}, 1, 0)$ e está na direção e no sentido dos valores crescentes de *y*.

1.5 Um campo vetorial é especificado como $\mathbf{G} = 24xy\mathbf{a}_x + 12(x^2 + 2)\mathbf{a}_y + 18z^2\mathbf{a}_z$. Dados dois pontos $P(1, 2, -1)$ e $Q(-2, 1, 3)$, encontre: (*a*) **G** em *P*; (*b*) um vetor unitário em *Q*, na direção e no sentido de **G**; (*c*) um vetor unitário direcionado no sentido de *Q* para *P*; (*d*) a equação da superfície na qual $|\mathbf{G}| = 60$.

1.6 Determine o ângulo agudo entre dois vetores $\mathbf{A} = 2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$ e $\mathbf{B} = \mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$ mediante o uso das seguintes definições: (*a*) produto escalar; (*b*) produto vetorial.

1.7 Dado o campo vetorial $\mathbf{E} = 4zy^2 \cos 2x\mathbf{a}_x + 2zy \operatorname{sen} 2x\mathbf{a}_y + y^2 \operatorname{sen} 2x\mathbf{a}_z$ para a região $|x|$, $|y|$ e $|z|$ menores que 2, encontre: (*a*) as superfícies nas quais $E_y = 0$; (*b*) a região na qual $E_y = E_z$; (*c*) a região na qual $\mathbf{E} = 0$.

1.8 Demonstre a ambiguidade que surge quando o produto vetorial é utilizado para se calcular o ângulo entre dois vetores, tentando encontrar o ângulo entre $\mathbf{A} = 3\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$ e $\mathbf{B} = 2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z$. Esta ambiguidade surge quando o produto escalar é usado?

1.9 Um campo é dado por $\mathbf{G} = [25/(x^2 + y^2)](x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y)$. Encontre: (*a*) um vetor unitário na direção de $\mathbf{G}$ em $P(3, 4, -2)$; (*b*) o ângulo entre $\mathbf{G}$ e $\mathbf{a}_x$ em P; (*c*) o valor da seguinte integral dupla no plano $y = 7$:

$$\int_0^4 \int_0^2 \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_y \, dz dx$$

1.10 Expressando diagonais como vetores e utilizando a definição de produto escalar, encontre o menor ângulo entre quaisquer duas diagonais de um cubo, no qual cada diagonal conecta vários vértices diametralmente opostos e passa pelo centro do cubo.

1.11 Dados os pontos $M(0{,}1, -0{,}2, -0{,}1)$, $N(-0{,}2, 0{,}1, 0{,}3)$ e $P(0{,}4, 0, 0{,}1)$, encontre: (*a*) o vetor $\mathbf{R}_{MN}$; (*b*) o produto escalar $\mathbf{R}_{MN} \cdot \mathbf{R}_{MP}$; (*c*) a projeção escalar de $\mathbf{R}_{MN}$ em $\mathbf{R}_{MP}$; (*d*) o ângulo entre $\mathbf{R}_{MN}$ em $\mathbf{R}_{MP}$.

1.12 Escreva uma expressão em componentes cartesianos para o vetor que se estende de (x_1, y_1, z_1) até (x_2, y_2, z_2) e determine a intensidade deste vetor.

1.13 Encontre: (*a*) o componente vetorial de $\mathbf{F} = 10\mathbf{a}_x - 6\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$ que é paralelo a $\mathbf{G} = 0{,}1\mathbf{a}_x + 0{,}2\mathbf{a}_y + 0{,}3\mathbf{a}_z$; (*b*) o componente vetorial de $\mathbf{F}$ que é perpendicular a $\mathbf{G}$; (*c*) o componente vetorial de $\mathbf{G}$ que é perpendicular a $\mathbf{F}$.

1.14 Sabe-se que $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = 0$, e que os três vetores representam segmentos de linha e se estendem de uma origem comum. Estes três vetores devem ser coplanares? Se $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D} = 0$, os quatro vetores são coplanares?

1.15 Três vetores que partem da origem são dados como $\mathbf{r}_1 = (7, 3, -2)$, $\mathbf{r}_2 = (-2, 7, -3)$ e $\mathbf{r}_3 = (0, 2, 3)$. Encontre: (*a*) um vetor unitário perpendicular a ambos os vetores $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$; (*b*) um vetor unitário perpendicular aos vetores $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ e $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3$; (*c*) a área do triângulo definido por $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$; (*d*) a área do triângulo definido pelas extremidades de $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ e $\mathbf{r}_3$.

1.16 Se $\mathbf{A}$ representa um vetor de comprimento unitário direcionado para o leste, $\mathbf{B}$ representa um vetor de intensidade igual a três unidades direcionado para o norte e $\mathbf{A} + \mathbf{B} = 2\mathbf{C} - \mathbf{D}$ e $2\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{C} + 2\mathbf{D}$, determine o comprimento e direção de $\mathbf{C}$.

1.17 O ponto $A(-4, 2, 5)$ e os dois vetores $\mathbf{R}_{AM} = (20, 18, -10)$ e $\mathbf{R}_{AN} = (-10, 8, 15)$ definem um triângulo. Encontre: (*a*) um vetor unitário perpendicular

ao triângulo; (*b*) um vetor unitário no plano do triângulo e perpendicular a $\mathbf{R}_{AN}$; (*c*) um vetor unitário no plano do triângulo que divide o ângulo interior de A em duas partes iguais.

1.18 Um campo vetorial é dado como $\mathbf{G} = (y + 1)\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y$. (*a*) Determine $\mathbf{G}$ no ponto (3, −2, 4); (*b*) obtenha um vetor unitário que define a direção de $\mathbf{G}$ em (3, − 2, 4).

1.19 (*a*) Expresse o campo $\mathbf{D} = (x^2 + y^2)^{-1}(x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y)$ em componentes e variáveis cilíndricas. (*b*) Calcule $\mathbf{D}$ no ponto onde $\rho = 2$, $\phi = 0{,}2\,\pi$ e $z = 5$, expressando o resultado em componentes cilíndricos e cartesianos.

1.20 Se os três lados de um triângulo são representados pelos vetores **A**, **B** e **C**, todos no sentido anti-horário, mostre que $|\mathbf{C}|^2 = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B})$ e expanda o produto para obter a lei dos cossenos.

1.21 Expresse em componentes cilíndricos: (*a*) o vetor de $C(3, 2, -7)$ a $D(-1, -4, 2)$; (*b*) um vetor unitário em D direcionado no sentido de C; (*c*) um vetor unitário em D direcionado no sentido da origem.

1.22 Uma esfera de raio a, centrada na origem, gira em torno do eixo z em uma velocidade angular Ω rad/s. A direção de rotação é horária quando se olha na direção positiva do eixo z. (*a*) Utilizando componentes esféricos, escreva uma expressão para o campo de velocidade **v**, que fornece a velocidade tangencial em qualquer ponto dentro da esfera; (*b*) converta para componentes cartesianos.

1.23 As superfícies $\rho = 3$, $\rho = 5$, $\phi = 100°$, $\phi = 130°$, $z = 3$ e $z = 4{,}5$ definem uma superfície fechada. Encontre: (*a*) o volume delimitado por essa superfície fechada; (*b*) a área total da superfície fechada; (*c*) o comprimento total das doze arestas da superfície; (*d*) o comprimento da linha reta mais longa que se encontra totalmente dentro do volume.

1.24 Dois vetores unitários, $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$, repousam no plano xy e passam pela origem. Eles fazem ângulos ϕ_1 e ϕ_2, respectivamente, com o eixo x. (*a*) Expresse cada vetor em componentes cartesianos; (*b*) considere o produto escalar e verifique a identidade trigonométrica $\cos(\phi_1 - \phi_2) = \cos\phi_1 \cos\phi_2 + \text{sen}\,\phi_1\, \text{sen}\,\phi_2$; (*c*) considere o produto vetorial e verifique a identidade trigonométrica $\text{sen}(\phi_2 - \phi_1) = \text{sen}\,\phi_2 \cos\phi_1 - \cos\phi_2\, \text{sen}\,\phi_1$.

1.25 Dado o ponto $P(r = 0{,}8, \theta = 30°, \phi = 45°)$ e $\mathbf{E} = 1/r^2\,[\cos\phi\,\mathbf{a}_r + (\text{sen}\,\phi / \text{sen}\,\theta)\mathbf{a}_\phi]$, encontre: (*a*) **E** em P; (*b*) $|\mathbf{E}|$ em P; (*c*) um vetor unitário na direção de **E** em P.

1.26 Expresse o campo vetorial uniforme $\mathbf{F} = 5\mathbf{a}_x$ em: (*a*) componentes cilíndricos; (*b*) componentes esféricos.

1.27 As superfícies $r = 2$ e 4, $\theta = 30°$ e 50° e $\phi = 20°$ e 60° identificam uma superfície fechada. Encontre: (*a*) o volume dentro dessa superfície fechada; (*b*) a área total da superfície fechada; (*c*) o comprimento total das doze arestas da superfície fechada; (*d*) o comprimento da linha reta mais longa que se encontra totalmente dentro do volume.

1.28 Afirme se $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ ou não ($\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$), e, se não, quais condições devem ser impostas para **A** e **B** se: (*a*) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_x = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_x$; (*b*) $\mathbf{A} \times \mathbf{a}_x = \mathbf{B} \times \mathbf{a}_x$; (*c*) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_x = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_x$ e $\mathbf{A} \times \mathbf{a}_x = \mathbf{B} \times \mathbf{a}_x$; (*d*) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ e $\mathbf{A} \times \mathbf{C} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$, onde **C** é qualquer vetor, exceto $\mathbf{C} = 0$.

1.29 Expresse o vetor unitário $\mathbf{a}_x$ em componentes esféricos no ponto: (*a*) $r = 2$, $\theta = 1$ rad, $\phi = 0{,}8$ rad; (*b*) $x = 3$, $y = 2$, $z = -1$; (*c*) $\rho = 2{,}5$, $\phi = 0{,}7$ rad, $z = 1{,}5$.

1.30 Considere um problema análogo ao de velocidades variáveis de ventos encontrados em aeronaves transcontinentais. Admitimos uma altitude constante, um solo plano e um voo ao longo do eixo x de 0 a 10 unidades, sem componente vertical de velocidade e sem variação da velocidade do vento com o tempo. Admita que $\mathbf{a}_x$ é direcionado para o leste, e $\mathbf{a}_y$, para o norte. Suponha que a velocidade do vento na altitude de operação é dada por:

$$\mathbf{v}(x, y) = \frac{(0{,}01x^2 - 0{,}08x + 0{,}66)\mathbf{a}_x - (0{,}05x - 0{,}4)\mathbf{a}_y}{1 + 0{,}5y^2}$$

Determine a localização e a intensidade: (*a*) da máxima velocidade do vento na cauda; (*b*) da máxima velocidade do vento na dianteira; (*c*) da máxima velocidade do vento na lateral; (*d*) ventos na cauda mais favoráveis estariam disponíveis em alguma outra altitude? Se sim, qual?

2

Lei de Coulomb e Intensidade de Campo Elétrico

Agora que formulamos a linguagem de análise vetorial no primeiro capítulo, vamos estabelecer e descrever alguns princípios básicos de eletricidade. Neste capítulo, introduziremos a lei da Força Eletrostática de Coulomb e, então, formularemos esta lei de forma geral utilizando a teoria de campo. As ferramentas que desenvolveremos podem ser usadas para resolver quaisquer problemas em que o objetivo seja avaliar forças entre cargas elétricas ou determinar o campo elétrico associado com qualquer distribuição de carga. Inicialmente, restringiremos o estudo aos campos no *vácuo* ou *espaço livre*. Este estudo é aplicável aos seguintes meios: ar e outros gases. Materiais adicionais são introduzidos nos Capítulos 5 e 6 e campos variáveis no tempo são abordados no Capítulo 9. ■

2.1 LEI EXPERIMENTAL DE COULOMB

Documentos de pelo menos 600 a.C. mostram evidências de conhecimento sobre a eletricidade estática. Os gregos foram responsáveis pelo termo *eletricidade*, derivado de sua palavra para âmbar, e passaram muitas horas de lazer esfregando um pequeno pedaço de âmbar nas suas roupas e observando como ele atraía pedaços de penugem e similares depois dessa fricção. Entretanto, seus principais interesses repousavam em filosofia e lógica, e não em ciência experimental, – e isso foi muitos séculos antes que o efeito de atração tivesse sido considerado alguma coisa diferente de mágica ou "força vital".

Dr. Gilbert, físico de Sua Majestade a Rainha da Inglaterra, foi o primeiro a fazer algum trabalho realmente experimental abordando esse efeito e, em 1600, estabeleceu que o vidro, o enxofre, o âmbar e outros materiais que ele listou "não apenas atraíam para si próprios a palha, mas também todos os metais, madeira, folhas, pedra, terra, e até água e óleo".

Pouco tempo depois, um oficial da Engenharia do Exército Francês, Coronel Charles Coulomb, executou uma série elaborada de experimentos utilizando uma balança de torção sensível, (inventada por ele mesmo), para determinar quantitativamente a força exercida entre dois objetos, cada um com uma carga estática de eletri-

cidade. O resultado publicado possui grande similaridade com a lei gravitacional de Newton (descoberta cerca de cem anos antes). Coulomb estabeleceu que a força entre dois objetos muito pequenos, separados pelo vácuo ou espaço livre por uma distância grande se comparada com seus tamanhos, é proporcional à carga de cada um deles e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os mesmos, ou

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{R^2}$$

onde Q_1 e Q_2 são as quantidades positivas ou negativas de carga, R é a separação e k é uma constante de proporcionalidade. Se o Sistema Internacional de Unidades[1] (SI) for utilizado, Q é medida em coulombs (C), R é medido em metros (m) e a força, em newtons (N). Isso será obtido se a constante de proporcionalidade k for escrita como

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

A nova constante ϵ_0 é chamada de *permissividade do espaço livre* e tem o valor medido em farads por metro (F/m),

$$\epsilon_0 = 8{,}854 \times 10^{-12} \doteq \frac{1}{36\pi} 10^{-9}\ \text{F/m} \tag{1}$$

A grandeza ϵ_0 não é adimensional, já que a lei de Coulomb mostra que ela tem a unidade $\text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$. Vamos, mais tarde, definir o farad e mostrar que ele tem as dimensões $\text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}$. Antecipamos essa definição utilizando a unidade F/m na Equação (1).

A lei de Coulomb é agora

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \tag{2}$$

O coulomb é uma unidade de carga extremamente grande, pois a menor quantidade de carga conhecida é aquela de um elétron (negativa) ou próton (positiva), dada como $1{,}602 \times 10^{-19}$ C em unidades do SI. Com isso, uma carga negativa de um coulomb representa aproximadamente 6×10^{18} elétrons.[2] A lei de Coulomb mostra que a força entre duas cargas de um coulomb cada, separada por um metro, é 9×10^9 N, ou aproximadamente um milhão de toneladas. O elétron possui uma massa, em repouso, de $9{,}109 \times 10^{-31}$ kg e tem um raio da ordem de $3{,}8 \times 10^{-15}$ m. Isso não significa que o elétron possui uma forma esférica, mas serve apenas para descrever o tamanho da região na qual um elétron que se move lentamente tem a maior probabilidade de ser encontrado. Todas as outras partículas carregadas conhecidas, incluindo o próton, possuem massas e raios maiores, e ocupam um volume probabilístico maior que o do elétron.

[1] O Sistema Internacional de Unidades (um sistema mks) é descrito no Apêndice B. Abreviações para as unidades são dadas na Tabela B.1. Conversões para outros sistemas de unidades são dadas na Tabela B.2, enquanto os prefixos designando potências de dez no SI aparecem na Tabela B.3.

[2] A carga e a massa de um elétron, assim como outras constantes físicas, são apresentadas na Tabela C.4 do Apêndice C.

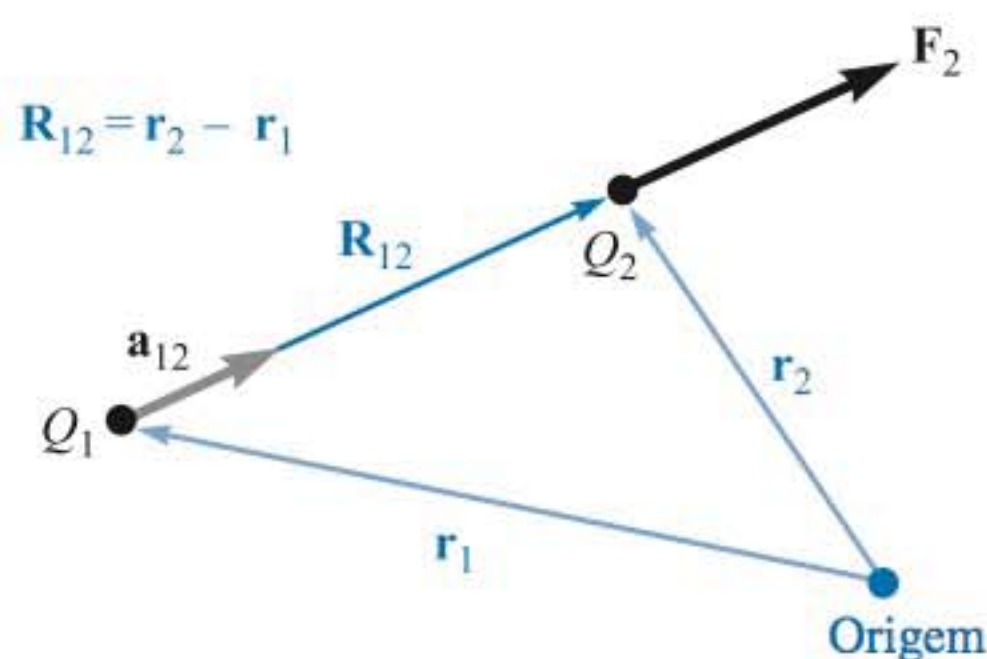



Figura 2.1 Se Q_1 e Q_2 possuem o mesmo sinal, o vetor de força $\mathbf{F}_2$ em Q_2 estará na mesma direção e sentido do vetor $\mathbf{R}_{12}$.

Com o objetivo de escrever a forma vetorial da Equação (2), precisamos estar cientes do aspecto adicional (fornecido também pelo Coronel Coulomb) de que a força atua ao longo da linha que une as duas cargas e é repulsiva, se as cargas possuírem o mesmo sinal, e atrativa, se as cargas forem de sinais opostos. Seja o vetor $\mathbf{r}_1$ que posiciona Q_1 e o vetor $\mathbf{r}_2$ que posiciona Q_2. Então, o vetor $\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ representa o segmento de reta orientado de Q_1 para Q_2, como mostra a Figura 2.1. O vetor $\mathbf{F}_2$ é a força em Q_2 e é mostrado para o caso em que Q_1 e Q_2 possuem o mesmo sinal. A forma vetorial para a lei de Coulomb é

$$\mathbf{F}_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2}\mathbf{a}_{12} \tag{3}$$

onde $\mathbf{a}_{12}$ = um vetor unitário na direção de R_{12}, ou

$$\mathbf{a}_{12} = \frac{\mathbf{R}_{12}}{|\mathbf{R}_{12}|} = \frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \tag{4}$$

EXEMPLO 2.1

Vamos ilustrar o uso da forma vetorial da lei de Coulomb posicionando uma carga $Q_1 = 3 \times 10^{-4}$ C em $M(1, 2, 3)$ e uma carga $Q_2 = -10^{-4}$ C em $N(2, 0, 5)$, no vácuo. Desejamos a força exercida em Q_2 por Q_1.

Solução. Devemos fazer uso das Equações (3) e (4) para obter o vetor de força. O vetor $\mathbf{R}_{12}$ é

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (2-1)\mathbf{a}_x + (0-2)\mathbf{a}_y + (5-3)\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$$

o que leva a $|\mathbf{R}_{12}| = 3$ e ao vetor unitário, $\mathbf{a}_{12} = \frac{1}{3}(\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z)$. Por isso,

$$\mathbf{F}_2 = \frac{3 \times 10^{-4}(-10^{-4})}{4\pi(1/36\pi)10^{-9} \times 3^2}\left(\frac{\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z}{3}\right)$$

$$= -30\left(\frac{\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z}{3}\right) \text{ N}$$

A intensidade da força é de 30 N e a direção e sentido são especificados pelo vetor unitário, o qual foi deixado em parênteses de forma a destacar a intensidade da força. A força em Q_2 pode também ser abordada por meio de três componentes de força,

$$\mathbf{F}_2 = -10\mathbf{a}_x + 20\mathbf{a}_y - 20\mathbf{a}_z$$

A força expressa pela lei de Coulomb é uma força mútua, já que cada uma das duas cargas experimenta uma força de mesma intensidade e direção, apesar de sentidos opostos. Poderíamos ter escrito, da mesma maneira,

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2}\mathbf{a}_{21} = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2}\mathbf{a}_{12} \tag{5}$$

A lei de Coulomb é linear, pois se multiplicarmos Q_1 por um fator n, a força em Q_2 será também multiplicada pelo mesmo fator n. É também verdade que uma força em uma carga na presença de várias outras cargas será a soma das forças naquela carga, em decorrência de cada uma das outras cargas que agem sozinhas.

EP2.1. Uma carga $Q_A = -20\ \mu$C está posicionada em $A(-6, 4, 7)$ e uma carga $Q_B = 50\ \mu$C está em $B(5, 8, -2)$ no espaço livre. Se as distâncias são dadas em metros, encontre: (*a*) $\mathbf{R}_{AB}$; (*b*) R_{AB}. Determine o vetor força exercido em Q_A por Q_B se $\epsilon_0 =$ (*c*) $10^{-9}/(36\pi)$ F/m; (*d*) $8{,}854 \times 10^{-12}$ F/m.

Resp. $11\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y - 9\mathbf{a}_z$ m; 14,76 m; $30{,}76\mathbf{a}_x + 11{,}184\mathbf{a}_y - 25{,}16\mathbf{a}_z$ mN; $30{,}72\mathbf{a}_x + 11{,}169\mathbf{a}_y - 25{,}13\mathbf{a}_z$ mN

2.2 INTENSIDADE DE CAMPO ELÉTRICO

Se agora considerarmos uma carga (como Q_1, por exemplo) fixa em uma posição, e movermos uma segunda carga lentamente em volta, notaremos que existe em todo lugar uma força atuando nessa segunda carga. Em outras palavras, essa segunda carga está evidenciando a existência de um *campo* de força associado com a carga Q_1. Chamemos essa segunda carga de carga de teste* Q_t. A força na mesma é dada pela lei de Coulomb,

$$\mathbf{F}_t = \frac{Q_1 Q_t}{4\pi\epsilon_0 R_{1t}^2}\mathbf{a}_{1t}$$

Escrevendo essa força como uma força por unidade de carga, tem-se a *intensidade de campo elétrico***, $\mathbf{E}_1$ surgindo de Q_1:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{F}_t}{Q_t} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{1t}^2}\mathbf{a}_{1t} \tag{6}$$

WWW Interatividade

$\mathbf{E}_1$ é interpretado como o vetor força, tendo Q_1 como fonte, que age sobre uma carga de teste positiva. De forma mais geral, escrevemos a seguinte expressão de definição:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_t}{Q_t} \tag{7}$$

* N. de T.: Também denominada "carga de prova".

** N. de T.: O estudante deve ter cuidado para não confundir o termo "intensidade", aqui utilizado como parte da denominação dada a uma grandeza vetorial, com a situação do capítulo anterior na qual esse mesmo termo foi utilizado para indicar o módulo (valor absoluto) de um vetor qualquer.

na qual $\mathbf{E}$, uma função vetorial, é a intensidade de campo elétrico *avaliado no ponto onde a carga teste está localizada*, que surge de todas as *outras* cargas na vizinhança – isso significa que o campo elétrico gerado pela própria carga teste não está incluído em $\mathbf{E}$.

A unidade de $\mathbf{E}$ corresponde à força por carga (newtons por Coulomb). Novamente, antecipando uma nova grandeza dimensional, o *volt* (V), que tem a unidade de joules por coulomb (J/C), ou newton-metros por coulomb (N · m/C), podemos medir de uma vez a intensidade de campo elétrico nas unidades práticas de volts por metro (V/m).

Agora, vamos dispensar a maioria dos subscritos da Equação (6), reservando-nos o direito de utilizá-los novamente em qualquer momento que possa ocorrer um mal-entendido. O campo elétrico gerado por uma única carga pontual torna-se:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\mathbf{a}_R \tag{8}$$

Devemos nos lembrar de que R é a intensidade do vetor $\mathbf{R}$, o segmento de reta orientado do ponto onde a carga pontual Q está posicionada até o ponto onde $\mathbf{E}$ é desejado, e de que $\mathbf{a}_R$ é o vetor unitário na direção de $\mathbf{R}$.[3]

Vamos arbitrariamente posicionar Q_1 no centro de um sistema de coordenadas esféricas. O vetor unitário $\mathbf{a}_R$, então, se torna o vetor unitário radial $\mathbf{a}_r$, e R é r. Logo:

$$\mathbf{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r \tag{9}$$

O campo possui um componente radial único e a sua relação com a lei do inverso do quadrado é óbvia.

Se considerarmos uma carga que *não* esteja na origem do nosso sistema de coordenadas, o campo não mais possuirá simetria esférica, e aí poderemos utilizar, do mesmo modo, coordenadas cartesianas. Para uma carga Q posicionada no ponto fonte $\mathbf{r}' = x'\mathbf{a}_x + y'\mathbf{a}_y + z'\mathbf{a}_z$, conforme ilustrado na Figura 2.2, encontramos o campo em um ponto genérico $\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$ expressando $\mathbf{R}$ como $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, e então

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{Q(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}$$

$$= \frac{Q[(x-x')\mathbf{a}_x + (y-y')\mathbf{a}_y + (z-z')\mathbf{a}_z]}{4\pi\epsilon_0[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \tag{10}$$

Anteriormente, definimos um campo vetorial como uma função vetorial de um vetor posição, e isso é enfatizado quando simbolizamos $\mathbf{E}$ em uma notação funcional por $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

Como as forças de Coulomb são lineares, a intensidade de campo elétrico que tem como fonte duas cargas pontuais, Q_1 em $\mathbf{r}_1$ e Q_2 em $\mathbf{r}_2$, é a soma das forças sobre Q_t causadas por Q_1 e Q_2 agindo sozinhas, ou

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^2}\mathbf{a}_1 + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|^2}\mathbf{a}_2$$

[3] Pretendemos firmemente evitar confundir r e $\mathbf{a}_r$ com R e $\mathbf{a}_R$. Os dois primeiros se referem especificamente ao sistema de coordenadas esféricas, enquanto R e $\mathbf{a}_R$ não se referem a nenhum sistema de coordenadas – a escolha está ainda disponível para nós.

onde $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ são vetores unitários nas direções e sentidos de $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ e $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)$, respectivamente. Os vetores $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r} - \mathbf{r}_2$, $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ são mostrados na Figura 2.3.

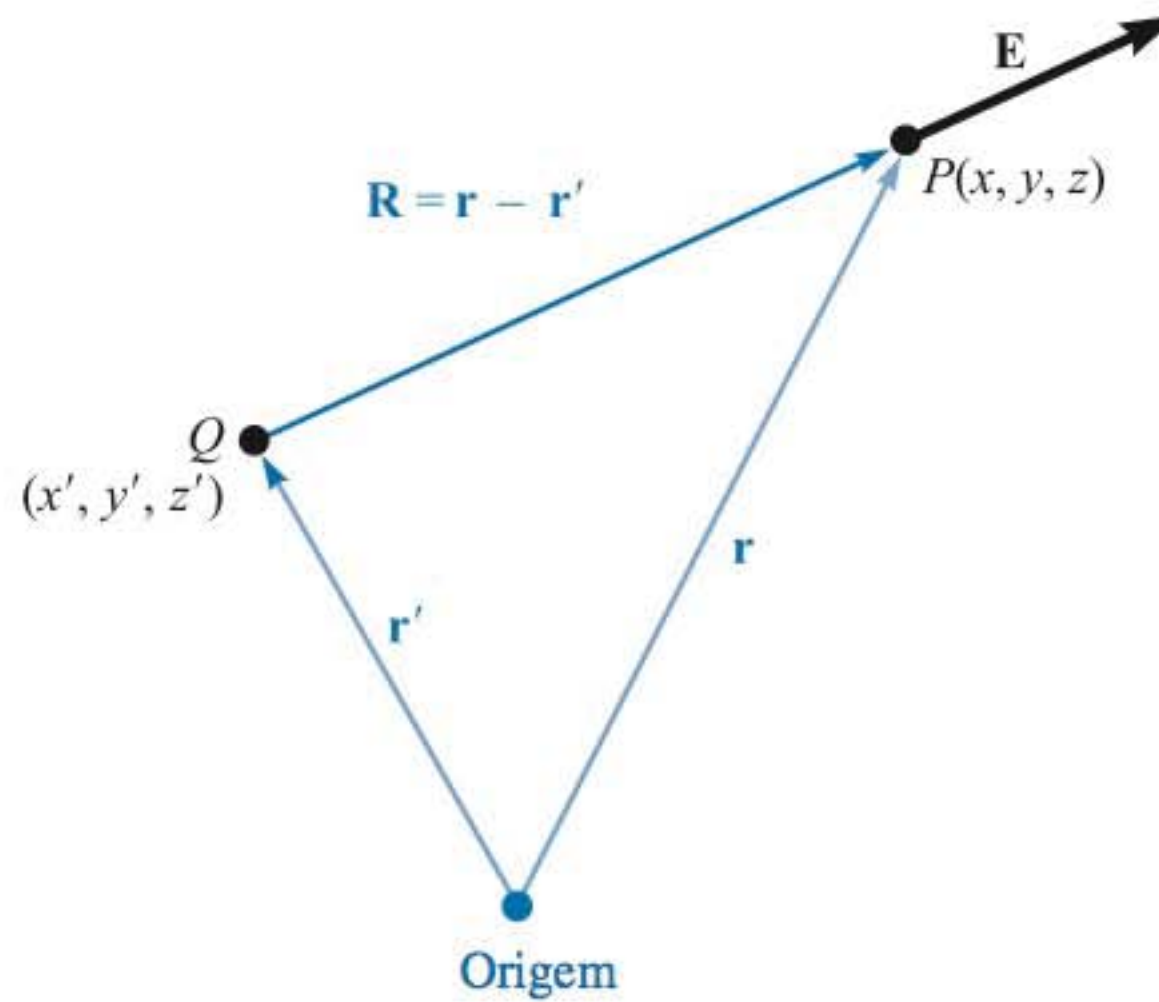



Figura 2.2 O vetor r′ localiza a carga pontual Q, o vetor r identifica o ponto genérico $P(x, y, z)$ no espaço, e o vetor R de Q para $P(x, y, z)$, por sua vez, vale $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

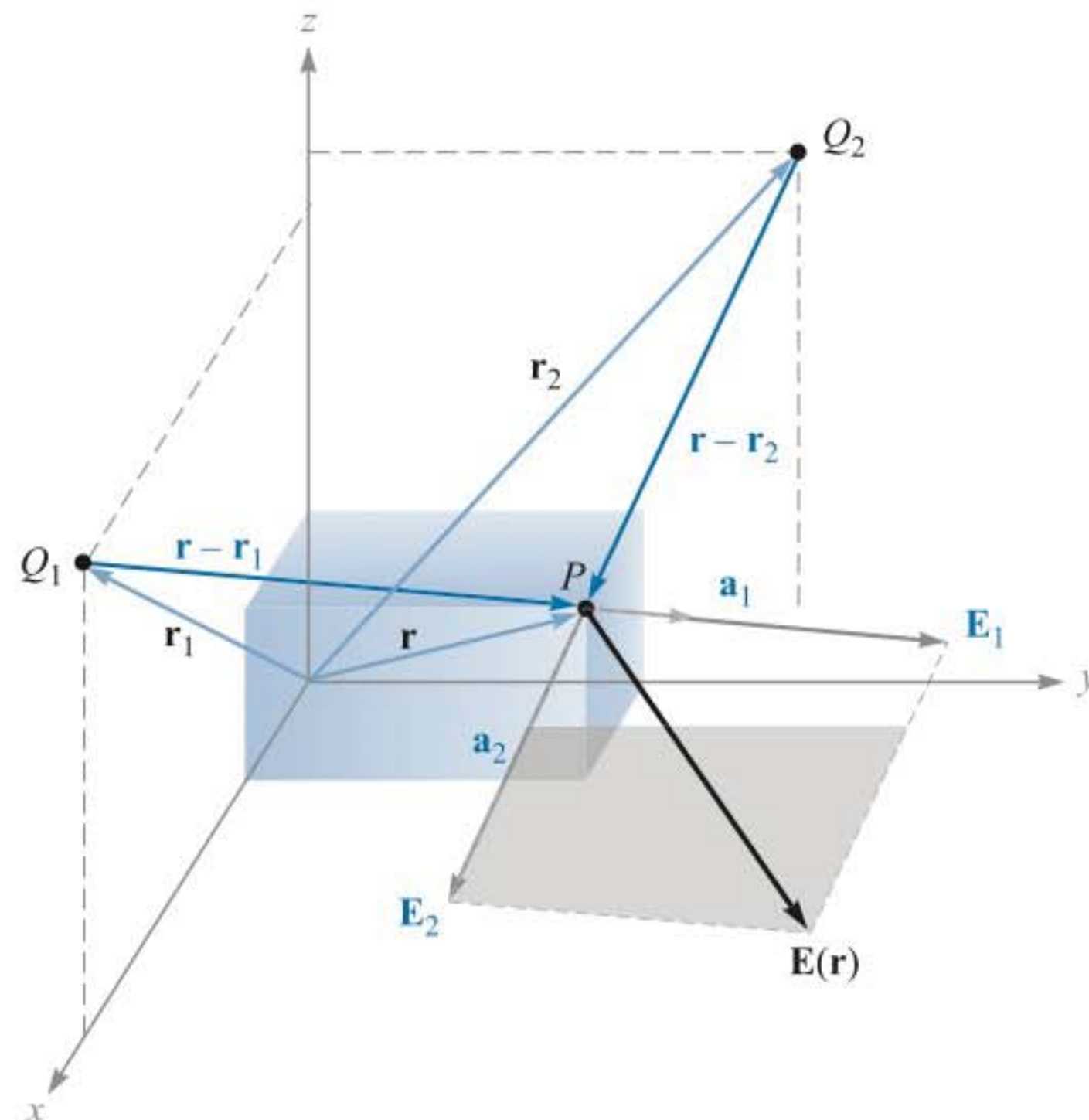



Figura 2.3 A adição vetorial da intensidade de campo elétrico total em P em decorrência de Q_1 e Q_2 é possibilitada pela linearidade da lei de Coulomb.

Se adicionarmos mais cargas em outras posições, o campo decorrente de n cargas pontuais é

Interatividade

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^{n} \frac{Q_m}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_m|^2}\mathbf{a}_m \tag{11}$$

EXEMPLO 2.2

Com o objetivo de ilustrar a aplicação da Equação (11), vamos encontrar **E** em $P(1, 1, 1)$ causado por quatro cargas idênticas de 3 nC (nanocoulombs) posicionadas em $P_1(1, 1, 0)$, $P_2(-1, 1, 0)$, $P_3(-1, -1, 0)$ e $P_4(1, -1, 0)$, conforme mostrado na Figura 2.4.

Solução. Descobrimos que $\mathbf{r} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$, $\mathbf{r}_1 = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y$; portanto, $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = \mathbf{a}_z$. As intensidades são: $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = 1$, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| = \sqrt{5}$, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_3| = 3$ e $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_4| = \sqrt{5}$.

Uma vez que $Q/4\pi\epsilon_0 = 3 \times 10^{-9}/(4\pi \times 8{,}854 \times 10^{-12}) = 26{,}96$ V · m, podemos agora utilizar a Equação (11) para obter

$$\mathbf{E} = 26{,}96\left[\frac{\mathbf{a}_z}{1}\frac{1}{1^2} + \frac{2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z}{\sqrt{5}}\frac{1}{(\sqrt{5})^2} + \frac{2\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z}{3}\frac{1}{3^2} + \frac{2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z}{\sqrt{5}}\frac{1}{(\sqrt{5})^2}\right]$$

ou

$$\mathbf{E} = 6{,}82\mathbf{a}_x + 6{,}82\mathbf{a}_y + 32{,}8\mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

EP2.2. Uma carga de $-0{,}3\ \mu$C está posicionada em $A(25, -30, 15)$ (em cm), e uma segunda carga de $0{,}5\ \mu$C está em $B(-10, 8, 12)$ cm. Calcule **E** em: (*a*) a origem; (*b*) $P(15, 20, 50)$ cm.

Resp. $92{,}3\mathbf{a}_x - 77{,}6\mathbf{a}_y - 94{,}2\mathbf{a}_z$ kV/m; $11{,}9\mathbf{a}_x - 0{,}519\mathbf{a}_y + 12{,}4\mathbf{a}_z$ kV/m

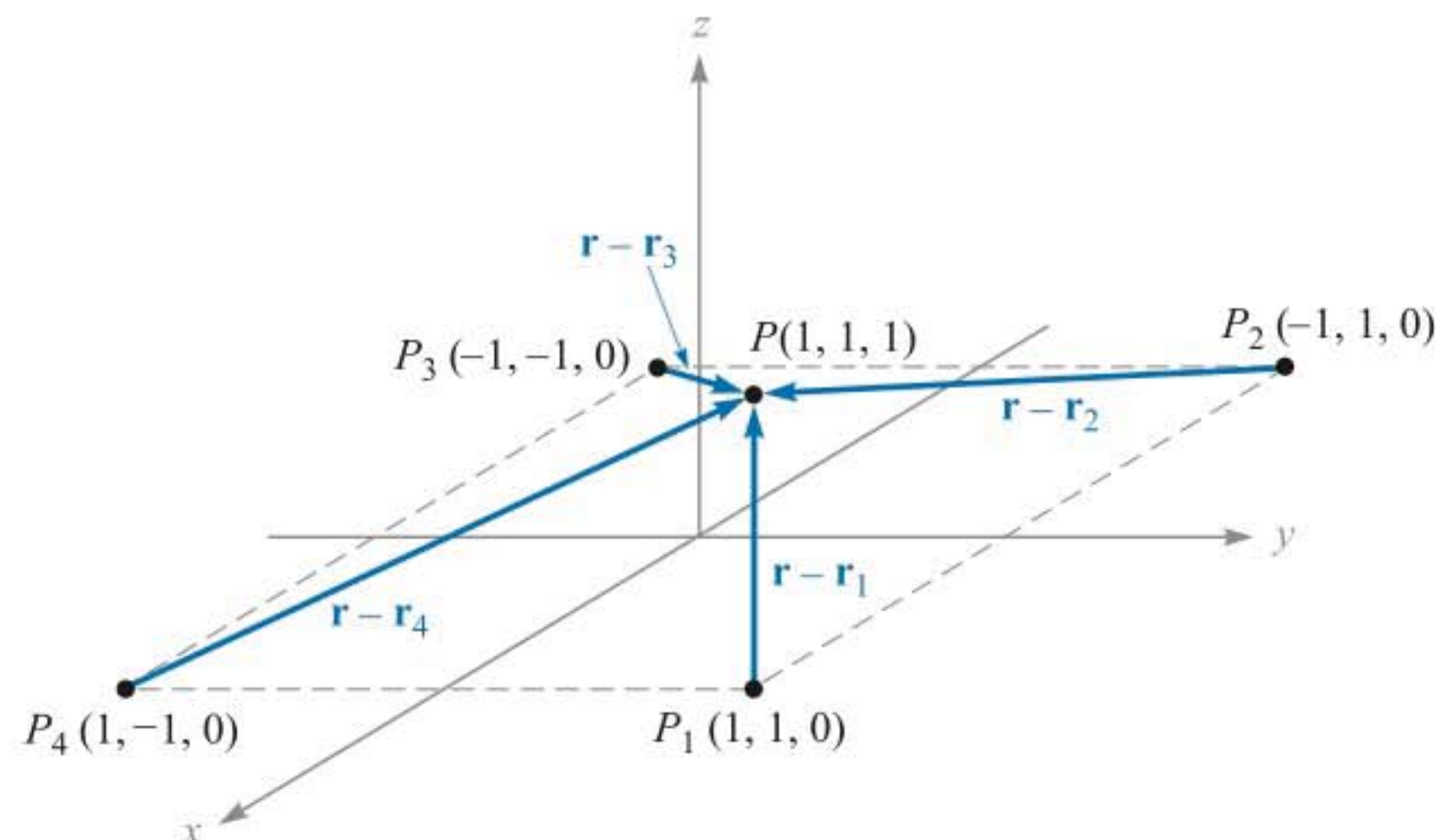



Figura 2.4 Uma distribuição simétrica de quatro cargas pontuais de 3 nC idênticas produzem um campo em P, $\mathbf{E} = 6{,}82\mathbf{a}_x + 6{,}82\mathbf{a}_y + 32{,}8\mathbf{a}_z$ V/m.

EP2.3. Avalie as somas: $(a)\ \sum_{m=0}^{5} \frac{1+(-1)^m}{m^2+1}$; $(b)\ \sum_{m=1}^{4} \frac{(0\ 1)^m+1}{(4+m^2)^{1,5}}$

Resp. 2,52; 0,176

2.3 CAMPO DEVIDO A UMA DISTRIBUIÇÃO VOLUMÉTRICA CONTÍNUA DE CARGAS

WW Ilustração

Se visualizarmos agora uma região do espaço preenchida com um número imenso de cargas separadas por distâncias diminutas, perceberemos que podemos substituir essa distribuição de partículas muito pequenas por uma distribuição contínua e suave descrita por uma *densidade volumétrica de carga*, assim como descrevemos a água com uma densidade correspondente a 1 g/cm^3 (grama por centímetro cúbico) apesar de ela ser constituída por partículas de tamanho atômico e molecular. Podemos fazer isso somente se não estivermos interessados nas pequenas irregularidades (ou ondulações) no campo à medida que nos movemos de elétron para elétron, ou se nos importarmos pouco com o fato de a massa da água na verdade aumentar em quantidades pequenas (mas finitas) à medida que cada nova molécula é adicionada.

Isso, na verdade, não se constitui em limitação alguma, porque os resultados finais que importam, para os engenheiros eletricistas, são quase sempre aqueles que dizem respeito a uma corrente em uma antena receptora, uma tensão em um circuito eletrônico ou uma carga em um capacitor ou, em geral, a algum fenômeno *macroscópico* de larga escala. É muito raro necessitarmos saber sobre uma corrente elétron por elétron.[4]

Denotamos densidade volumétrica de carga por ρ_ν, usando a unidade de coulombs por metro cúbico (C/m^3).

A pequena quantidade de carga ΔQ em um pequeno volume $\Delta\nu$ é

$$\Delta Q = \rho_\nu \Delta \nu \tag{12}$$

e podemos definir ρ_ν matematicamente pela utilização de um processo de limite na Equação (12), de forma que,

$$\rho_\nu = \lim_{\Delta\nu \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta \nu} \tag{13}$$

A carga total dentro de um volume finito é obtida integrando-se por todo esse volume,

$$Q = \int_{\text{vol}} \rho_\nu \, d\nu \tag{14}$$

Apenas um sinal de integração é usualmente indicado, mas a diferencial $d\nu$ significa integração por um volume e, logo, uma integração tripla.

[4] Um estudo do ruído gerado por elétrons em semicondutores e resistores, entretanto, requer um exame da carga mediante análises estatísticas.

EXEMPLO 2.3

Exemplificando a solução de uma integral volumétrica, vamos encontrar a carga total contida em um feixe de elétrons de 2 cm de comprimento, mostrado na Figura 2.5.

Solução. Pela ilustração, vemos que a densidade de carga é

$$\rho_v = -5 \times 10^{-6} e^{-10^5 \rho z} \text{ C/m}^3$$

O volume diferencial em coordenadas cilíndricas é dado na Seção 1.8. Logo,

$$Q = \int_{0,02}^{0,04} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{0,01} -5 \times 10^{-6} e^{-10^5 \rho z} \rho \, d\rho \, d\phi \, dz$$

Integramos primeiro com relação a ϕ, uma vez que isso é muito fácil;

$$Q = \int_{0,02}^{0,04} \int_{0}^{0,01} -10^{-5} \pi e^{-10^5 \rho z} \rho \, d\rho \, dz$$

depois, em relação a z, porque isso simplificará a última integração com relação a ρ,

$$Q = \int_{0}^{0,01} \left(\frac{-10^{-5}\pi}{-10^5 \rho} e^{-10^5 \rho z} \rho \, d\rho \right)_{z=0,02}^{z=0,04}$$

$$= \int_{0}^{0,01} -10^{-5} \pi (e^{-2.000\rho} - e^{-4.000\rho}) d\rho$$

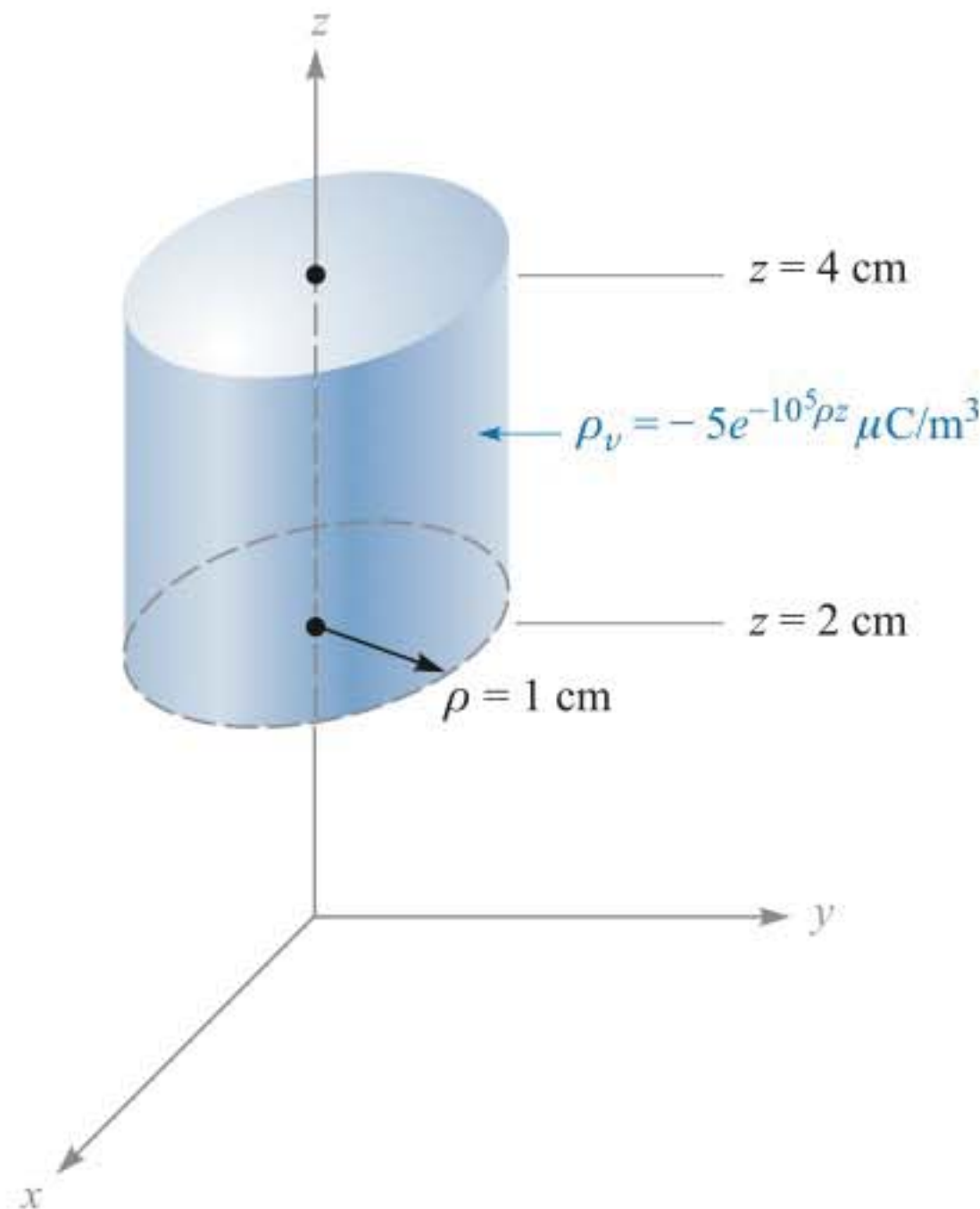



Figura 2.5 A carga total contida dentro do cilindro circular reto pode ser encontrada resolvendo-se $Q = \int_{\text{vol}} \rho_v dv$.

Finalmente,

$$Q = -10^{-10}\pi \left(\frac{e^{-2.000\rho}}{-2.000} - \frac{e^{-4.000\rho}}{-4.000} \right)_0^{0,01}$$

$$Q = -10^{-10}\pi \left(\frac{1}{2.000} - \frac{1}{4.000} \right) = \frac{-\pi}{40} = 0{,}0785 \text{ pC}$$

onde pC indica picocoulombs.

A contribuição incremental para a intensidade de campo elétrico em **r** produzida por uma carga incremental ΔQ em $\mathbf{r}'$ é

$$\Delta\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{\rho_\nu \Delta\nu}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

Se somarmos as contribuições de todas as cargas volumétricas em uma dada região e fizermos o elemento de volume $\Delta\nu$ se aproximar de zero à medida que o número desses elementos se torna infinito, o somatório se torna uma integral,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\text{vol}} \frac{\rho_\nu(\mathbf{r}')\,d\nu'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{15}$$

Essa é novamente uma integral tripla e por isso (exceto no Exercício Proposto 2.4 a seguir) faremos o melhor possível para evitar essa integração.

O significado das várias grandezas sob o sinal de integração na Equação (15) pode necessitar de uma pequena revisão. O vetor **r**, que parte da origem, posiciona o ponto de campo onde **E** está sendo determinado, enquanto o vetor $\mathbf{r}'$ se estende da origem até o ponto da fonte, onde $\rho_\nu(\mathbf{r}')d\nu'$ está posicionado. A distância escalar entre o ponto de fonte e o ponto de campo é $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ e a fração $(\mathbf{r}-\mathbf{r}')/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ é um vetor unitário que aponta do ponto de fonte em direção ao ponto de campo. As variáveis de integração* são x', y' e z', em coordenadas cartesianas.

EP2.4. Calcule a carga total dentro de cada volume indicado: (*a*) $0{,}1 \le |x|, |y|, |z| \le 0{,}2$: $\rho_\nu = \frac{1}{x^3y^3z^3}$; (*b*) $0 \le \rho \le 0{,}1$; $0 \le \phi \le \pi$; $2 \le z \le 4$; $\rho_\nu = \rho^2 z^2$ sen $0{,}6\phi$; (*c*) universo: $\rho_\nu = e^{-2r}/r^2$.

Resp. 0; 1,018 mC; 6,28C

2.4 CAMPO DE UMA LINHA DE CARGAS

Até o presente ponto consideramos dois tipos de distribuição de cargas: a carga pontual e a carga distribuída em um volume com uma densidade ρ_ν C/m^3. Se agora considerarmos uma densidade de carga volumétrica distribuída na forma de um filamento, tal

* N. de T.: É importante realçar, *mais uma vez*, que a integração é realizada na região do espaço onde existe a fonte do campo. Assim, as variáveis de integração na Equação (15) correspondem às que definem as coordenadas da fonte, x', y' e z'.

como em um condutor carregado de raio muito pequeno, torna-se conveniente tratar a carga como uma linha de cargas de densidade ρ_L C/m.

Vamos considerar uma linha reta de cargas que se estende ao longo do eixo z em um sistema de coordenadas cilíndricas, e que vai de $-\infty$ até ∞, conforme mostrado na Figura 2.6. Desejamos a intensidade de campo elétrico **E** em todo e qualquer ponto resultante de uma densidade linear de carga *uniforme* ρ_L.

A simetria deve sempre ser considerada primeiro, com o objetivo de determinar dois fatores específicos: (1) com quais coordenadas o campo *não* varia, e (2) quais componentes do campo *não* estão presentes. As respostas a essas questões nos indicam, então, quais componentes estão presentes e com quais coordenadas eles *variam*.

Referindo-se à Figura 2.6, percebemos que à medida que nos movemos pela linha de cargas, variando ϕ e mantendo ρ e z constantes, a linha de cargas parece ser a mesma vista de qualquer ângulo. Em outras palavras, a simetria azimutal está presente, e nenhum componente de campo deve variar com ϕ.

Novamente, se mantivermos ρ e ϕ constantes, enquanto nos movemos para cima e para baixo ao longo da linha de cargas, mediante mudança em z, a linha de cargas ainda prossegue por uma distância infinita em ambas as direções e o problema não se modifica. Essa é a simetria axial e leva a campos que não são funções de z.

Se mantivermos ϕ e z constantes e variarmos ρ, o problema se modifica e a lei de Coulomb nos leva a esperar que o campo se enfraqueça à medida que ρ aumenta. Logo, por um processo de eliminação, chegamos ao fato de que o campo varia apenas com ρ.

Agora, quais componentes estão presentes? Cada comprimento incremental da linha de cargas age como uma carga pontual e produz uma contribuição incremental para a intensidade de campo elétrico que se direciona "para fora" em relação ao incremento de carga (considerando uma linha de cargas positiva). Nenhum elemento de carga produz um componente em ϕ de intensidade elétrica. E_ϕ é zero. Contudo, cada

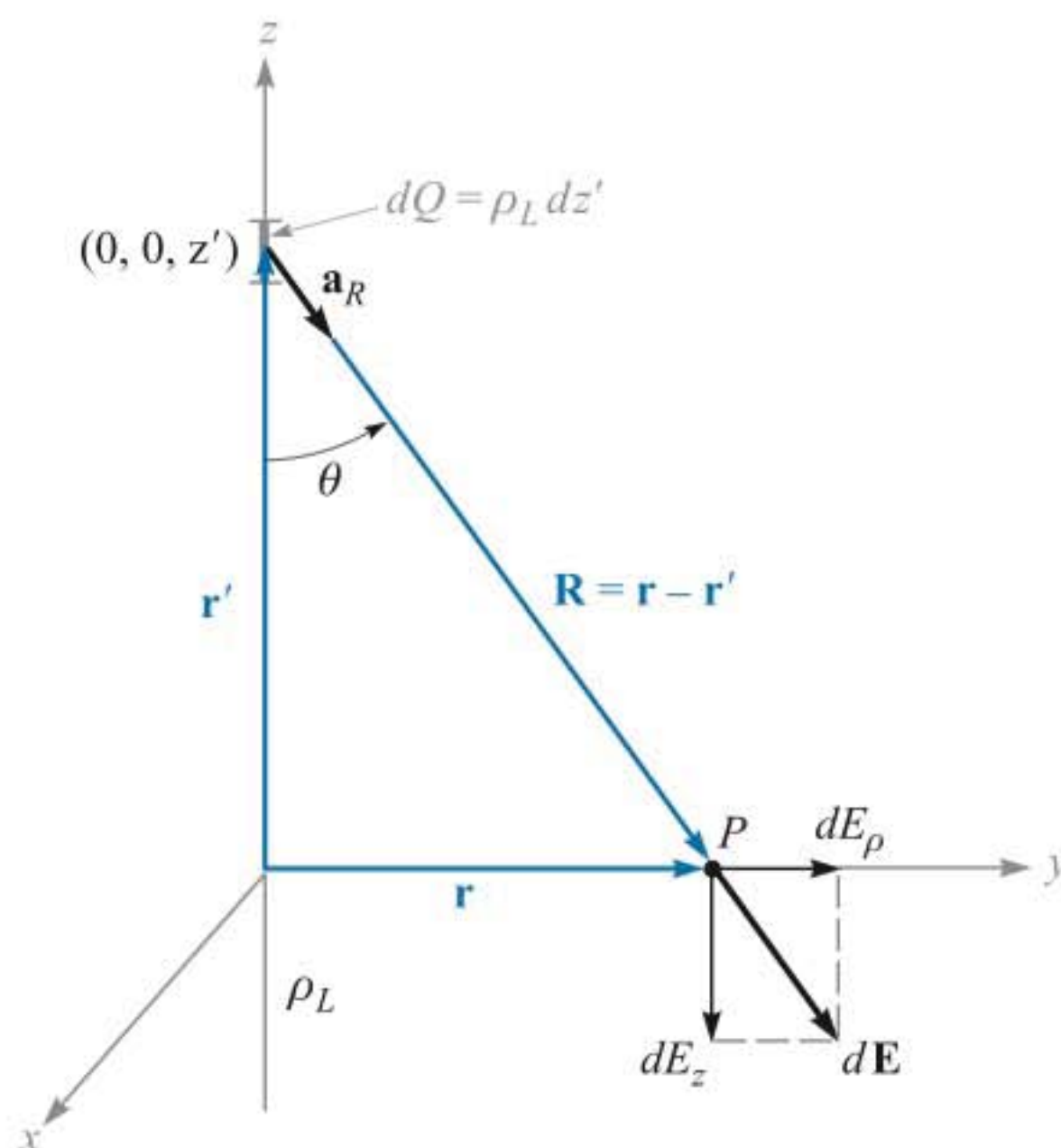



Figura 2.6 A contribuição $d\mathbf{E} = dE_\rho \mathbf{a}_\rho + dE_z \mathbf{a}_z$ para a intensidade de campo elétrico produzido por um elemento de carga $dQ = \rho_L dz'$ posicionado a uma distância z' da origem. A densidade linear de cargas é uniforme e se estende ao longo do eixo z inteiro.

elemento produz um componente em E_ρ e um em E_z, mas a contribuição em E_z de elementos de carga que estão em distâncias iguais acima e abaixo do ponto no qual estamos determinando o campo se cancelará.

Descobrimos, portanto, que temos apenas um componente E_ρ, sendo que esse varia apenas com ρ. Agora devemos encontrar esse componente.

Escolhemos um ponto $P(0, y, 0)$ no eixo y para determinarmos o campo. Esse é um ponto perfeitamente genérico em vista da falta de variação do campo com ϕ e z. Aplicando a Equação (10) para encontrar o campo incremental em P devido à carga incremental $dQ = \rho_L dz'$, temos

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_L dz'(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

onde

$$\mathbf{r} = y\mathbf{a}_y = \rho\mathbf{a}_\rho$$
$$\mathbf{r}' = z'\mathbf{a}_z$$

e

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = \rho\mathbf{a}_\rho - z'\mathbf{a}_z$$

Logo,

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_L dz'(\rho\mathbf{a}_\rho - z'\mathbf{a}_z)}{4\pi\epsilon_0(\rho^2 + z'^2)^{3/2}}$$

Uma vez que apenas o componente em E_ρ está presente, podemos simplificar:

$$dE_\rho = \frac{\rho_L \rho dz'}{4\pi\epsilon_0(\rho^2 + z'^2)^{3/2}}$$

e

$$E_\rho = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_L \rho dz'}{4\pi\epsilon_0(\rho^2 + z'^2)^{3/2}}$$

Integrando com o auxílio de tabelas de integração ou por mudança de variável $z' = \rho \operatorname{cotg} \theta$, temos

$$E_\rho = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0}\rho\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{z'}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}}\right)_{-\infty}^{\infty}$$

e

$$E_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}$$

ou finalmente,

WW Ilustração

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}\mathbf{a}_\rho} \tag{16}$$

Notamos que o campo cai a uma taxa proporcionalmente inversa à distância em relação à linha de cargas quando comparado com a carga pontual, na qual o campo decai com o *quadrado* da distância. Uma distância dez vezes maior de uma carga

pontual leva a um campo com apenas 1% da intensidade inicial, mas uma distância dez vezes maior de uma linha de carga apenas reduz o campo para 10% do que era antes. Uma analogia pode ser feita com uma fonte de iluminação, pois a intensidade da luz a partir de uma fonte de luz pontual também cai com o quadrado da distância em relação à fonte. O campo produzido por uma lâmpada tubular fluorescente infinitamente longa, por exemplo, decai inversamente com a primeira potência da distância radial em relação à lâmpada, e devemos esperar que a intensidade luminosa em volta de uma lâmpada tubular de comprimento finito também obedeça a essa lei na região perto da lâmpada. Entretanto, à medida que nosso ponto se afasta para mais e mais longe da lâmpada tubular de comprimento finito, ela acabará se parecendo com uma fonte pontual, e o campo obedecerá à relação com o inverso do quadrado da distância.

Antes de deixar essa visão introdutória do campo de uma linha infinita de cargas, temos que reconhecer o fato de que nem todas as linhas de cargas estão posicionadas ao longo do eixo z. Como exemplo, vamos considerar uma linha infinita de cargas paralela ao eixo z em $x = 6$, $y = 8$, mostrada na Figura 2.7. Desejamos encontrar $\mathbf{E}$ no ponto de campo genérico $P(x, y, z)$.

Substituímos ρ na Equação (16) pela distância radial entre a linha de cargas e o ponto P, ou seja, $R = \sqrt{(x-6)^2 + (y-8)^2}$, e fazemos $\mathbf{a}_\rho$ ser $\mathbf{a}_R$. Logo,

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\sqrt{(x-6)^2 + (y-8)^2}}\mathbf{a}_R$$

onde

$$\mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} = \frac{(x-6)\mathbf{a}_x + (y-8)\mathbf{a}_y}{\sqrt{(x-6)^2 + (y-8)^2}}$$

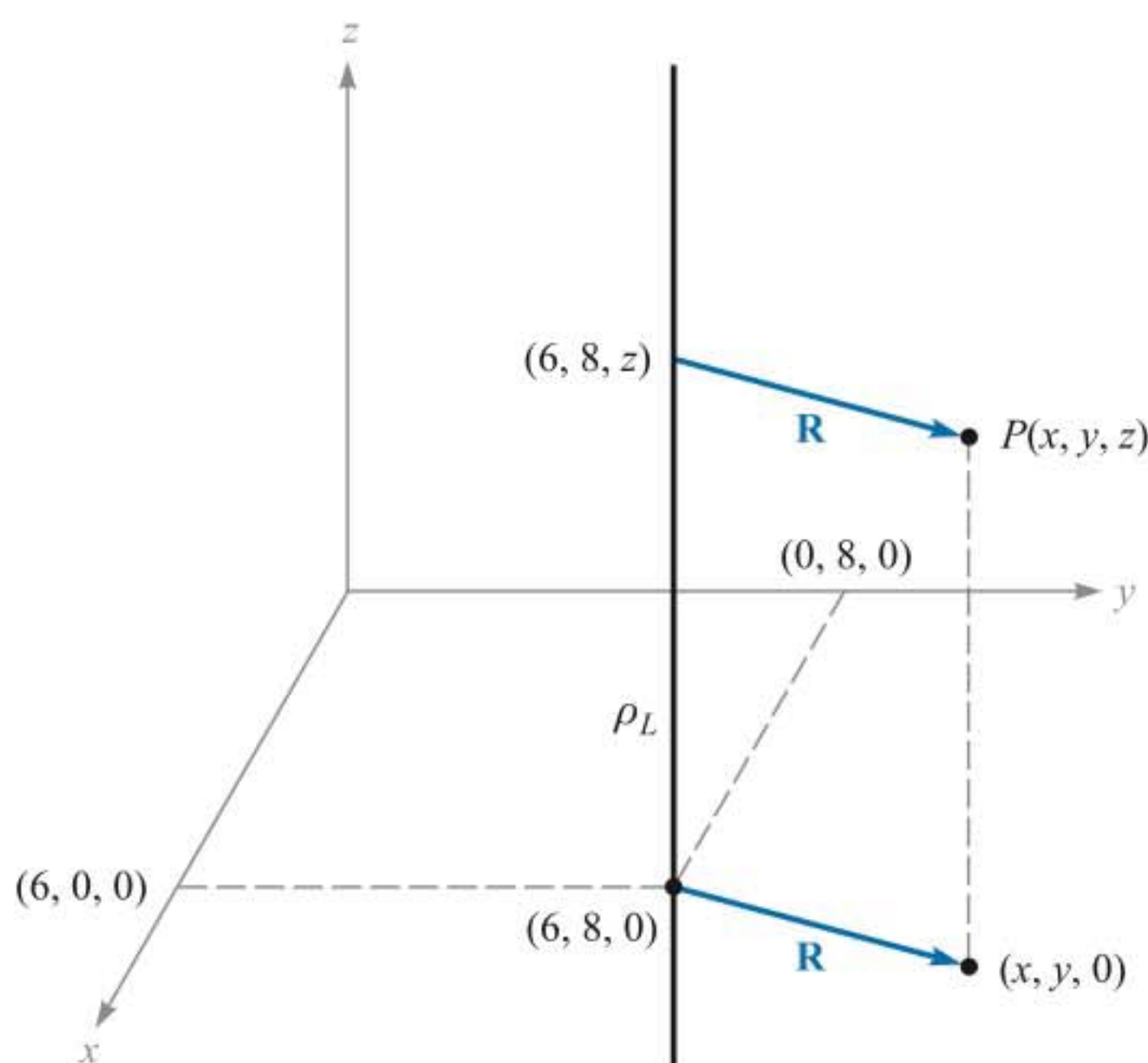



Figura 2.7 Um ponto $P(x, y, z)$ é identificado perto de uma linha infinita e uniforme de cargas posicionada em $x = 6$, $y = 8$.

Logo,

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \frac{(x-6)\mathbf{a}_x + (y-8)\mathbf{a}_y}{(x-6)^2 + (y-8)^2}$$

Novamente notamos que o campo não é uma função de z.

Na Seção 2.6, descreveremos como os campos podem ser esboçados e usaremos o campo de uma linha de cargas como exemplo.

EP2.5. Linhas uniformes e infinitas de cargas de 5 nC/m posicionam-se sobre os eixos (positivo e negativo) x e y no espaço livre. Calcule $\mathbf{E}$ em: (*a*) $P_A(0, 0, 4)$; (*b*) $P_B(0, 3, 4)$.

Resp. $45\mathbf{a}_z$ V/m; $10{,}8\mathbf{a}_y + 36{,}9\mathbf{a}_z$ V/m

2.5 CAMPO DE UMA LÂMINA DE CARGAS

Outra configuração básica de cargas é a lâmina infinita de cargas que tem uma densidade uniforme de ρ_S C/m^2. Tal distribuição de cargas pode ser utilizada frequentemente para aproximar aquela distribuição encontrada nos condutores de uma linha de transmissão do tipo fita ou em um capacitor de placas paralelas. Como veremos no Capítulo 5, cargas estáticas posicionam-se na superfície dos condutores e não no interior dos mesmos. Por essa razão, ρ_S é comumente conhecida como *densidade superficial de carga*. A família de distribuição de cargas está agora completa – pontual, linear, superficial e volumétrica ou Q, ρ_L, ρ_S e ρ_v, respectivamente.

Vamos posicionar uma lâmina de cargas no plano yz e novamente considerar a simetria (Figura 2.8). Vemos primeiramente que o campo não pode variar com y ou com z, e assim temos que os componentes y e z, originados pelos elementos de carga simetricamente posicionados em relação ao ponto no qual desejamos calcular o campo, se cancelam. Logo, apenas E_x está presente, e esse componente é função de x

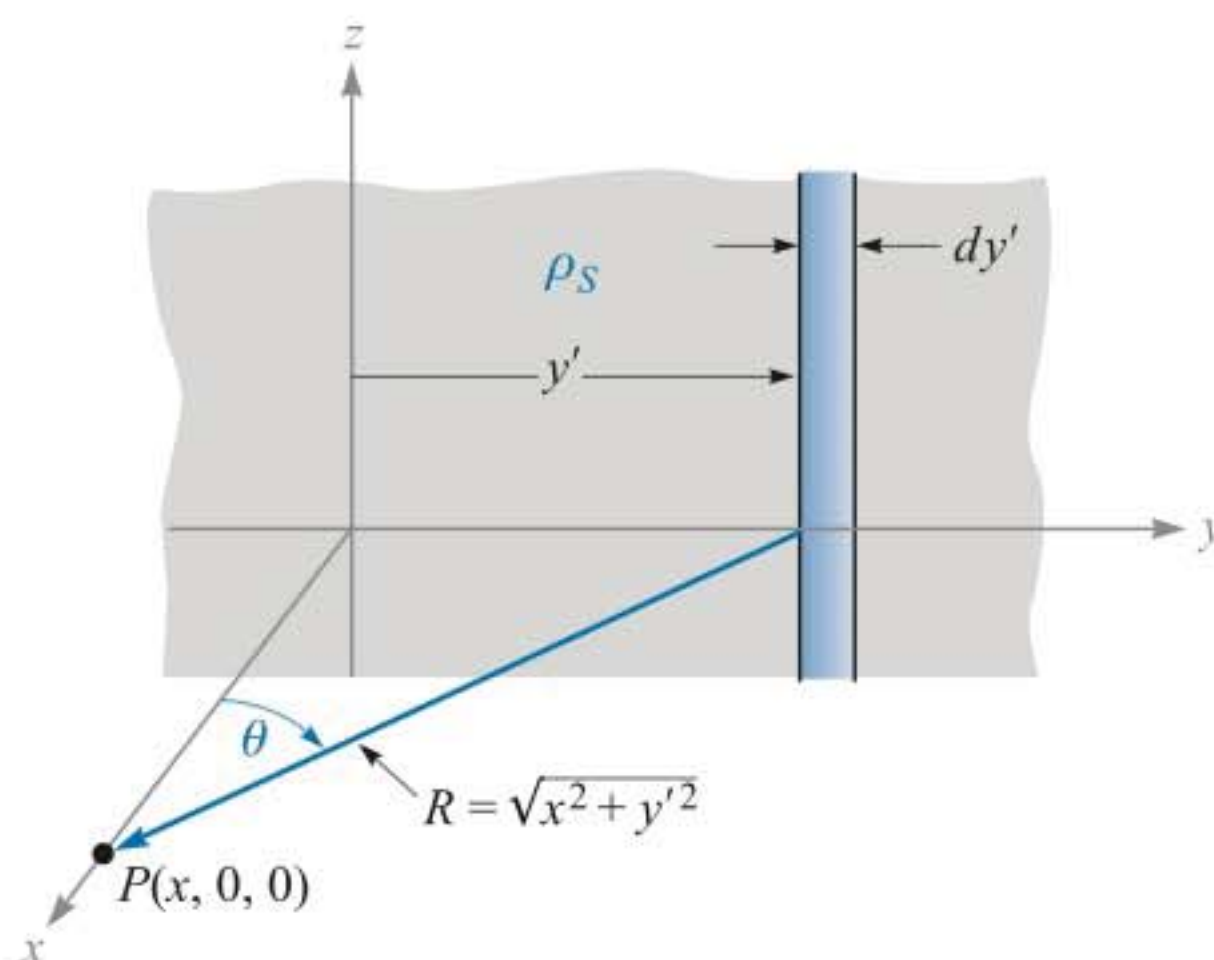



Figura 2.8 Uma lâmina infinita de cargas no plano yz, um ponto genérico P no eixo x e a linha de cargas de largura diferencial utilizada como o elemento na determinação do campo em P por $d\mathbf{E} = \rho_S dy' \mathbf{a}_R/(2\pi\epsilon_0 R)$.

somente. Estamos novamente frente a uma escolha entre vários métodos para avaliar esse componente, mas, dessa vez, utilizaremos apenas um método, deixando os outros como exercícios para uma tranquila tarde de domingo.

Vamos utilizar o campo de uma linha infinita de cargas [Equação (16)] dividindo a lâmina infinita em fitas de largura diferencial. Uma fita desse tipo é mostrada na Figura 2.8. A densidade linear de carga, ou carga por unidade de comprimento, é $\rho_L = \rho_S\, dy'$, e a distância dessa linha de cargas até nosso ponto genérico P no eixo x é $R = \sqrt{x^2 + y'^2}$. A contribuição para E_x em P dessa fita de largura diferencial é:

$$dE_x = \frac{\rho_S\, dy'}{2\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + y'^2}}\cos\theta = \frac{\rho_S}{2\pi\epsilon_0}\frac{x\,dy'}{x^2 + y'^2}$$

Adicionando-se o efeito de todas as fitas,

$$E_x = \frac{\rho_S}{2\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,dy'}{x^2 + y'^2} = \frac{\rho_S}{2\pi\epsilon_0}\operatorname{tg}^{-1}\frac{y'}{x}\bigg]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}$$

Se o ponto P tivesse sido escolhido no lado negativo do eixo x, então

$$E_x = -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}$$

pois o campo está sempre direcionado de forma a sair da carga positiva. Essa dificuldade no sinal é quase sempre superada pela especificação de um vetor unitário $\mathbf{a}_N$, o qual é normal à lâmina e direcionado no sentido para fora, ou para longe dela. Então

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\mathbf{a}_N} \qquad (17)$$

Esse é um resultado surpreendente, pois o campo é constante em intensidade, em direção e em sentido. Ele é tão forte a um milhão de quilômetros da lâmina quanto é junto à superfície. Retornando para nossa analogia com a luz, vemos que uma fonte uniforme de luz no teto de um quarto muito amplo causa tanta iluminação em um metro quadrado no chão quanto em um metro quadrado a poucos centímetros do teto. Se você desejar maior iluminação, não vai adiantar segurar o livro mais perto de uma fonte de luz desse tipo.

Se uma segunda lâmina infinita de cargas possuindo uma densidade de carga *negativa* $-\rho_S$ está posicionada no plano $x = a$, podemos encontrar o campo total somando a contribuição de cada lâmina. Na região $x > a$,

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\mathbf{a}_x \qquad \mathbf{E}_- = -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\mathbf{a}_x \qquad \mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = 0$$

e para $x < 0$,

$$\mathbf{E}_+ = -\frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\mathbf{a}_x \qquad \mathbf{E}_- = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\mathbf{a}_x \qquad \mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = 0$$

e quando $0 < x < a$,

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\mathbf{a}_x \qquad \mathbf{E}_- = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0}\mathbf{a}_x$$

e

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{\rho_S}{\epsilon_0}\mathbf{a}_x \tag{18}$$

Esse é um resultado prático importante, pois corresponde ao campo entre as placas paralelas de um capacitor separadas pelo ar, caso as dimensões lineares das placas sejam muito maiores que a separação entre elas e se também considerarmos um ponto bem afastado das bordas. O campo no lado de fora do capacitor, quando não é zero, conforme encontramos para o caso ideal anterior, geralmente é desprezível.

EP2.6. Três lâminas infinitas e uniformes de cargas estão posicionadas no espaço livre da seguinte maneira: $3\ \text{nC/m}^2$ em $z = -4$, $6\ \text{nC/m}^2$ em $z = 1$ e $-8\ \text{nC/m}^2$ em $z = 4$. Calcule $\mathbf{E}$ no ponto: (*a*) $P_A(2, 5, -5)$; (*b*) $P_B(4, 2, -3)$; (*c*) $P_C(-1, -5, 2)$; (*d*) $P_D(-2, 4, 5)$.

Resp. $-56{,}5\mathbf{a}_z$; $283\mathbf{a}_z$; $961\mathbf{a}_z$; $56{,}5\mathbf{a}_z$, todos em V/m

2.6 LINHAS DE FORÇA E ESBOÇOS DE CAMPOS

WW Ilustração

Temos agora equações vetoriais para a intensidade de campo elétrico resultante de várias configurações de cargas diferentes, e encontramos pouca dificuldade para interpretar a intensidade, a direção e o sentido do campo por meio das equações. Infelizmente, essa simplicidade não pode durar por muito mais tempo, pois já resolvemos a maioria dos casos simples, e nossas novas distribuições de carga devem nos levar a expressões mais complicadas para os campos e também a uma maior dificuldade em visualizá-los pelas equações. Entretanto, é verdade que uma imagem vale mil palavras, se soubermos qual desenho fazer.

Considere o campo em torno de uma linha de cargas,

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}\mathbf{a}_\rho$$

A Figura 2.9*a* mostra uma visão da seção reta da linha de cargas e apresenta o que seria o nosso primeiro esforço de desenhar o campo – curtos segmentos de reta desenhados aqui e ali possuindo comprimentos proporcionais à intensidade de $\mathbf{E}$ e apontando na direção e sentido de $\mathbf{E}$. A figura falha em mostrar a simetria com relação a ϕ, e por isso tentaremos novamente utilizando a Figura 2.9*b* com um posicionamento simétrico dos segmentos de reta. O problema real aparece agora – as retas mais longas têm que ser desenhadas na região mais densa, sendo que isso também ocorreria caso utilizássemos segmentos de reta de mesmo comprimento, mas com uma espessura proporcional a $\mathbf{E}$ (Figura 2.9*c*). Outros esquemas incluem desenhar linhas mais curtas para representar campos mais fortes (o que intrinsecamente leva ao erro) e utilizar intensidades de cores ou cores diferentes para representar campos mais fortes.

Neste momento, vamos nos contentar em mostrar apenas a *direção* e o *sentido* de $\mathbf{E}$, desenhando retas contínuas saindo da carga – que são, em todos os pontos, tangentes a $\mathbf{E}$. A Figura 2.9*d* mostra esse compromisso. Uma distribuição simétrica

de linhas (uma a cada 45°) indica simetria azimutal; as pontas das setas devem ser utilizadas para indicar o sentido.

Essas linhas são geralmente chamadas de *linhas de força*, apesar de outros termos como linhas de fluxo e linhas de direção também serem utilizados. Uma pequena carga de teste positiva posicionada em qualquer ponto nesse campo e livre para se mover aceleraria na direção das linhas de força que passam pelo ponto em questão. Se o campo representasse a velocidade de um líquido ou um gás (que, consequentemente, teria que ter uma fonte em $\rho = 0$), pequenas partículas suspensas no líquido ou no gás seguiriam as linhas de força.

Vamos descobrir mais tarde que um bônus acompanha esse esboço de linhas de força, pois pode-se mostrar que a intensidade do campo é inversamente proporcional ao espaçamento das linhas de força para alguns casos especiais importantes. Quanto mais próximas estão umas das outras, mais forte é o campo. Poderemos, então, encontrar um método mais fácil e mais exato para se fazer esse tipo de esboço de linha de força.

Se tentarmos esboçar o campo da carga pontual, a variação do campo para dentro e para fora da página causaria problemas essencialmente insuperáveis. Por essa razão, esboços são usualmente restritos a campos bidimensionais.

No caso do campo bidimensional, vamos considerar arbitrariamente $E_z = 0$. As linhas de força ficam então confinadas em planos nos quais z é constante e o esboço é o mesmo para qualquer plano desse tipo. Várias linhas de força são mostradas na

(*a*) (*b*)

(*c*) (*d*)

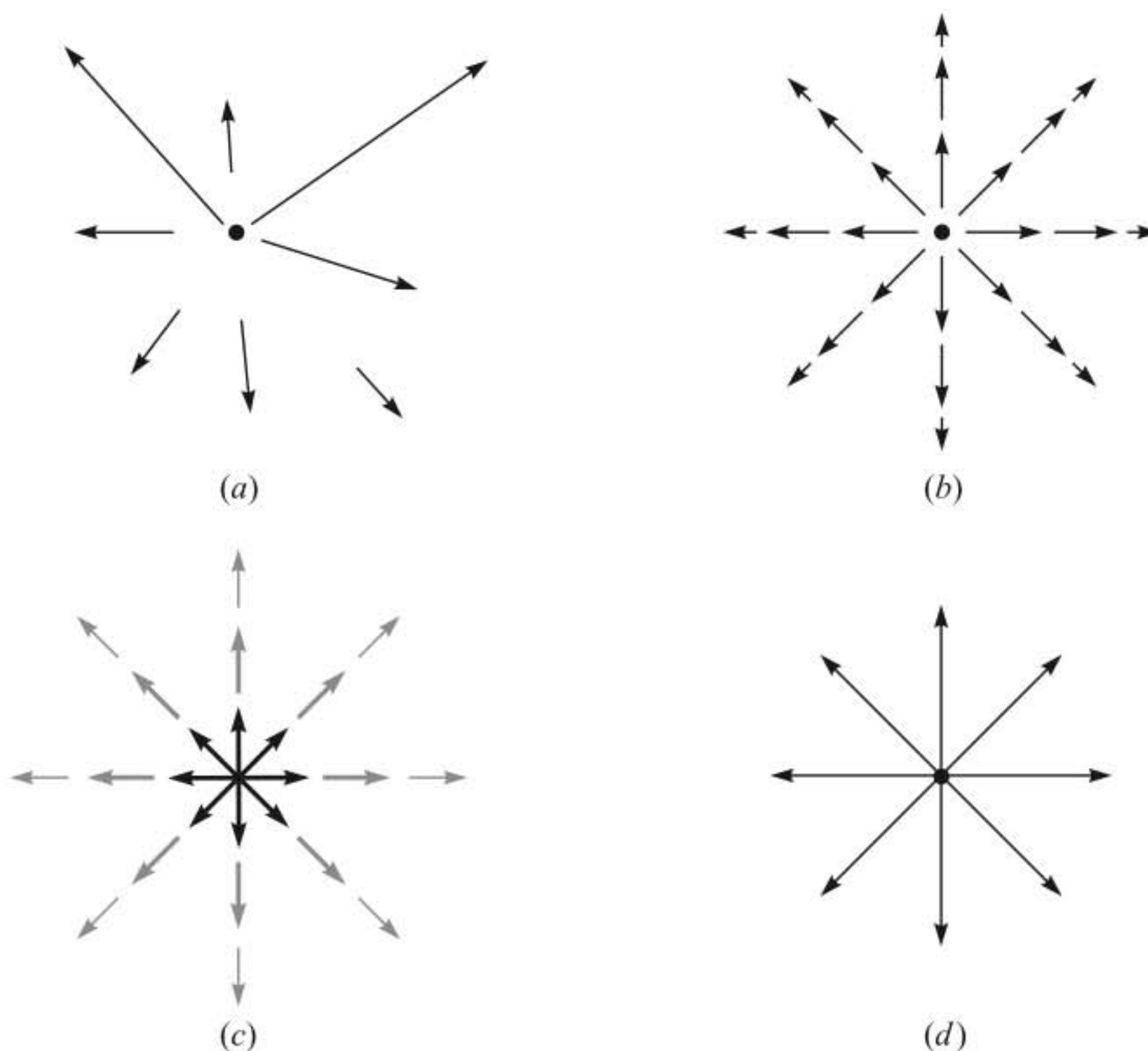



Figura 2.9 (*a*) Um esboço muito pobre, (*b*) e (*c*) dois esboços mais razoáveis, e (*d*) a forma usual de um esboço de linhas de força. Na última forma, as setas mostram a direção e o sentido do campo em todos os pontos ao longo da reta; o espaçamento das retas é inversamente proporcional à intensidade do campo.

Figura 2.10 e os componentes E_x e E_y são indicados em um ponto genérico. É aparente, pela geometria, que

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{dy}{dx} \tag{19}$$

Um conhecimento da forma funcional de E_x e E_y (e a habilidade para resolver a equação diferencial resultante) nos proporciona obter as equações das linhas de força.

Como uma ilustração desse método, considere o campo da linha uniforme de cargas com $\rho_L = 2\pi\epsilon_0$,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\rho}\mathbf{a}_\rho$$

Em coordenadas cartesianas,

$$\mathbf{E} = \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{a}_x + \frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{a}_y$$

Logo, formamos a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x} = \frac{y}{x} \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Com isso,

$$\ln y = \ln x + C_1 \qquad \text{ou} \qquad \ln y = \ln x + \ln C$$

das quais as equações das linhas de força são obtidas,

$$y = Cx$$

Se quisermos encontrar a equação de uma linha de força em particular, uma que passe por $P(-2, 7, 10)$, por exemplo, simplesmente substituímos as coordenadas

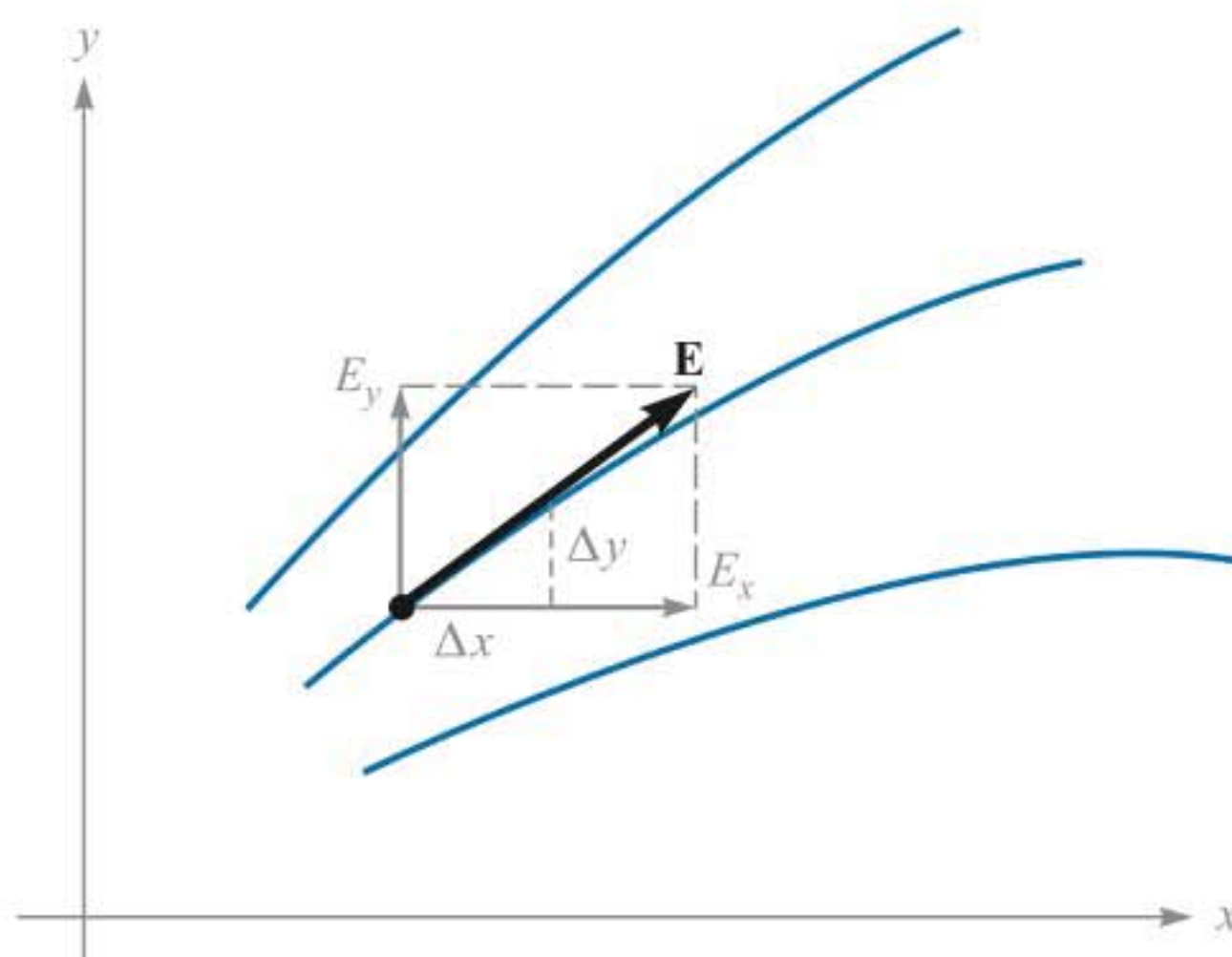



Figura 2.10 A equação de uma linha de força é obtida resolvendo-se a equação diferencial $E_y/E_x = dy/dx$.

desse ponto na equação e avaliamos o valor de C. No caso em questão, $7 = C(-2)$, e $C = -3{,}5$, de forma que $y = -3{,}5x$.

Cada linha de força está associada a um valor específico de C e as linhas radiais mostradas na Figura 2.9*d* são obtidas quando $C = 0, 1, -1$ e $1/C = 0$.

As equações de linhas de força podem também ser obtidas diretamente em coordenadas cilíndricas ou esféricas. Um exemplo envolvendo coordenadas esféricas será examinado na Seção 4.7.

EP2.7. Encontre a equação da linha de força que passa pelo ponto $P(1, 4, -2)$ no campo $\mathbf{E} = (a)\ \frac{-8x}{y}\mathbf{a}_x + \frac{4x^2}{y^2}\mathbf{a}_y; (b)\ 2e^{5x}[y(5x+1)\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y]$.

Resp. $x^2 + 2y^2 = 33$; $y^2 = 15{,}7 + 0{,}4x - 0{,}08 \ln(5x + 1)$

REFERÊNCIAS

1. Boast, W. B. *Vector Fields*. New York: Harper and Row, 1964. Esse livro contém numerosos exemplos e esboços de campos.
2. Della Torre, E., and Longo, C. L. *The Electromagnetic Field*. Boston: Allyn and Bacon, 1969. Os autores introduzem tudo sobre teoria eletromagnética com um desenvolvimento cuidadoso e rigoroso baseado em uma única lei experimental – a lei de Coulomb. Isso começa no Capítulo 1.
3. Schelkunoff, S. A. *Electromagnetic Fields*. New York: Blaisdell Publishing Company, 1963. Muitos dos aspectos físicos dos campos são discutidos nesse texto sem usar matemática avançada.

PROBLEMAS

2.1 Três cargas pontuais estão posicionadas no plano xy da seguinte forma: 5 nC em $y = 5$ cm, -10 nC em $y = -5$ cm e 15 nC em $x = -5$ cm. Encontre as coordenadas xy de uma quarta carga pontual de 20 nC que produz um campo elétrico nulo na origem.

2.2 Cargas pontuais de 1 nC e -2 nC estão localizadas no espaço livre em (0, 0, 0) e (1, 1, 1), respectivamente. Determine o vetor força que age sobre cada carga.

2.3 Cargas pontuais de 50 nC cada estão posicionadas em $A(1, 0, 0)$, $B(-1, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$ e $D(0, -1, 0)$, no espaço livre. Encontre a força total na carga em A.

2.4 Oito cargas pontuais idênticas de Q C estão posicionadas nos vértices de um cubo cujo lado tem comprimento a, com uma carga na origem e com as três cargas mais próximas em $(a, 0, 0)$, $(0, a, 0)$ e $(0, 0, a)$. Encontre uma expressão para o vetor da força total na carga em $P(a, a, a)$, considerando o espaço livre.

2.5 Seja uma carga pontual $Q_1 = 25$ nC que está posicionada em $P_1(4, -2, 7)$ e uma carga $Q_2 = 60$ nC que está em $P_2(-3, 4, -2)$. (*a*) Se $\epsilon = \epsilon_0$, encontre $\mathbf{E}$ em $P_3(1, 2, 3)$. (*b*) Em qual ponto no eixo y tem-se $E_x = 0$?

2.6 Duas cargas pontuais, de valores iguais a q, estão posicionadas em $z = \pm d/2$. (*a*) Encontre o campo elétrico em qualquer ponto sobre o eixo z; (*b*) encontre o campo elétrico em qualquer ponto sobre o eixo x; (*c*) repita (*a*) e (*b*) se a carga localizada em $z = -d/2$ possuir valor $-q$ em vez de $+q$.

2.7 Uma carga pontual de 2 μC está posicionada em $A(4, 3, 5)$ no espaço livre. Encontre E_ρ, E_ϕ e E_z em $P(8, 12, 2)$.

2.8 Um dispositivo rudimentar para medir cargas é constituído de duas pequenas esferas isolantes de raio a, uma das quais mantém uma posição fixa. A outra pode se mover ao longo do eixo x e está sujeita a uma força restritiva kx, onde k é uma constante de elasticidade de uma mola. As esferas descarregadas estão centradas em $x = 0$ e $x = d$, e a última é fixa. Se às esferas são dadas cargas iguais e de sinais opostos QC, obtenha a expressão pela qual a carga Q possa ser encontrada como uma função de x. Determine a carga máxima que pode ser medida em termos de ϵ_0, k e d, e determine a separação entre as esferas. O que acontecerá se uma carga maior for aplicada?

2.9 Uma carga pontual de 100 nC está posicionada em $A(-1, 1, 3)$, no espaço livre. (*a*) Encontre o lugar geométrico de todos os pontos $P(x, y, z)$ em que $E_x = 500$ V/m. (*b*) Calcule y_1 se $P(-2, y_1, 3)$ faz parte desse lugar geométrico.

2.10 Uma carga de -1 nC está localizada na origem, no espaço livre. Qual carga deve ser inserida em (2, 0, 0) para fazer com que E_x seja zero em (3, 1, 1)?

2.11 Uma carga Q_0 posicionada na origem, no espaço livre, produz um campo para o qual $E_z = 1$ kV/m no ponto $P(-2, 1, -1)$. (*a*) Calcule Q_0. Determine $\mathbf{E}$ em $M(1, 6, 5)$ em (*b*) coordenadas cartesianas; (*c*) coordenadas cilíndricas; (*d*) coordenadas esféricas.

2.12 Elétrons movem-se aleatoriamente em uma certa região do espaço. Durante qualquer intervalo de 1 μs, a probabilidade de encontrar um elétron em uma sub-região de volume 10^{-15} m^3 é 0,27. Qual densidade volumétrica de carga, apropriada para tais durações de tempo, deve estar associada a essa sub-região?

2.13 Uma densidade volumétrica de carga uniforme de 0,2 μC/m^3 está presente em uma casca esférica que se estende de $r = 3$ cm a $r = 5$ cm. Se $\rho_v = 0$ em qualquer outra região, calcule: (*a*) a carga total presente na casca, e (*b*) r_1, se metade da carga total estiver localizada na região 3 cm $< r < r_1$.

2.14 Um feixe de elétrons em determinado tubo de raios catódicos possui simetria cilíndrica, e a densidade de carga é representada por $\rho_v = -0{,}1/(\rho^2 + 10^{-8})$ pC/m^3 para $0 < \rho < 3 \times 10^{-4}$ m e $\rho_v = 0$ para $\rho > 3 \times 10^{-4}$ m. (*a*) Determine a carga total por metro ao longo do comprimento do feixe. (*b*) Se a velocidade do elétron é de 5×10^7 m/s, e com um ampère definido como 1 C/s, encontre a corrente do feixe.

2.15 Um volume esférico que tem raio de 2 μm contém uma densidade volumétrica uniforme de carga 10^5 C/m^3. (*a*) Qual é a carga total interna

ao volume esférico? (*b*) Considere agora que uma grande região contenha uma dessas pequenas esferas em cada vértice de uma estrutura cúbica de 3 mm de lado, e que não existam cargas entre as esferas. Qual é a densidade volumétrica de carga média nessa grande região?

2.16 Dentro de uma região no espaço livre, uma densidade de carga é dada como $\rho_v = \frac{\rho_0 r \cos\theta}{a}$ C/m^3, onde ρ_0 e a são constantes. Calcule a carga total dentro de (*a*) uma esfera $r \leq a$; (*b*) um cone $r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 0{,}1\pi$; (*c*) uma região $r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 0{,}1\pi$, $0 \leq \phi \leq 0{,}2\pi$.

2.17 Uma linha uniforme de cargas de 16 nC/m está posicionada ao longo da reta definida por $y = -2$, $z = 5$. Se $\epsilon = \epsilon_0$: (*a*) Calcule **E** em $P(1, 2, 3)$; (*b*) Calcule **E** no ponto do plano $z = 0$ no qual a direção e o sentido de **E** são dados por $(1/3)\mathbf{a}_y - (2/3)\mathbf{a}_z$.

2.18 (*a*) Determine **E** no plano $z = 0$ que é produzido por uma linha uniforme de carga ρ_L, que se estende ao longo do eixo z na faixa $-L < z < L$ em um sistema de coordenadas cilíndricas. (*b*) Se a linha finita de carga for aproximada por uma linha infinita de carga ($L \to \infty$), qual é o erro percentual em $\mathbf{E}_\rho$ se $\rho = 0{,}5\,L$? (*c*) Repita (*b*) com $\rho = 0{,}1\,L$.

2.19 Uma linha uniforme de cargas de 2 μC/m posiciona-se no eixo z. Calcule **E** em coordenadas cartesianas em $P(1, 2, 3)$ se a carga existir em (*a*) $-\infty < z < \infty$; (*b*) $-4 \leq z \leq 4$.

2.20 Uma linha de carga de densidade uniforme ρ_o C/m e de comprimento l está orientada ao longo do eixo z em $-l/2 < z < l/2$. (*a*) Determine o campo vetorial intensidade de campo elétrico **E** em intensidade, direção e sentido, em qualquer posição ao longo do eixo x. (*b*) Com a linha de carga na posição fornecida, encontre a força que age sobre outra linha de carga idêntica que está orientada ao longo do eixo x em $l/2 < x < 3l/2$.

2.21 Duas linhas uniformes de cargas idênticas, com $\rho_L = 75$ nC/m, localizam-se em $x = 0$, $y = \pm\ 0{,}4$ m, no espaço livre. Qual força por unidade de comprimento cada linha de cargas exerce na outra?

2.22 Duas lâminas uniformes de cargas idênticas com $\rho_s = 100$ nC/m^2 localizam-se em $z = \pm\ 2{,}0$ cm, no espaço livre. Qual força por unidade de área cada lâmina exerce na outra?

2.23 Dada a densidade superficial de cargas, $\rho_s = 2$ μC/m^2, existente na região $\rho < 0{,}2$ m, $z = 0$, calcule **E** em: (*a*) $P_A(\rho = 0, z = 0{,}5)$; (*b*) $P_B(\rho = 0; z = -0{,}5)$. Mostre que: (*c*) o campo ao longo do eixo z reduz àquele de uma lâmina infinita de cargas para pequenos valores de z; (*d*) o campo ao longo do eixo z se reduz àquele de uma carga pontual para grandes valores de z.

2.24 (*a*) Determine o campo elétrico sobre o eixo z produzido por um anel anular de densidade superficial uniforme de carga ρ_s no espaço livre. O anel ocupa a região $z = 0$, $a \leq \rho \leq b$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ em coordenadas cilíndricas; (*b*) Do resultado de (*a*), e tomando os limites apropriados, obtenha o campo de uma lâmina infinita e uniforme de carga.

2.25 Calcule **E** na origem se as seguintes distribuições de cargas estiverem presentes no espaço livre: carga pontual 12 nC, em $P(2, 0, 6)$; densidade linear de cargas uniforme 3 nC/m, em $x = -2$, $y = 3$; densidade superficial de cargas uniforme 0,2 nC/m^2 em $x = 2$.

2.26 Uma carga superficial, dependente da variável radial, está distribuída sobre uma lâmina plana infinita, no plano xy, e é caracterizada em coordenadas cilíndricas por uma densidade superficial $\rho_s = \rho_0 / \rho$, onde ρ_0 é uma constante. Determine o campo elétrico, **E**, em qualquer ponto sobre o eixo z.

2.27 Dado o campo elétrico $\mathbf{E} = (4x - 2y)\mathbf{a}_x - (2x + 4y)\mathbf{a}_y$, calcule: (*a*) a equação da linha de força que passa pelo ponto $P(2, 3, -4)$; (*b*) um vetor unitário que especifique a direção e sentido de **E** em $Q(3, -2, 5)$.

2.28 Um dipolo elétrico (discutido em detalhes na Seção 4.7) consiste em duas cargas pontuais de valores absolutos iguais mas sinais opostos $\pm Q$, separadas por uma distância d. Com as cargas ao longo do eixo z, nas posições $z = \pm d/2$ (com a carga positiva na região positiva do eixo z), o campo elétrico em coordenadas esféricas é dado por $\mathbf{E}(r,\theta) = [Qd/(4\pi\epsilon_0 r^3)]$ $[2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \text{sen}\, \theta \mathbf{a}_\theta]$, onde $r >> d$. Utilizando coordenadas cartesianas, determine expressões para o vetor de força em uma carga pontual de valor q: (*a*) em $(0, 0, z)$; (*b*) em $(0, y, 0)$.

2.29 Se $\mathbf{E} = 20e^{-5y}(\cos 5x\mathbf{a}_x - \text{sen}\, 5x\mathbf{a}_y)$, calcule: (*a*) $|\mathbf{E}|$ em $P(\pi/6, 0{,}1, 2)$; (*b*) um vetor unitário na direção de **E** em P; (*c*) a equação da reta que passa por P e possui a mesma direção de **E**.

2.30 Para campos que não variam com z em coordenadas cilíndricas, as equações das linhas de força são obtidas resolvendo-se a equação diferencial $E_\rho/E_\phi = d\rho/(\rho d\phi)$. Encontre a equação da linha que passa pelo ponto $(2, 30°, 0)$ para o campo $\mathbf{E} = \rho \cos 2\phi \mathbf{a}_\rho - \rho\, \text{sen}\, 2\phi \mathbf{a}_\phi$.

3

Densidade de Fluxo Elétrico, Lei de Gauss e Divergência

Após desenharmos alguns dos campos descritos no capítulo anterior e nos familiarizarmos com o conceito de linhas de força, as quais mostram a direção e o sentido da força em uma carga de teste em todos os pontos, é difícil não atribuir a essas linhas um significado físico e pensar nas mesmas como linhas de *fluxo*. Nenhuma partícula física é projetada radialmente para fora da carga pontual, assim como não existem tentáculos de aço que se estendem para atrair ou repelir uma carga de teste desavisada; porém, assim que as linhas de força são desenhadas no papel, parece existir uma figura mostrando que "algo" está presente.

É muito útil idealizar um *fluxo elétrico* cujas linhas fluem simetricamente a partir de uma carga pontual e que seja coincidente com as linhas de força, visualizando esse fluxo sempre que um campo elétrico estiver presente.

Este capítulo introduz e usa o conceito de fluxo elétrico e densidade de fluxo elétrico para resolver novamente diversos dos problemas apresentados no Capítulo 2. O trabalho aqui se torna muito mais fácil, e isso acontece porque os problemas que vamos resolver possuem simetria extrema. ■

3.1 DENSIDADE DE FLUXO ELÉTRICO

Por volta de 1837, o Diretor da Royal Society em Londres, Michael Faraday, interessou-se muito por campos elétricos estáticos e pelo efeito de vários materiais isolantes nesses campos. Esse problema o incomodara nos dez anos anteriores enquanto ele realizava experiências no seu agora famoso trabalho sobre força eletromotriz induzida, a qual discutiremos no Capítulo 9. Com esse assunto concluído, Faraday construiu um par de esferas metálicas concêntricas, cuja esfera externa consistia de dois hemisférios que podiam ser firmemente fixados um no outro. Ele também preparou cascas de materiais isolantes (ou material dielétrico, ou simplesmente *dielétrico*), que ocupariam todo o volume entre as esferas concêntricas. Faremos uso imediato de seus achados sobre materiais dielétricos, pois restringiremos nossa atenção a campos no espaço livre até o Capítulo 6, no qual veremos que os materiais utilizados por Faraday serão classificados como dielétricos perfeitos.

Seu experimento, então, consistiu nos seguintes passos:

1. Com o equipamento desmontado, forneceu-se à esfera interna uma carga positiva de valor conhecido.
2. Os hemisférios foram então fixados um no outro, envolvendo a esfera interna, com aproximadamente 2 cm de material dielétrico entre os mesmos.
3. Depois disso, a esfera externa foi momentaneamente conectada ao solo e descarregada.
4. Nessa etapa, o espaço externo foi separado cuidadosamente, utilizando-se para isso ferramentas feitas de material isolante, com o objetivo de não influenciar a carga induzida no mesmo, e aí finalmente a carga negativa induzida em cada hemisfério foi medida.

Faraday descobriu que a carga total na esfera externa era igual, em *módulo*, à carga original colocada na esfera interna, e que isso era sempre verdade independentemente do material dielétrico que separava as duas esferas. Ele concluiu que havia algum tipo de "deslocamento" da esfera interna para a esfera externa, a qual era independente do meio, e nós agora nos referimos a esse fluxo como *deslocamento*, *fluxo de deslocamento* ou, simplesmente, *fluxo elétrico**.

Obviamente, o experimento de Faraday também mostrou que uma carga positiva maior na esfera interna induzia, correspondentemente, uma carga negativa maior na esfera externa, levando a uma proporcionalidade direta entre o fluxo elétrico e a carga na esfera interna. A constante de proporcionalidade é dependente do sistema de unidades envolvido, e temos sorte por usar nosso SI de unidades, pois a constante é a unidade. Se o fluxo elétrico é denotado por Ψ (psi) e a carga total na esfera interna por Q, então, pelo experimento de Faraday,

$$\boxed{\Psi = Q}$$

e o fluxo elétrico Ψ é medido em coulombs.

Podemos adquirir mais informação quantitativa considerando uma esfera interna de raio a e uma esfera externa de raio b, com cargas de Q e $-Q$, respectivamente (Figura 3.1). As trajetórias do fluxo elétrico Ψ, que se estendem da esfera interna para a externa, são indicadas pelas linhas de força simetricamente distribuídas, desenhadas radialmente de uma esfera para a outra.

Na superfície da esfera interna, Ψ coulombs de fluxo elétrico são produzidos pela carga $Q\ (= \Psi)$ coulombs distribuída uniformemente por uma superfície que tem área de $4\pi a^2$ m^2. A densidade do fluxo nessa superfície é $\Psi/4\pi a^2$ ou $Q/4\pi a^2$ C/m^2, e essa é uma importante nova grandeza.

À *densidade de fluxo elétrico*, medida em coulombs por metro quadrado (às vezes descrita como "linhas por metro quadrado", pois cada linha é devida a um coulomb), é reservada a letra **D**, que foi originalmente escolhida por causa dos nomes alternativos *densidade de fluxo de deslocamento* ou *densidade de deslocamento*. Contudo, o termo densidade do fluxo elétrico é mais descritivo, e por isso será utilizado aqui constantemente.

* N. de T.: Percebe-se, assim, que fluxo dá uma ideia de "atravessamento".

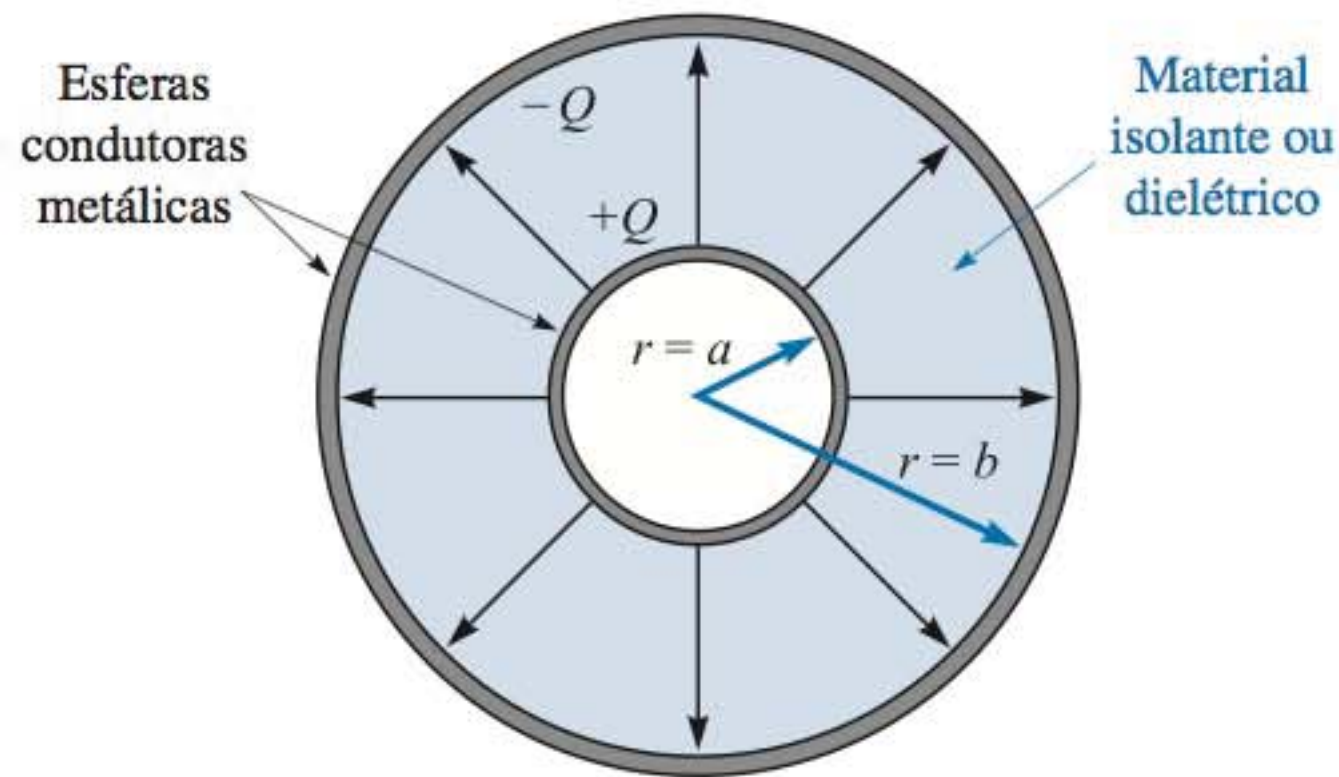



Figura 3.1 O fluxo elétrico na região entre um par de esferas concêntricas carregadas. A intensidade, a direção e o sentido de D não são funções do dielétrico entre as esferas.

A densidade de fluxo elétrico **D** é um campo vetorial e um membro da classe de "densidades de fluxo" de campos vetoriais, oposta à classe de "campos de força", que inclui a intensidade de campo elétrico **E**. A direção e o sentido de **D** em um ponto correspondem à direção e ao sentido das linhas de fluxo naquele ponto, e sua intensidade é dada pelo número de linhas de fluxo que atravessam uma superfície normal às linhas, dividido pela área de superfície.

Referindo-se novamente à Figura 3.1, vemos que a densidade de fluxo elétrico está na direção radial e tem um valor de

$$\mathbf{D}\Big|_{r=a} = \frac{Q}{4\pi a^2}\mathbf{a}_r \qquad \text{(esfera interna)}$$

$$\mathbf{D}\Big|_{r=b} = \frac{Q}{4\pi b^2}\mathbf{a}_r \qquad \text{(esfera externa)}$$

e a uma distância radial r, onde $a \leq r \leq b$,

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{a}_r$$

Se fizermos agora a esfera interna se tornar cada vez menor, enquanto ainda retém uma carga Q, ela se torna uma carga pontual no limite, mas a densidade de fluxo elétrico em um ponto a r metros de distância da carga pontual ainda é dada por

$$\boxed{\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{a}_r} \tag{1}$$

pois Q linhas de fluxo estarão direcionadas simetricamente, saindo do ponto e passando por uma superfície esférica imaginária de área $4\pi r^2$.

Esse resultado deve ser comparado com a Equação (9), Seção 2.2, relativa à intensidade de campo elétrico radial de uma carga pontual no espaço livre,

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r}$$

No espaço livre, portanto,

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad \text{(apenas no espaço livre)} \tag{2}$$

Apesar da Equação (2) ser aplicável apenas para o vácuo, não é restrita somente ao campo de uma carga pontual. Para uma distribuição volumétrica de cargas genérica, no espaço livre,

$$\mathbf{E} = \int_{\text{vol}} \frac{\rho_v dv}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R \quad \text{(apenas no espaço livre)} \tag{3}$$

onde essa relação foi desenvolvida do campo de uma carga pontual única. De uma forma similar, a Equação (1) leva a

$$\mathbf{D} = \int_{\text{vol}} \frac{\rho_v dv}{4\pi R^2} \mathbf{a}_R \tag{4}$$

e a Equação (2) é, portanto, verdadeira para qualquer configuração de cargas no espaço livre. Devemos considerar que a Equação (2) define **D** no espaço livre.

Como uma preparação para o estudo de dielétricos (que veremos mais adiante), seria bom ressaltar agora que, para uma carga pontual imersa em um meio dielétrico ideal infinito, os resultados de Faraday mostram que a Equação (1) é ainda aplicável, e que a Equação (4) também o é. Contudo, a Equação (3) não é aplicável, e isso fará com que a relação entre **D** e **E** seja ligeiramente mais complicada que a Equação (2).

Uma vez que **D** é diretamente proporcional a **E** no espaço livre, não parece ser realmente necessário introduzir um novo símbolo. E isso (entre outras razões) porque **D** está associado com o conceito de fluxo, que é uma ideia nova importante, e também porque os campos **D** que obteremos serão um pouco mais simples que os campos **E** correspondentes, uma vez que ϵ_0 não aparecerá.

EP3.1. Dada uma carga pontual de 60 μC posicionada na origem, calcule o fluxo elétrico total que passa por: (*a*) a porção da esfera $r = 26$ cm limitada por $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ e $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$; (*b*) a superfície fechada definida por $\rho = 26$ cm e $z = \pm 26$ cm; (*c*) o plano $z = 26$ cm.

Resp. 7,5 μC; 60 μC; 30 μC

EP3.2. Calcule **D** em coordenadas cartesianas no ponto $P(2, -3, 6)$ produzido por: (*a*) uma carga pontual $Q_A = 55$ mC em $Q(-2, 3, -6)$; (*b*) uma linha uniforme de cargas $\rho_{LB} = 20$ mC/m sobre o eixo x; (*c*) uma densidade superficial uniforme de cargas $\rho_{SC} = 120\ \mu\text{C/m}^2$ sobre o plano $z = -5$ m.

Resp. $6{,}38\mathbf{a}_x - 9{,}57\mathbf{a}_y + 19{,}14\mathbf{a}_z\ \mu\text{C/m}^2$; $-212\mathbf{a}_y + 424\mathbf{a}_z\ \mu\text{C/m}^2$; $60\mathbf{a}_z\ \mu\text{C/m}^2$

3.2 LEI DE GAUSS

Os resultados dos experimentos de Faraday com as esferas concêntricas poderiam ser resumidos como uma lei experimental segundo a qual o fluxo elétrico que passa por uma superfície esférica imaginária, que se localiza entre as duas esferas condutoras, é igual à carga contida dentro da própria superfície imaginária. Essa carga contida estará distribuída na superfície da esfera interna, ou pode estar concentrada como uma carga pontual no centro da esfera imaginária. Entretanto, como um coulomb de fluxo elétrico é produzido por um coulomb de carga, o condutor interno poderia ser, da mesma maneira, um cubo ou uma chave de metal; a carga induzida total na esfera externa permaneceria sendo a mesma. Certamente, a densidade de fluxo mudaria da sua distribuição simétrica anterior para alguma configuração desconhecida, mas $+Q$ coulombs em qualquer condutor interno produziriam uma carga induzida de $-Q$ coulombs na esfera externa. Dando mais um passo adiante, poderíamos agora substituir os dois hemisférios externos por uma vasilha de sopa vazia (mas completamente fechada). Q coulombs na chave de metal produziriam $\Psi = Q$ linhas de fluxo elétrico e induziriam $-Q$ coulombs na vasilha de estanho.[1]

Essas generalizações do experimento de Faraday levaram ao seguinte enunciado, conhecido como *Lei de Gauss*:

> *O fluxo elétrico que passa por qualquer superfície fechada é igual à carga total que está contida dentro dessa superfície.*

A contribuição de Gauss, um dos maiores matemáticos do mundo já produziu, na verdade não foi a enunciação da lei conforme a conhecemos, mas a elaboração de uma forma matemática para seu enunciado, a qual devemos obter agora.

Vamos imaginar uma distribuição de cargas, mostrada como uma nuvem de cargas pontuais na Figura 3.2, cercada por uma superfície fechada de qualquer formato. A superfície fechada pode ser a superfície de algum material real, mas de forma mais genérica é qualquer superfície fechada que desejarmos visualizar. Se a carga total é Q, então Q coulombs de fluxo elétrico passarão pela superfície circundante. Em todos os pontos na superfície o vetor densidade de fluxo elétrico $\mathbf{D}$ terá algum valor $\mathbf{D}_S$, onde o subscrito S simplesmente nos lembra que $\mathbf{D}$ deve ser calculado na superfície, e $\mathbf{D}_S$, de uma forma geral, variará em intensidade, direção e sentido de um ponto para outro na superfície.

Devemos agora considerar a natureza de um elemento incremental da superfície. Um elemento incremental de área ΔS é quase uma porção de uma superfície plana, e a descrição completa desse elemento de superfície requer não apenas uma definição de sua área ΔS, mas também de sua orientação no espaço. Em outras palavras, o elemento incremental de superfície é uma grandeza vetorial. A única direção que pode ser associada a $\Delta \mathbf{S}$ é a direção da normal ao plano que é tangente à superfície no ponto em questão. Existem, naturalmente, duas normais possíveis, mas tal ambiguidade é eliminada escolhendo-se a normal que está no sentido "para fora", sempre que a superfície for fechada e o termo "para fora" tiver um significado específico.

[1] Se fosse um isolante perfeito, a sopa poderia ainda ser deixada na vasilha, sem nenhuma diferença nos resultados.

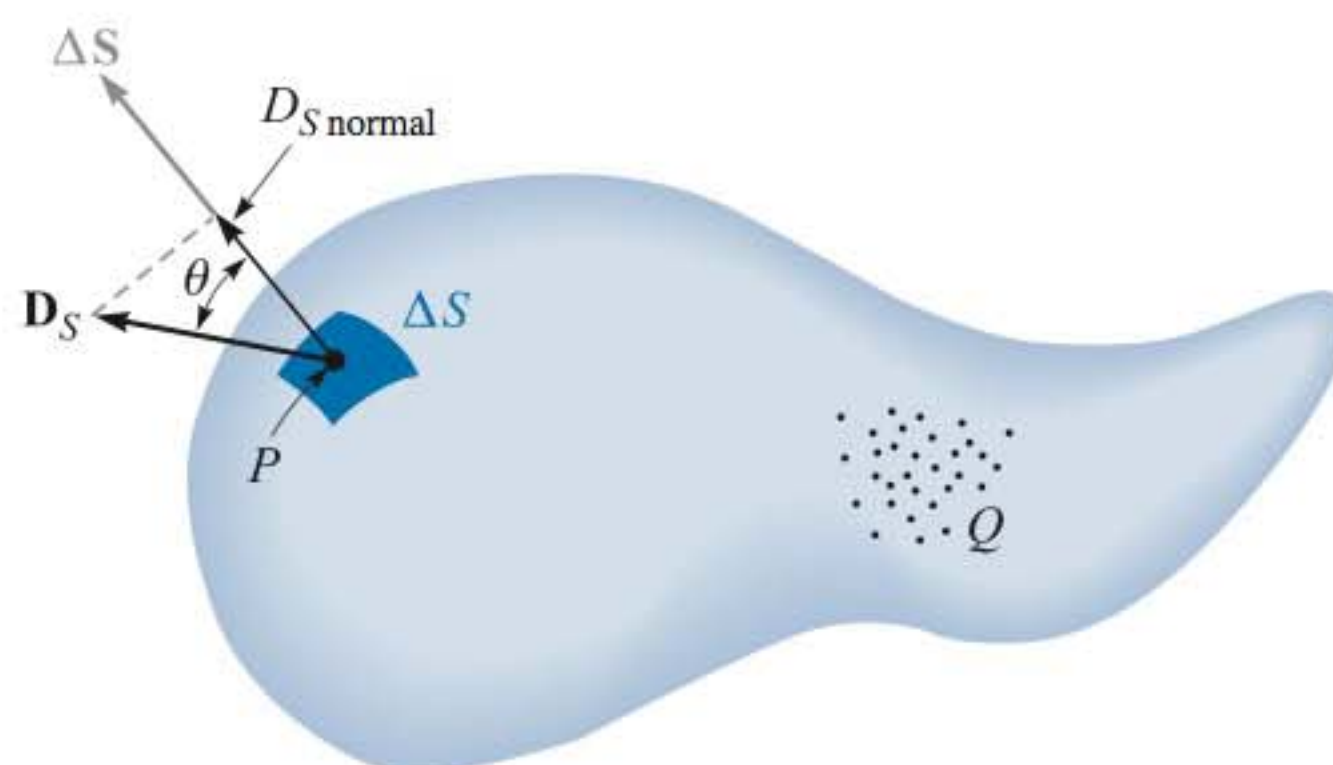



Figura 3.2 A densidade de fluxo elétrico D_S em P decorrente da carga Q. O fluxo total passando por ΔS é $D_S \cdot \Delta S$.

Considere um elemento incremental de superfície ΔS em qualquer ponto P e suponha que $\mathbf{D}_S$ faça um ângulo θ com $\Delta\mathbf{S}$, como mostrado na Figura 3.2. Assim, o fluxo que atravessa ΔS será o produto do componente normal de $\mathbf{D}_S$ com $\Delta\mathbf{S}$,

$$\Delta\Psi = \text{fluxo que atravessa } \Delta S = D_{S,\text{ norm}}\,\Delta S = D_S \cos\theta\,\Delta S = \mathbf{D}_S \cdot \Delta\mathbf{S}$$

nessa equação, somos capazes de aplicar a definição do produto escalar desenvolvida no Capítulo 1.

O fluxo *total* que passa pela superfície fechada é obtido somando-se as contribuições diferenciais que atravessam cada elemento de superfície $\Delta\mathbf{S}$,

$$\Psi = \int d\Psi = \oint_{\substack{\text{superfície}\\ \text{fechada}}} \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S}$$

A integral resultante é uma *integral de superfície fechada*. Além disso, como o elemento de superfície $d\mathbf{S}$ sempre envolve as diferenciais de duas coordenadas, tais como $dx\,dy$, $\rho\,d\phi\,d\rho$ ou r^2 sen $\theta\,d\theta\,d\phi$, a integral é uma integral dupla. Geralmente, apenas um sinal de integração é utilizado por brevidade, e vamos sempre colocar um S abaixo do sinal de integração para indicar uma integral de superfície – mas, na verdade, isso não é necessário, uma vez que a diferencial $d\mathbf{S}$ é automaticamente o sinal que indica uma integral de superfície. Uma última convenção é colocar um pequeno círculo no próprio sinal de integração, para indicar que a integração deve ser realizada sobre uma superfície *fechada*. Tal superfície normalmente é denominada *superfície gaussiana*. Temos, então, a formulação matemática para a lei de Gauss,

WW Ilustração

$$\Psi = \oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \text{carga envolvida} = Q \tag{5}$$

Pode ser também que a carga envolvida seja formada por diversas cargas pontuais e, neste caso,

$$Q = \Sigma Q n$$

ou, caso seja formada por uma linha de cargas,

$$Q = \int \rho_L\,dL$$

ou por uma superfície de cargas,

$$Q = \int_S \rho_S dS \quad \text{(não necessariamente uma superfície fechada)}$$

ou, finalmente, por uma distribuição volumétrica de cargas,

$$Q = \int_{\text{vol}} \rho_\nu \, d\nu$$

A última forma é a utilizada na maioria das vezes, e devemos concordar agora que ela representa qualquer uma ou todas as outras formas. Com esse entendimento, a lei de Gauss pode ser escrita utilizando-se a distribuição de cargas

$$\oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{vol}} \rho_\nu \, d\nu \tag{6}$$

uma definição matemática que significa simplesmente que o fluxo elétrico total que atravessa qualquer superfície fechada é igual à carga envolvida por essa superfície.

EXEMPLO 3.1

Para ilustrar a aplicação da lei de Gauss, vamos verificar os resultados do experimento de Faraday colocando uma carga pontual Q na origem de um sistema de coordenadas esféricas (Figura 3.3) e escolhendo nossa superfície fechada como uma esfera de raio a.

Solução. Temos, como antes,

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{a}_r$$

Na superfície da esfera,

$$\mathbf{D}_S = \frac{Q}{4\pi a^2}\mathbf{a}_r$$

Em coordenadas esféricas (vistas no Capítulo 1), o elemento diferencial de área em uma superfície esférica é

$$dS = r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi = a^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi$$

ou

$$d\mathbf{S} = a^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi \, \mathbf{a}_r$$

O integrando é

$$\mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi a^2} a^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi$$

levando à integral de superfície fechada

$$\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=\phi}^{\theta=\pi} \frac{Q}{4\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi$$

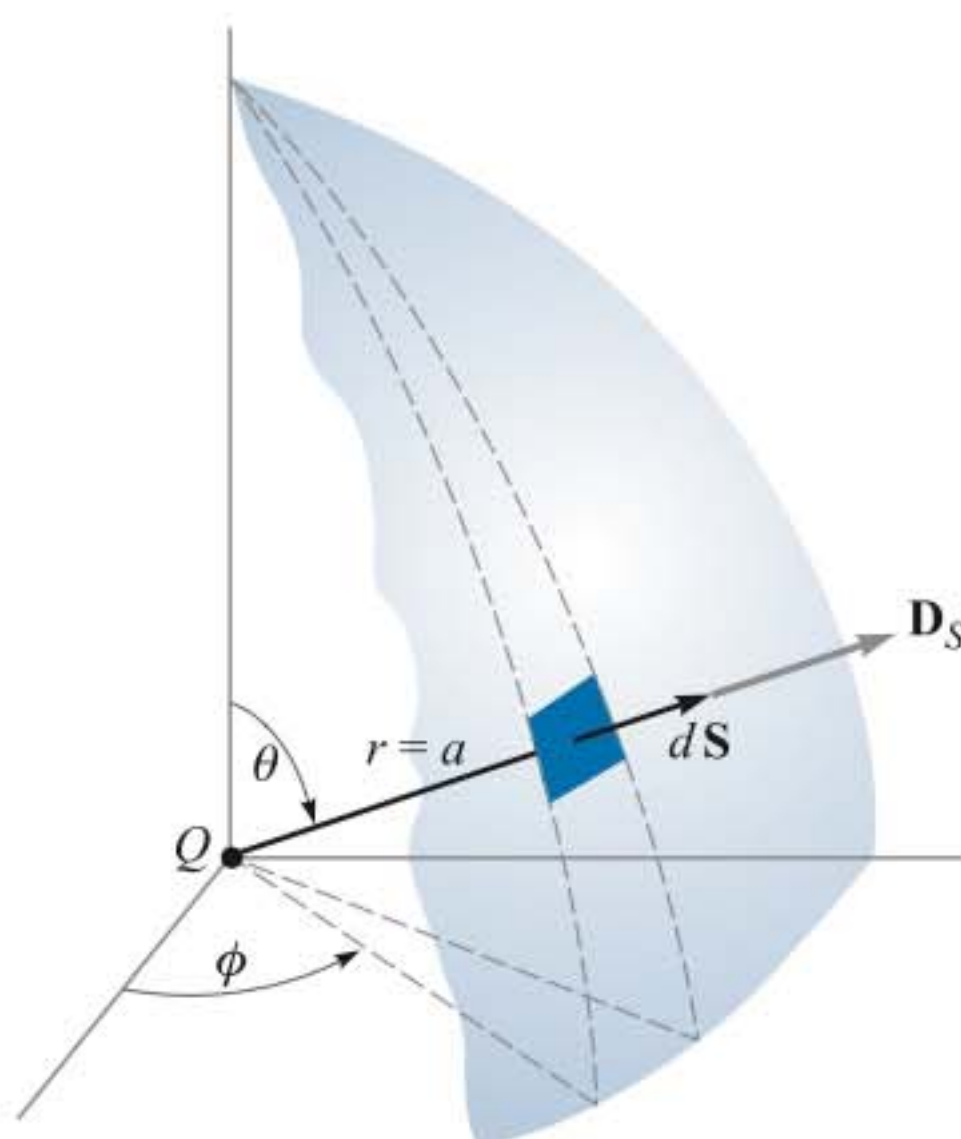



Figura 3.3 Aplicação da lei de Gauss para o campo de uma carga pontual Q em uma superfície esférica fechada de raio *a*. A densidade de fluxo elétrico D é, em todos os pontos, normal à superfície esférica e possui uma intensidade uniforme* em todos os pontos dessa superfície.

onde os limites nas integrais foram escolhidos de forma que a integração fosse realizada sobre a superfície inteira da esfera, e de uma só vez.[2] A integração leva a

$$\int_0^{2\pi} \frac{Q}{4\pi}\left(-\cos\theta\right)_0^{\pi} d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{Q}{2\pi} d\phi = Q$$

Animação

e obtemos um resultado que, conforme esperávamos, mostra que Q coulombs de fluxo elétrico atravessam a superfície, uma vez que a carga envolvida é Q coulombs.

EP3.3. Dada a densidade de fluxo elétrico $\mathbf{D} = 0{,}3r^2\mathbf{a}_r$ nC/m², no espaço livre: (*a*) calcule $\mathbf{E}$ no ponto $P(r = 2, \theta = 25°, \phi = 90°)$; (*b*) calcule a carga total dentro da esfera $r = 3$; (*c*) calcule o fluxo elétrico total que deixa a esfera $r = 4$.

Resp. $135{,}5\mathbf{a}_r$ V/m; 305 nC; 965 nC

EP3.4. Calcule o fluxo elétrico total que deixa a superfície cúbica formada pelos seis planos $x, y, z = \pm 5$ se a distribuição de cargas for: (*a*) duas cargas pontuais, 0,1 μC em $(1, -2, 3)$ e $\frac{1}{7}$ μC em $(-1, 2, -2)$; (*b*) uma linha uniforme de cargas de π μC/m em $x = -2$, $y = 3$; (*c*) uma superfície uniforme de cargas de 0,1 μC/m² no plano $y = 3x$.

Resp. 0,243 μC, 31,4 μC, 10,54 μC

[2] Perceba que, se tanto θ quanto ϕ cobrirem a variação de 0 a 2π, a superfície esférica será coberta duas vezes seguidas.

* N. de T.: Quando se considera campos estáticos, normalmente os termos "constante" e "uniforme" são tidos como sinônimos. Contudo, quando os campos que variam no tempo forem abordados (a partir do Capítulo 9), deve-se evitar a utilização desses dois termos como sinônimos.

3.3 APLICAÇÃO DA LEI DE GAUSS: ALGUMAS DISTRIBUIÇÕES SIMÉTRICAS DE CARGA

Consideremos agora como vamos utilizar a lei de Gauss,

$$Q = \oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S}$$

para determinar $\mathbf{D}_S$ se a distribuição de cargas for conhecida. Esse é um exemplo de uma equação integral na qual a grandeza desconhecida a ser determinada aparece dentro da integral.

A solução é fácil se formos capazes de escolher uma superfície fechada que satisfaça duas condições:

1. $\mathbf{D}_S$ é, em todos os pontos, normal ou tangencial à superfície fechada, de forma que $\mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S}$ se torna $D_S dS$ ou zero, respectivamente.
2. Na porção da superfície fechada na qual $\mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S}$ não for zero, $D_S =$ constante.

Isso nos permite substituir o produto escalar pelo produto entre os escalares D_S e dS, e depois trazer D_S para fora do sinal de integração. A integral restante é, então, $\int_S d\,S$, calculada sobre a porção da superfície fechada na qual $\mathbf{D}_S$ a atravessa de forma perpendicular – e o resultado é simplesmente a área desta seção da superfície. Somente um conhecimento da simetria do problema nos permite escolher tal superfície fechada.

Vamos, novamente, considerar uma carga pontual Q na origem de um sistema de coordenadas esféricas e escolher uma superfície fechada adequada, que satisfará aos dois requisitos anteriormente listados. A superfície em questão é, obviamente, uma superfície esférica centrada na origem e de raio r qualquer. $\mathbf{D}_S$ é, em todos os pontos, normal à superfície, e D_S apresenta o mesmo valor em todos os pontos da superfície.

Desta forma, temos,

$$\begin{aligned} Q &= \oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\text{esf}} D_S dS \\ &= D_S \oint_{\text{esf}} dS = D_S \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi \\ &= 4\pi r^2 D_S \end{aligned}$$

e, assim,

$$D_S = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

Uma vez que r pode receber qualquer valor e que $\mathbf{D}_S$ está direcionado radialmente no sentido "para fora",

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{a}_r \qquad \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathbf{a}_r$$

o que coincide com os resultados do Capítulo 2. O exemplo é bem trivial, e a ele pode se objetar que deveríamos saber que o campo era simétrico e direcionado radialmente "para fora" mesmo antes que pudéssemos obter uma resposta. Isso de fato é verdade, e deixa a relação da lei do inverso do quadrado como o único ponto realmente checado com a lei de Gauss. Contudo, o exemplo certamente serve para ilustrar um método que devemos aplicar a outros problemas, incluindo vários outros para os quais a lei de Coulomb é quase incapaz de fornecer uma resposta.

Existem outras superfícies que teriam satisfeito nossas duas condições? O estudante deve verificar quais superfícies simples (como um cubo ou um cilindro) não satisfazem as condições.

Como um segundo exemplo, vamos reconsiderar a distribuição linear e uniforme de cargas ρ_L posicionada ao longo do eixo z e se estendendo de $-\infty$ até $+\infty$. Devemos, primeiramente, conhecer a simetria do campo, e somente vamos considerar esse conhecimento completo quando as respostas a essas duas questões forem conhecidas:

1. Com quais coordenadas o campo varia (ou de quais variáveis D é função)?
2. Quais componentes de $\mathbf{D}$ estão presentes?

Usar a lei de Gauss não é uma questão de utilizar simetria para simplificar a solução, porque a aplicação da lei de Gauss depende de simetria, e *se não pudermos mostrar que a simetria existe, então não poderemos usar a lei de Gauss* para obter a solução. As duas perguntas anteriores agora se tornam "necessidades".

De nossa discussão anterior sobre a linha uniforme de cargas, é evidente que somente o componente radial de $\mathbf{D}$ está presente, ou

$$\mathbf{D} = D_\rho \mathbf{a}_\rho$$

e essa componente é função apenas de ρ.

$$D_\rho = f(\rho)$$

A escolha de uma superfície fechada é algo simples agora, pois uma superfície cilíndrica é a única superfície para a qual D_ρ é normal em todos os pontos, e pode ser fechada por superfícies planas normais ao eixo z. Um cilindro circular reto fechado de raio ρ que se estende de $z = 0$ a $z = L$ é mostrado na Figura 3.4.

Aplicamos a lei de Gauss,

$$Q = \oint_{\text{cil}} \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = D_S \int_{\text{lados}} dS + 0 \int_{\text{topo}} dS + 0 \int_{\text{base}} dS$$

$$= D_S \int_{z=0}^{L} \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho \, d\phi \, dz = D_S 2\pi\rho L$$

e obtemos

$$D_S = D_\rho = \frac{Q}{2\pi\rho L}$$

Em relação à densidade de carga ρ_L, a carga total envolvida é

$$Q = \rho_L L$$

Linha de cargas

ρ_L

ρ

L

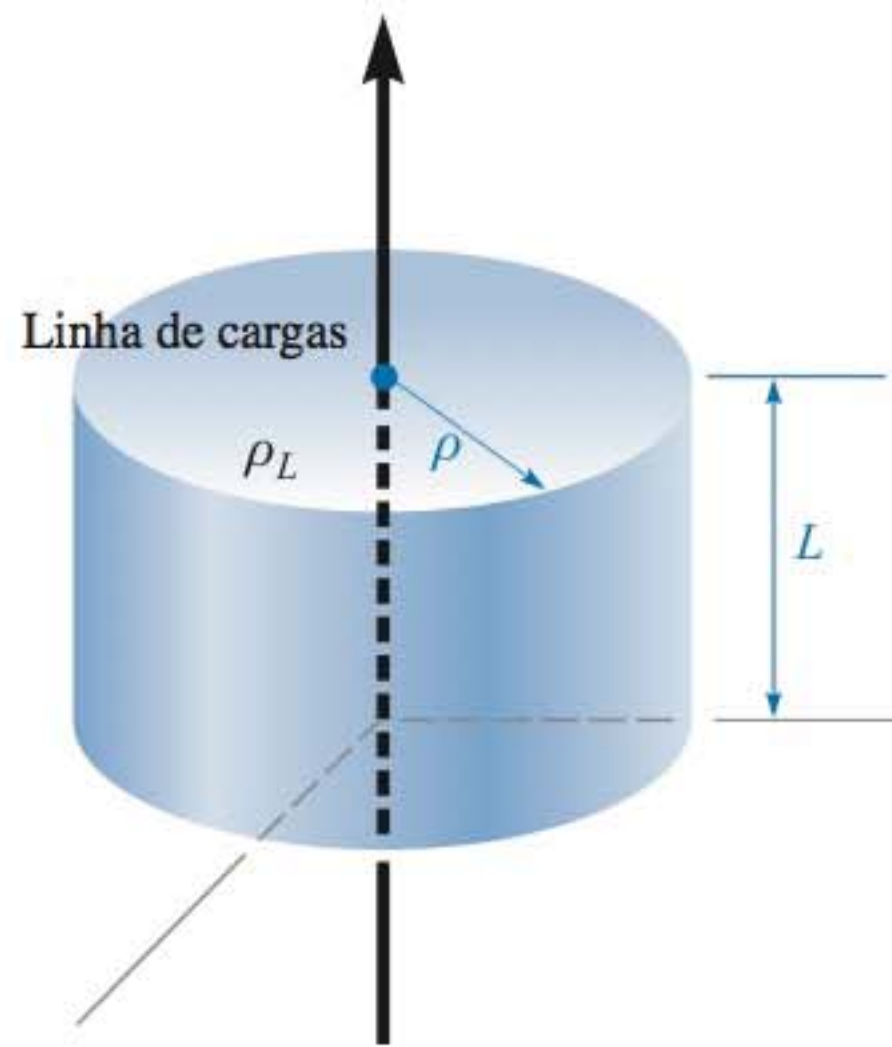



Figura 3.4 A superfície gaussiana para uma linha infinita e uniforme de cargas é um cilindro circular reto de comprimento L e raio ρ. **D** é constante em intensidade e perpendicular, em todos os pontos, à superfície cilíndrica. **D** é paralelo às superfícies das extremidades.

o que leva a

$$D_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}$$

ou

$$E_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}$$

Uma comparação com a Equação (16) da Seção 2.4 mostra que o resultado correto foi obtido – e com muito menos esforço. Uma vez que a superfície apropriada foi escolhida, a integração normalmente se resume a escrever a área da superfície na qual **D** é normal.

O problema de um cabo coaxial é quase idêntico àquele da linha de cargas, e é um exemplo extremamente difícil de resolver a partir da lei de Coulomb. Suponha que tenhamos dois condutores cilíndricos coaxiais, o interno de raio a e o externo de raio b, ambos de extensão infinita (Figura 3.5). Devemos considerar uma distribuição de cargas de ρ_S na superfície externa do condutor interno.

Considerações de simetria nos mostram que apenas o componente D_ρ está presente e que somente pode ser função de ρ. Um cilindro circular reto de comprimento L e raio ρ, onde $a < \rho < b$, é necessariamente escolhido como a superfície gaussiana, e então, de forma imediata, teremos

$$Q = D_S 2\pi\rho L$$

A carga total em um comprimento L do condutor interno é

$$Q = \int_{z=0}^{L}\int_{\phi=0}^{2\pi} \rho_S a\, d\phi\, dz = 2\pi a L\rho_S$$

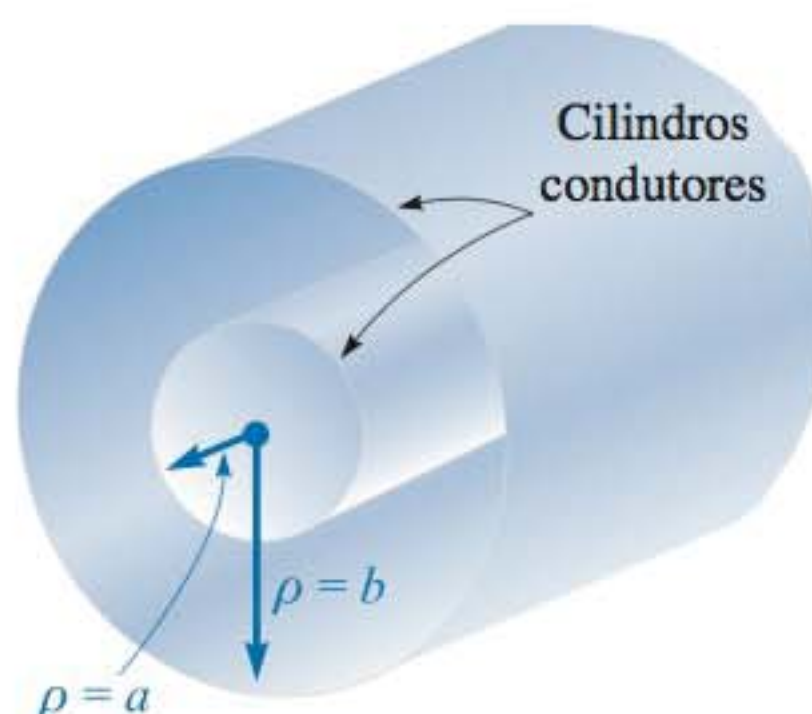



Figura 3.5 Os dois condutores cilíndricos coaxiais formando um cabo coaxial causam um fluxo elétrico entre os cilindros dado por $D_\rho = a\rho_S/\rho$.

do qual temos

$$D_S = \frac{a\rho_S}{\rho} \qquad \mathbf{D} = \frac{a\rho_S}{\rho}\mathbf{a}_\rho \qquad (a < \rho < b)$$

Este resultado pode ser expresso pela carga por unidade de comprimento, pois o condutor interno tem $2\pi a\rho_S$ coulombs em um metro de comprimento e, assim, sendo $\rho_L = 2\pi a\rho_S$,

WW Ilustração

$$\boxed{\mathbf{D} = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}\mathbf{a}_\rho}$$

e a solução tem uma forma idêntica àquela da linha infinita de cargas.

Uma vez que toda linha de fluxo elétrico que começa da carga no cilindro interno deve terminar em uma carga negativa na superfície interna do cilindro externo, a carga total naquela superfície deve ser

$$Q_{\text{cil externo}} = -2\pi a L\rho_{S,\,\text{cil interno}}$$

já a carga superficial no cilindro externo, é encontrada em

$$2\pi bL\rho_{S,\,\text{cil externo}} = -2\pi aL\rho_{S,\,\text{cil interno}}$$

ou

$$\rho_{S,\,\text{cil externo}} = -\frac{a}{b}\rho_{S,\,\text{cil interno}}$$

O que aconteceria se usássemos um cilindro de raio ρ, $\rho > b$, para a superfície gaussiana? Neste caso, a carga total envolvida seria zero, pois existem cargas iguais mas de sinais opostos em cada cilindro condutor. Logo

$$0 = D_S 2\pi\rho L \qquad (\rho > b)$$
$$D_S = 0 \qquad (\rho > b)$$

Um resultado idêntico seria obtido para $\rho < a$. Assim, o cabo ou capacitor coaxial não possuiria campo externo (já provamos que o condutor externo é uma "blindagem") e não haveria campo dentro do condutor central.

Nosso resultado também é útil para um cabo coaxial de comprimento *finito*, aberto em ambas as extremidades, caso o comprimento L seja muitas vezes maior que o raio b, de forma que as condições de não simetria nas duas extremidades não afetem consideravelmente a solução. Tal dispositivo é também chamado de *capacitor coaxial*. Tanto o cabo coaxial quanto o capacitor coaxial aparecerão frequentemente nas páginas seguintes.

EXEMPLO 3.2

Selecionemos um cabo coaxial de 50 cm de comprimento que possui um raio interno de 1 mm e um raio externo de 4 mm. Considera-se que o espaço entre os condutores seja preenchido com ar* e que a carga total no condutor interno seja de 30 nC. Desejamos saber a densidade de carga em cada condutor e os campos **E** e **D**.

Solução. Começamos encontrando a densidade superficial de carga no cilindro interno,

$$\rho_{S,\text{ cil interno}} = \frac{Q_{\text{cil interno}}}{2\pi a L} = \frac{30 \times 10^{-9}}{2\pi(10^{-3})(0,5)} = 9,55\ \mu\text{C/m}^2$$

A densidade de carga negativa na superfície interna do cilindro externo é

$$\rho_{S,\text{cil externo}} = \frac{Q_{\text{cil externo}}}{2\pi b L} = \frac{-30 \times 10^{-9}}{2\pi(4 \times 10^{-3})(0,5)} = -2,39\ \mu\text{C/m}^2$$

Assim, os campos internos podem ser calculados facilmente:

$$D_\rho = \frac{a\rho_S}{\rho} = \frac{10^{-3}(9,55 \times 10^{-6})}{\rho} = \frac{9,55}{\rho}\ \text{nC/m}^2$$

e

$$E_\rho = \frac{D_\rho}{\epsilon_0} = \frac{9,55 \times 10^{-9}}{8,854 \times 10^{-12}\rho} = \frac{1.079}{\rho}\ \text{V/m}$$

Ambas as expressões se aplicam à região onde $1 < \rho < 4$ mm. Para $\rho < 1$ mm ou $\rho > 4$ mm, **E** e **D** são iguais a zero.

EP3.5. Uma carga pontual de 0,25 μC está posicionada em $r = 0$, e densidades superficiais uniformes de carga estão posicionadas da seguinte maneira: 2 mC/m^2 em $r = 1$ cm e $-0,6$ mC/m^2 em $r = 1,8$ cm. Calcule **D** em: (*a*) $r = 0,5$ cm; (*b*) $r = 1,5$ cm, (*c*) $r = 2,5$ cm. (*d*) Qual densidade superficial uniforme de cargas deveria ser colocada em $r = 3$ cm para que tenhamos $\mathbf{D} = 0$ em $r = 3,5$ cm?

Resp. $796\mathbf{a}_r\ \mu\text{C/m}^2$; $977\mathbf{a}_r\ \mu\text{C/m}^2$; $40,8\mathbf{a}_r\ \mu\text{C/m}^2$; $-28,3\ \mu\text{C/m}^2$

* N. de T.: Em termos aproximados (ou práticos), ar é sinônimo de vácuo e de espaço livre.

3.4 APLICAÇÃO DA LEI DE GAUSS: ELEMENTO DIFERENCIAL DE VOLUME

Vamos agora aplicar os métodos da lei de Gauss em um tipo de problema ligeiramente diferente – um que não possui nenhum tipo de simetria. À primeira vista, isso pode parecer algo impossível, pois sem simetria uma superfície gaussiana simples não pode ser escolhida de forma que o componente normal de **D** seja constante ou zero por toda a superfície. Sem uma superfície desse tipo, a integral não pode ser calculada. Existe apenas uma maneira de driblar essas dificuldades: escolher uma superfície fechada muito pequena na qual **D** seja *quase* constante ao longo da superfície, e de tal forma que a pequena mudança em **D** possa ser adequadamente representada pelo uso dos dois primeiros termos da expansão de **D** em série de Taylor. Assim, o resultado se tornará mais exato à medida que o volume envolvido pela superfície gaussiana diminuir, o qual pretendemos que se aproxime de zero.

Esse exemplo também difere dos anteriores pois aqui nossa resposta não será o valor de **D**; em vez disso, obteremos algumas informações extremamente valiosas sobre a forma como **D** varia na região da nossa pequena superfície. Isso leva diretamente a uma das quatro equações de Maxwell, que são básicas para toda a teoria eletromagnética.

Consideremos um ponto qualquer P, mostrado na Figura 3.6, posicionado em um sistema de coordenadas cartesianas. O valor de **D** no ponto P pode ser expresso em componentes cartesianos como $\mathbf{D}_0 = D_{x0}\mathbf{a}_x + D_{y0}\mathbf{a}_y + D_{z0}\mathbf{a}_z$. Escolhemos como nossa superfície fechada a pequena caixa retangular centrada em P que tem lados de comprimentos Δx, Δy e Δz, e aplicamos a lei de Gauss,

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

Com o objetivo de calcular a integral sobre a superfície fechada, devemos quebrá-la em seis integrais, uma para cada face,

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{frente}} + \int_{\text{atrás}} + \int_{\text{esquerda}} + \int_{\text{direita}} + \int_{\text{topo}} + \int_{\text{base}}$$

Consideremos a primeira delas em detalhes. Uma vez que o elemento de superfície é muito pequeno, **D** é essencialmente constante (*nessa* porção específica da superfície fechada) e

$$\begin{aligned}\int_{\text{frente}} &\doteq \mathbf{D}_{\text{frente}} \cdot \Delta\mathbf{S}_{\text{frente}} \\ &\doteq \mathbf{D}_{\text{frente}} \cdot \Delta y\, \Delta z\, \mathbf{a}_x \\ &\doteq D_{x,\text{frente}} \Delta y\, \Delta z\end{aligned}$$

onde temos apenas que aproximar o valor de D_x nessa face da frente. A face da frente está a uma distância de $\Delta x/2$ de P, e com isso

$$\begin{aligned}D_{x,\text{frente}} &\doteq D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \times \text{taxa de variação de } D_x \text{ com } x \\ &\doteq D_{x0} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial D_x}{\partial x}\end{aligned}$$

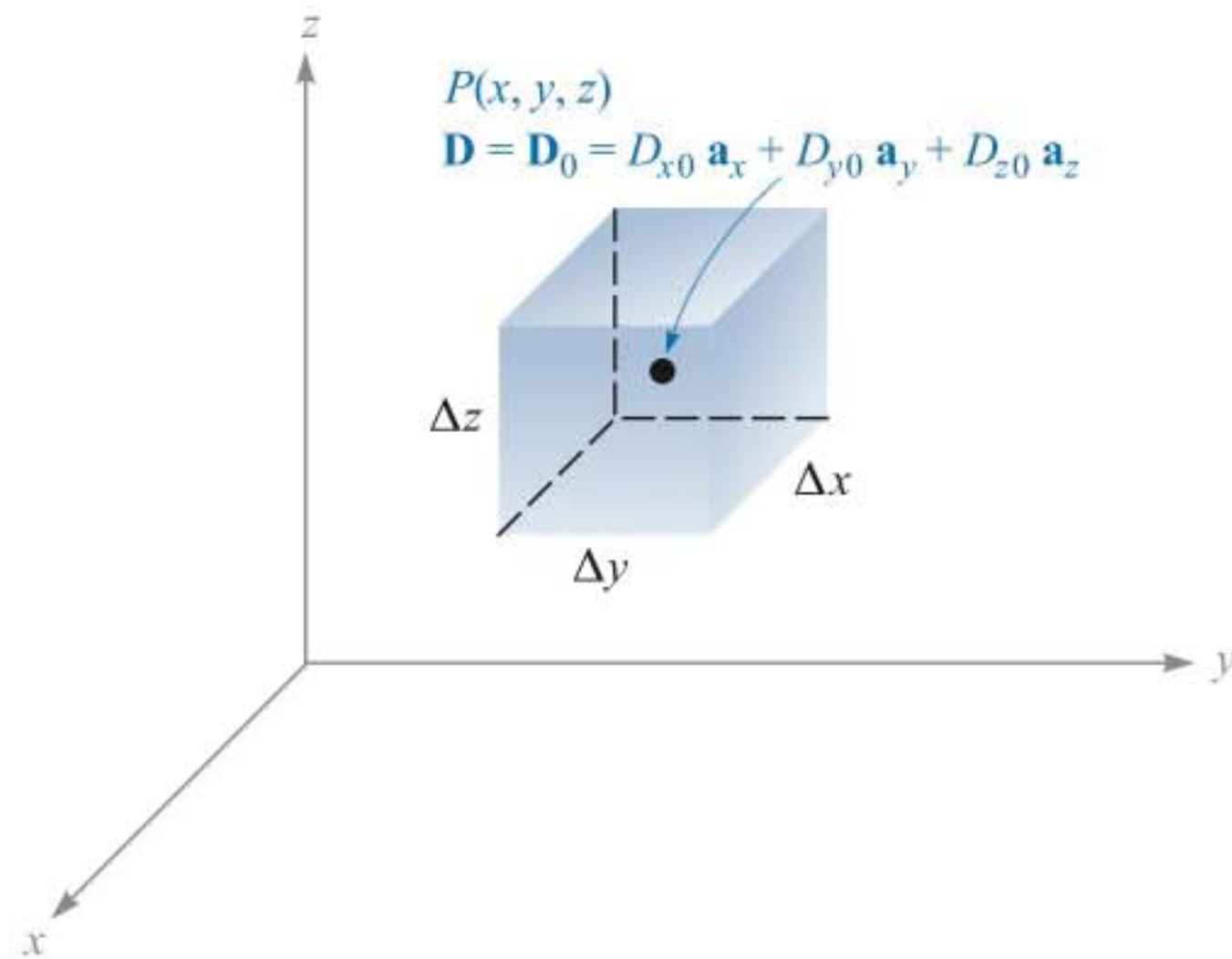



Figura 3.6 Uma superfície gaussiana de tamanho diferencial em volta do ponto P é utilizada para investigar a taxa de variação espacial de **D** na vizinhança de P.

onde D_{x0} é o valor de D_x em P, e onde uma derivada parcial deve ser utilizada para expressar a taxa de variação de D_x em relação a x, uma vez que D_x, em geral, também varia com y e z. Essa expressão poderia ter sido obtida de maneira mais formal utilizando-se o termo constante e o termo envolvendo a primeira derivada na expansão de D_x em série de Taylor, na vizinhança de P.

Temos agora

$$\int_{\text{frente}} \doteq \left(D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \, \Delta z$$

Considere agora a integral sobre a superfície de trás,

$$\begin{aligned} \int_{\text{atrás}} &\doteq \mathbf{D}_{\text{atrás}} \cdot \Delta \mathbf{S}_{\text{atrás}} \\ &\doteq \mathbf{D}_{\text{atrás}} \cdot (-\Delta y \, \Delta z \, \mathbf{a}_x) \\ &\doteq -D_{x,\,\text{atrás}} \Delta y \, \Delta z \end{aligned}$$

e

$$D_{x,\,\text{atrás}} \doteq D_{x0} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x}$$

dando

$$\int_{\text{atrás}} \doteq \left(-D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \, \Delta z$$

Se combinarmos essas duas integrais, temos

$$\int_{\text{frente}} + \int_{\text{atrás}} \doteq \frac{\partial D_x}{\partial x} \Delta x \, \Delta y \, \Delta z$$

Exatamente pelo mesmo processo, encontramos:

$$\int_{\text{direita}} + \int_{\text{esquerda}} \doteq \frac{\partial D_y}{\partial y} \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$$

e

$$\int_{\text{topo}} + \int_{\text{base}} \doteq \frac{\partial D_z}{\partial z} \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$$

esses resultados podem ser reunidos, resultando em

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \doteq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$$

ou

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \doteq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta v \tag{7}$$

Essa expressão é uma aproximação que se torna melhor à medida que Δv se torna menor; na próxima seção, vamos deixar o volume Δv se aproximar de zero. Nesta seção, aplicamos a lei de Gauss para a superfície fechada que circunda o elemento de volume Δv e tivemos como resultado a aproximação da Equação (7), a qual determina que

$$\text{Carga envolvida no volume } \Delta v \doteq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \times \text{volume } \Delta v \tag{8}$$

EXEMPLO 3.3

Encontre um valor aproximado para a carga total presente em um volume incremental de 10^{-9} m^3 posicionada na origem, se $\mathbf{D} = e^{-x} \operatorname{sen} y\, \mathbf{a}_x - e^{-x} \cos y\, \mathbf{a}_y + 2z\mathbf{a}_z$ C/m^2.

Solução. Primeiramente, calculamos as três derivadas parciais em (8):

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = -e^{-x} \operatorname{sen} y$$

$$\frac{\partial D_y}{\partial y} = e^{-x} \operatorname{sen} y$$

$$\frac{\partial D_z}{\partial z} = 2$$

Na origem, as duas primeiras expressões são zero, e a última vale 2. Logo, encontramos que a carga presente em um pequeno elemento de volume deve ser aproximadamente $2\Delta v$. Se Δv é 10^{-9} m^3, então teremos aproximadamente 2 nC envolvidos.

EP3.6. No espaço livre, seja $\mathbf{D} = 8xyz^4\mathbf{a}_x + 4x^2z^4\mathbf{a}_y + 16x^2yz^3\mathbf{a}_z$ pC/m^2. (*a*) Encontre o fluxo elétrico total que passa pela superfície retangular $z = 2$, $0 < x < 2$, $1 < y < 3$, na direção $\mathbf{a}_z$. (*b*) Calcule $\mathbf{E}$ em $P(2, -1, 3)$. (*c*) Calcule um valor aproximado para a carga total contida em uma esfera incremental posicionada em $P(2, -1, 3)$ cujo volume é 10^{-12} m^3.

Resp. 1.365 pC; $-146{,}4\mathbf{a}_x + 146{,}4\mathbf{a}_y - 195{,}2\mathbf{a}_z$ V/m; $-2{,}38 \times 10^{-21}$ C

3.5 DIVERGÊNCIA E PRIMEIRA EQUAÇÃO DE MAXWELL

Devemos obter uma relação exata a partir da Equação (7), fazendo com que o elemento de volume Δv se reduza até zero. Escrevemos essa equação como

$$\left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{Q}{\Delta v} = \rho_v \tag{9}$$

na qual a densidade volumétrica de carga ρ_v está identificada na segunda igualdade.

Os métodos da seção anterior poderiam ter sido utilizados em qualquer vetor $\mathbf{A}$ para se encontrar $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ para uma superfície fechada pequena, levando a

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} \tag{10}$$

onde $\mathbf{A}$ poderia representar velocidade, gradiente de temperatura, força ou outro campo vetorial qualquer.

Essa operação apareceu tantas vezes em investigações físicas no século passado que acabou recebendo um nome descritivo: *divergência*. A divergência de $\mathbf{A}$ é definida como

WWW Interatividade

$$\text{Divergência de } \mathbf{A} = \text{div } \mathbf{A} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} \tag{11}$$

e é geralmente abreviada como div $\mathbf{A}$. A interpretação física da divergência de um vetor é obtida descrevendo-se cuidadosamente as operações que o lado direito da Equação (11) implica; nesse caso, devemos considerar $\mathbf{A}$ como um membro da família dos vetores de densidade de fluxo para que isso nos auxilie na interpretação física.

A divergência do vetor densidade de fluxo **A** *é o fluxo que deixa uma pequena superfície fechada, por unidade de volume, quando o volume tende a zero.*

A interpretação física de divergência propiciada por essa definição é frequentemente útil para se obter informação qualitativa sobre a divergência de um campo vetorial sem apelar para uma investigação matemática. Como exemplo, consideremos a divergência da velocidade da água em uma banheira após a tampa do ralo ser retirada. O fluxo líquido de água para fora de *qualquer* superfície fechada posicionada inteiramente dentro da água deve ser zero, pois a água é essencialmente incompressível.

Sendo assim, a divergência da velocidade é zero para a água que entra e deixa regiões diferentes da superfície fechada.

Entretanto, se considerarmos a velocidade do ar em um pneu que acaba de ser furado por um prego, perceberemos que o ar irá se expandir à medida que a pressão cair, e que, consequentemente, existe um fluxo líquido que sai de qualquer superfície fechada posicionada dentro do pneu. A divergência dessa velocidade é, portanto, maior que zero.

Uma divergência positiva para qualquer grandeza vetorial indica uma *fonte* daquela grandeza vetorial naquele ponto. Similarmente, uma divergência negativa indica um *sorvedouro*. Uma vez que a divergência da velocidade da água é zero no exemplo considerado, não existe nem fonte e nem sorvedouro.[3] O ar que se expande, entretanto, produz uma divergência positiva da velocidade, e cada ponto interior pode ser considerado uma fonte.

Escrevendo-se a Equação (9) com o nosso novo termo, temos

$$\text{div}\,\mathbf{D} = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right) \qquad \text{(cartesiana)} \tag{12}$$

Essa expressão tem, novamente, uma forma que não envolve densidade de cargas. É o resultado da aplicação da definição de divergência da Equação (11) para um elemento diferencial de volume em *coordenadas cartesianas*.

Se um volume diferencial $\rho\, d\rho\, d\phi\, dz$ (em coordenadas cilíndricas) ou $r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$ (em coordenadas esféricas) tivesse sido escolhido, teriam sido obtidas expressões para a divergência envolvendo os componentes do vetor no sistema de coordenadas em específico e envolvendo derivadas parciais com relação às variáveis de tal sistema. Essas expressões podem ser obtidas no Apêndice A e são dadas aqui por conveniência:

$$\text{div}\,\mathbf{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \qquad \text{(cilíndrica)} \tag{13}$$

$$\text{div}\,\mathbf{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\operatorname{sen}\theta\, D_\theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} \qquad \text{(esférica)} \tag{14}$$

Essas relações são também mostradas nas páginas finais, para referência rápida.

Deve-se notar que a divergência é uma operação realizada em um vetor, mas cujo resultado é um escalar. Devemos nos lembrar que, de uma forma mais ou menos semelhante, o produto escalar foi visto como uma multiplicação de dois vetores que resultava em um escalar.

Por alguma razão, quando se lida com a divergência pela primeira vez, atribuir uma qualidade de vetor à operação, distribuindo-se vetores unitários pelas derivadas parciais, é um erro comum. A divergência simplesmente nos diz *quanto* fluxo está

[3] Escolhendo-se um elemento diferencial de volume dentro da água, a diminuição gradual do nível da água com o tempo eventualmente fará com que o elemento de volume fique acima da superfície da água. No momento que a superfície da água intercepta o elemento de volume, a divergência é positiva e o pequeno volume é uma fonte. Essa complicação foi evitada no exemplo considerado ao se especificar um ponto posicionado abaixo do nível da água.

deixando um pequeno volume, e "por unidade de volume". Nenhuma direção e sentido são a ela associados.

Podemos ilustrar o conceito de divergência continuando o exemplo do final da Seção 3.4.

EXEMPLO 3.4

Calcule div **D** na origem se $\mathbf{D} = e^{-x} \operatorname{sen} y\, \mathbf{a}_x - e^{-x} \cos y\, \mathbf{a}_y + 2z\mathbf{a}_z$.

Solução. Utilizamos a Equação (10) para obter

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \\ &= -e^{-x} \operatorname{sen} y + e^{-x} \operatorname{sen} y + 2 = 2 \end{aligned}$$

O resultado é a constante 2, independentemente da posição.

Se as unidades de **D** são $\mathrm{C/m^2}$, então as unidades de div **D** são $\mathrm{C/m^3}$. Essa é uma densidade volumétrica de carga, um conceito a ser discutido na próxima seção.

EP3.7. Em cada uma das seguintes partes, calcule um valor numérico para div **D** no ponto especificado: (*a*) $\mathbf{D} = (2xyz - y^2)\mathbf{a}_x + (x^2z - 2xy)\mathbf{a}_y + x^2y\mathbf{a}_z$ $\mathrm{C/m^2}$ em $P_A(2, 3, -1)$; (*b*) $\mathbf{D} = 2\rho z^2 \operatorname{sen}^2 \phi \mathbf{a}_\rho + \rho z^2 \operatorname{sen} 2\phi \mathbf{a}_\phi + 2\,\rho^2 z \operatorname{sen}^2 \phi\, \mathbf{a}_z$ $\mathrm{C/m^2}$ em $P_B(\rho = 2, \phi = 110°, z = -1)$; (*c*) $\mathbf{D} = 2r \operatorname{sen} \theta \cos \phi\, \mathbf{a}_r + r \cos \theta \cos \phi\, \mathbf{a}_\theta - r \operatorname{sen} \phi\, \mathbf{a}_\phi$ $\mathrm{C/m^2}$ em $P_C(r = 1{,}5, \theta = 30°, \theta = 50°)$.

Resp. $-10{,}00$; 9,06; 1,29

Finalmente, podemos combinar as Equações (9) e (12) e formar a relação entre densidade de fluxo elétrico e densidade de carga:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_v \tag{15}$$

Essa é a primeira das quatro equações de Maxwell aplicadas à eletrostática e campos magnéticos estacionários, e determina que o fluxo elétrico por unidade de volume que deixa uma pequenina unidade de volume é exatamente igual à densidade volumétrica de carga ali existente. Essa equação é convenientemente chamada de *lei de Gauss na forma pontual*. A lei de Gauss relaciona o fluxo que deixa qualquer superfície fechada com a carga envolvida, e a primeira equação de Maxwell faz uma afirmação idêntica, mas por unidade de volume, para um pequeno volume que se esvai ou em um ponto. Pelo fato de a divergência poder ser expressa como a soma de três derivadas parciais, a primeira equação de Maxwell é também descrita como a lei de Gauss na forma diferencial; reciprocamente, a lei de Gauss é reconhecida como a primeira equação de Maxwell na forma integral.

Como ilustração específica, consideremos a divergência de **D** na região em volta da carga pontual Q posicionada na origem. Temos o campo

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{a}_r$$

e fazemos uso da Equação (14), a expressão para divergência em coordenadas esféricas:

$$\text{div}\,\mathbf{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) + \frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(D_\theta\,\text{sen}\,\theta) + \frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}$$

Uma vez que D_θ e D_ϕ são iguais a zero, temos

$$\text{div}\,\mathbf{D} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{Q}{4\pi r^2}\right) = 0 \qquad (\text{se } r \neq 0)$$

Logo, $\rho_v = 0$ em todos os pontos, exceto na origem, onde é infinito.

A operação de divergência não está limitada à densidade de fluxo elétrico. Ela pode ser aplicada a qualquer campo vetorial. Vamos aplicá-la a vários outros campos eletromagnéticos nos próximos capítulos.

EP3.8. Determine uma expressão para a densidade volumétrica de carga associada a cada campo $\mathbf{D}$ seguinte: (*a*) $\mathbf{D} = \frac{4xy}{z}\mathbf{a}_x + \frac{2x^2}{z}\mathbf{a}_y - \frac{2x^2y}{z^2}\mathbf{a}_z$; (*b*) $\mathbf{D} = z\,\text{sen}\,\phi\,\mathbf{a}_\rho + z\cos\phi\,\mathbf{a}_\phi + \rho\,\text{sen}\,\phi\,\mathbf{a}_z$; (*c*) $\mathbf{D} = \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi\,\mathbf{a}_r + \cos\theta\,\text{sen}\,\phi\,\mathbf{a}_\theta + \cos\phi\,\mathbf{a}_\phi$.

Resp. $\frac{4y}{z^3}(x^2+z^2)$; 0; 0.

3.6 OPERADOR VETORIAL ∇ E TEOREMA DA DIVERGÊNCIA

Se nos lembrarmos novamente que a divergência é uma operação em um vetor que resulta em um escalar, assim como o produto escalar entre dois vetores resulta em um escalar, poderemos encontrar algo que possa formalmente ser multiplicado escalarmente com $\mathbf{D}$ para resultar em um escalar

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

Obviamente, isso não pode ser alcançado usando um *produto* escalar. O processo deve ser uma *operação* escalar.

Com isso em mente, definimos o *operador* nabla ∇* como um *operador vetorial*,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}_z \tag{16}$$

Operadores escalares similares aparecem em diversos métodos de solução de equações diferenciais onde, frequentemente, substituímos D por d/dx, D^2 por d^2/dx^2 e assim por diante.[4] Definiremos ∇ para que esse operador seja tratado, para todos os efeitos, como um vetor comum, mas com uma importante exceção: seus resultados serão derivadas parciais e não produtos de escalares.

[4] Este operador escalar D, que não aparecerá novamente, não deve ser confundido com a densidade de fluxo elétrico.

* N. de T.: Também denominado "operador del".

Considere $\nabla \cdot \mathbf{D}$ significando

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}_z \right) \cdot (D_x\mathbf{a}_x + D_y\mathbf{a}_y + D_z\mathbf{a}_z)$$

Primeiramente, consideramos os produtos escalares dos vetores unitários, descartando os seis termos nulos, e obtemos o resultado que identificamos como a divergência de **D**:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \text{div}(\mathbf{D})$$

O uso de $\nabla \cdot \mathbf{D}$ é muito mais usual que div **D**, apesar de ambas as formas terem suas vantagens. Escrevendo $\nabla \cdot \mathbf{D}$, podemos obter, de forma simples e rápida, as derivadas parciais corretas – mas apenas em coordenadas cartesianas, conforme veremos. Por outro lado, o uso de div **D** é ótimo para nos lembrar da interpretação física de divergência. Deveremos utilizar a notação de operador $\nabla \cdot \mathbf{D}$ de agora em diante para indicar a operação de divergência.

O operador vetorial ∇ não é utilizado apenas com divergência, mas também para diversas outras operações importantes que aparecerão depois. Uma delas é ∇u, onde u é qualquer campo escalar, o que leva a

$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}_z \right) u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

O operador ∇ não tem uma forma específica em outros sistemas de coordenadas. Se estivermos considerando **D** em coordenadas cilíndricas, então $\nabla \cdot \mathbf{D}$ ainda indicará a divergência de **D**, ou

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

onde essa expressão foi retirada da Seção 3.5. Não temos forma própria que nos auxilie a obter essa soma de derivadas parciais. Isso significa que ∇u, ainda não definido mas facilmente escrito em coordenadas cartesianas, nesse momento não pode ser expresso por nós em coordenadas cilíndricas. Tal expressão será obtida quando ∇u for definido no Capítulo 4.

Devemos concluir nossa discussão de divergência apresentando um teorema que se mostrará necessário diversas vezes nos próximos capítulos: o *Teorema da Divergência*. Esse teorema se aplica a qualquer campo vetorial para o qual a derivada parcial apropriada exista, apesar de ser mais fácil, neste caso, desenvolvê-lo para a densidade de fluxo elétrico. Na realidade, já o obtivemos e temos agora pouco mais para acrescentar do que mostrá-lo e nomeá-lo, pois, começando da lei de Gauss,

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q = \int_{\text{vol}} \rho_v dv = \int_{\text{vol}} \nabla \cdot \mathbf{D}\, dv$$

A primeira e última expressões constituem o teorema da divergência,

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{vol}} \nabla \cdot \mathbf{D}\, dv \tag{17}$$

que pode ser enunciado como segue:

A integral do componente normal de qualquer campo vetorial sobre uma superfície fechada é igual à integral da divergência desse campo vetorial no volume delimitado pela superfície fechada.

Novamente, enfatizamos que o teorema da divergência é verdadeiro para qualquer campo vetorial, apesar de o termos obtido, especificamente, para a densidade de fluxo elétrico **D**. Mais tarde, teremos oportunidade de aplicá-lo a diversos campos diferentes. Seus benefícios derivam do fato de ele relacionar uma integral tripla *em algum volume* a uma integral dupla *na superfície* que delimita tal volume. Exemplo disso é o fato de que é muito mais fácil procurar por vazamentos em alguma garrafa cheia de algum líquido agitado pela inspeção da sua superfície que pelo cálculo da velocidade em cada ponto interno.

O teorema da divergência se torna fisicamente óbvio se considerarmos um volume v cuja seção reta é mostrada na Figura 3.7, delimitado pela superfície fechada S. A divisão do volume em diversos pequenos compartimentos de tamanho diferencial e a consideração de uma célula mostram que o fluxo que diverge de tal célula *entra* na (ou *converge* para a) célula adjacente, a menos que a célula contenha uma porção da superfície externa. Resumindo, a divergência da densidade de fluxo por um volume leva ao mesmo resultado que o processo de determinar o fluxo líquido que atravessa a superfície delimitadora.

EXEMPLO 3.5

Calcule ambos os lados do teorema da divergência para o campo $\mathbf{D} = 2xy\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y$ C/m^2 e o paralelepípedo retangular formado pelos planos $x = 0$ e 1, $y = 0$ e 2, e $z = 0$ e 3.

Solução. Calculando primeiramente a integral na superfície, notamos que **D** é paralelo às superfícies $z = 0$ e $z = 3$, de forma que $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$. Para as quatro superfícies restantes, temos

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^3 \int_0^2 (\mathbf{D})_{x=0} \cdot (-dy\,dz\,\mathbf{a}_x) + \int_0^3 \int_0^2 (\mathbf{D})_{x=1} \cdot (dy\,dz\,\mathbf{a}_x)$$
$$+ \int_0^3 \int_0^1 (\mathbf{D})_{y=0} \cdot (-dx\,dz\,\mathbf{a}_y) + \int_0^3 \int_0^1 (\mathbf{D})_{y=2} \cdot (dx\,dz\,\mathbf{a}_y)$$

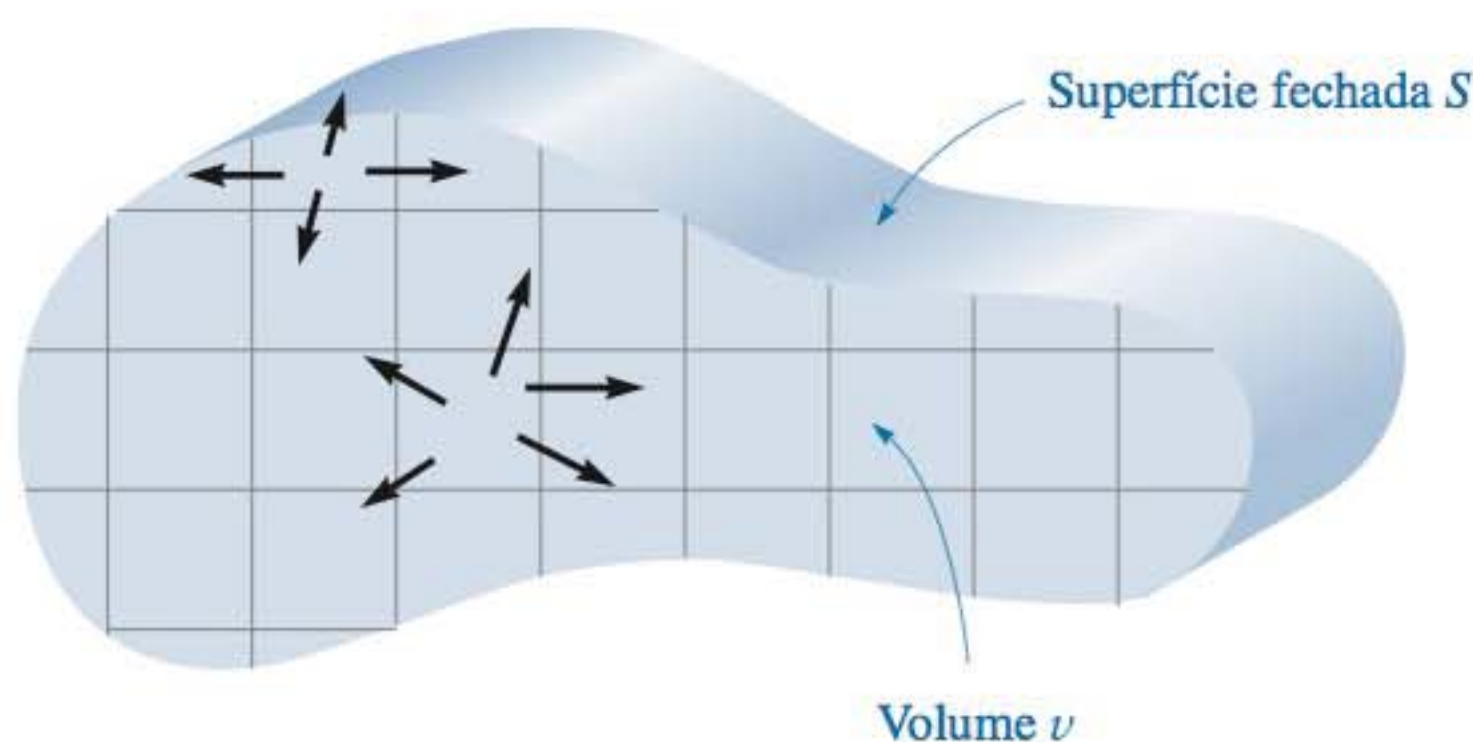



Figura 3.7 O teorema da divergência define que o fluxo total que atravessa a superfície fechada é igual à integral da divergência da densidade de fluxo dentro do volume envolvido. Uma seção reta do volume é aqui mostrada.

$$= -\int_0^3 \int_0^2 (D_x)_{x=0} dy\, dz + \int_0^3 \int_0^2 (D_x)_{x=1} dy\, dz$$
$$- \int_0^3 \int_0^1 (D_y)_{y=0} dx\, dz + \int_0^3 \int_0^1 (D_y)_{y=2} dx\, dz$$

Entretanto, $(D_x)_{x=0} = 0$ e $(D_y)_{y=0} = (D_y)_{y=2}$, o que deixa apenas

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^3 \int_0^2 (D_x)_{x=1} dy\, dz = \int_0^3 \int_0^2 2y\, dy\, dz$$
$$= \int_0^3 4\, dz = 12$$

Uma vez que

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2) = 2y$$

a integral volumétrica se torna

$$\int_{\text{vol}} \nabla \cdot \mathbf{D}\, dv = \int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 2y\, dx\, dy\, dz = \int_0^3 \int_0^2 2y\, dy\, dz$$
$$= \int_0^3 4\, dz = 12$$

e assim a prova está completa. Lembrando da lei de Gauss, percebemos que também determinamos que uma carga total de 12 C encontra-se dentro desse paralelepípedo.

EP3.9. Dado o campo $\mathbf{D} = 6\rho \operatorname{sen} \frac{1}{2}\phi \mathbf{a}_\rho + 1{,}5\rho \cos \frac{1}{2}\phi \mathbf{a}_\phi$ C/m^2, calcule ambos os lados do teorema da divergência para a região delimitada por $\rho = 2$, $\phi = 0$, $\phi = \pi$, $z = 0$ e $z = 5$.

Resp. 225; 225

REFERÊNCIAS

1. Kraus, J. D. and D. A. Fleisch. *Electromagnetics*, 5. ed. New York: McGraw-Hill, 1999. O campo elétrico estático no espaço livre é introduzido no Capítulo 2.
2. Plonsey, R. and R. E. Collin. *Principles and Applications of Electromagnetic Fields*. New York: McGraw-Hill, 1961. O nível desse texto é mais elevado do que este que estamos lendo agora, mas esse é um texto excelente para se ler em seguida. A lei de Gauss aparece no segundo capítulo.
3. Plonus, M. A. *Applied Electromagnetics*. New York: McGraw-Hill, 1978. Esse livro contém descrições bastante detalhadas de muitos dispositivos práticos que ilustram aplicações eletromagnéticas. Como exemplo, veja a discussão sobre xerografia como uma aplicação eletrostática nas páginas 95-98.
4. Skilling, H. H. *Fundamentals of Electric Waves*. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1948. As operações de cálculo vetorial são bem ilustradas. A divergência é discutida nas páginas 22 e 38. O Capítulo 1 é uma leitura interessante.

5. Thomas, G. B. Jr. and R. L. Finney. (Ver Referências sugeridas no Capítulo 1). O teorema da divergência é desenvolvido e ilustrado por vários diferentes pontos de vista nas páginas 976-980.

Quizzes

PROBLEMAS

3.1 Suponha que o experimento de Faraday, com esferas concêntricas, seja realizado no espaço livre com a utilização de uma carga central na origem, Q_1, e com hemisférios de raio a. Uma segunda carga Q_2 (uma carga pontual) está localizada a uma distância R de Q_1, com R >> a. (*a*) Qual é a força sobre a carga pontual antes dos hemisférios serem reunidos ao redor de Q_1? (*b*) Qual é a força sobre a carga pontual após os hemisférios serem reunidos, mas antes de serem descarregados? (*c*) Qual é a força sobre a carga pontual após os hemisférios serem reunidos e descarregados? (*d*) Descreva, qualitativamente, o que acontece à medida que Q_2 é movido em direção à montagem de esferas de tal modo que a condição $R >> a$ não seja mais válida.

3.2 Um campo elétrico no espaço livre é dado pela seguinte expressão: $\mathbf{E} = (5z^2/\epsilon_0)\,\hat{\mathbf{a}}_z$ V/m. Determine a carga total contida no interior de um cubo centrado na origem e com lado de 4 m, no qual todos os lados são paralelos aos eixos coordenados (e, em consequência onde cada lado intercepta um eixo em ± 2).

3.3 A superfície cilíndrica $\rho = 8$ cm contém a densidade superficial de cargas $\rho_S = 5e^{-20|z|}$ nC/m^2. (*a*) Qual é o valor da carga total presente? (*b*) Qual é o fluxo elétrico que deixa a superfície $\rho = 8$ cm, $1 \text{ cm} < z < 5$ cm, $30° < \phi < 90°$?

3.4 Um campo elétrico no espaço livre é $\mathbf{E} = (5z^3/\epsilon_0)\,\hat{\mathbf{a}}_z$ V/m. Encontre a carga total contida no interior de uma esfera de raio igual a 3 m, centrada na origem.

3.5 Seja $\mathbf{D} = 4xy\mathbf{a}_x + 2(x^2 + z^2)\mathbf{a}_y + 4yz\mathbf{a}_z$ C/m^2. Calcule as integrais de superfície para encontrar a carga total dentro do paralelepípedo retangular $0 < x < 2, 0 < y < 3, 0 < z < 5$ m.

3.6 No espaço livre, uma carga volumétrica de densidade constante $\rho_v = \rho_0$ existe na região $-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$ e $-d/2 < z < d/2$. Encontre **D** e **E** em todos os pontos.

3.7 Uma densidade volumétrica de cargas está posicionada no espaço livre segundo $\rho_v = 2e^{-1.000r}$ nC/m^3 para $0 < r < 1$ mm, e $\rho_v = 0$ nos outros lugares. (*a*) Encontre a carga total dentro da superfície esférica $r = 1$ mm. (*b*) Usando a lei de Gauss, calcule o calor de D_r na superfície $r = 1$ mm.

3.8 Use a lei de Gauss na forma integral para mostrar que um campo que varia com o inverso da distância em coordenadas esféricas, $\mathbf{D} = A\mathbf{a}_r/r$, onde A é uma constante, necessita de todas as cascas esféricas de 1 m de espessura para conter $4\pi A$ coulombs de carga. Isso indica uma distribuição contínua de cargas? Se sim, encontre a variação da densidade de cargas com r.

3.9 Uma densidade volumétrica uniforme de cargas de 80 μC/m^3 está presente na região 8 mm $< r <$ 10 mm. Seja $\rho_v = 0$ para $0 < r < 8$ mm. (*a*) Encontre

a carga total dentro da superfície esférica $r = 10$ mm. (*b*) Encontre D_r em $r = 10$ mm. (*c*) Se não existe carga para $r > 10$ mm, encontre D_r em $r = 20$ mm.

3.10 Um cilindro dielétrico, infinitamente longo, de raio b, contém carga no interior de seu volume de densidade $\rho_v = a\rho^2$, onde a é uma constante. Encontre a intensidade de campo elétrico no interior e no exterior do cilindro.

3.11 Em coordenadas cilíndricas, seja $\rho_v = 0$ para $\rho < 1$ mm, $\rho_v = 2$ sen (2.000 $\pi\rho$) nC/m^3 para 1 mm $< \rho <$ 1,5 mm, e $\rho_v = 0$ para $\rho >$ 1,5 mm. Calcule $\mathbf{D}$ em todos os lugares.

3.12 O Sol irradia uma potência total de aproximadamente $3{,}86 \times 10^{26}$ watts (W). Se imaginarmos a superfície do Sol demarcada com latitude e longitude e considerarmos uma irradiação uniforme, (*a*) que potência é irradiada pela região que se localiza entre a latitude 50° N (norte) e 60° N e longitude 12° O (oeste) e 27° O? (*b*) Qual é a densidade de potência em uma superfície esférica a 149.668.992 km (93.000.000 milhas) do Sol, em W/m^2?

3.13 Superfícies esféricas em $r = 2$, 4 e 6 m carregam densidades superficiais uniformes de cargas de 20 nC/m^2, -4 nC/m^2 e ρ_{S0}, respectivamente. (*a*) Encontre $\mathbf{D}$ em $r = 1$, 3 e 5 m. (*b*) Determine ρ_{S0} tal que $\mathbf{D} = 0$ em $r = 7$m.

3.14 Um determinado diodo emissor de luz (LED) está centrado na origem com sua superfície no plano *xy*. Em grandes distâncias, o LED pode ser aproximado por um ponto, mas a geometria superficial brilhante produz um padrão de radiação de campo distante que segue uma lei *cossenoidal*: ou seja, a densidade de potência (fluxo) ótica em watts/m^2 (W/m^2) é dada, em coordenadas esféricas, por

$$\mathbf{P}_d = P_0 \frac{\cos^2\theta}{2\pi r^2}\,\mathbf{a}_r \qquad \text{watts/m}^2$$

onde θ é o ângulo medido em relação à direção normal à superfície do LED (neste caso, o eixo z) e r é a distância radial da origem ao ponto no qual a potência é detectada. (*a*) Utilizando P_0, encontre a potência total, em watts (W), emitida pelo LED no semiespaço superior; (*b*) Encontre o ângulo do cone θ_1 no interior do qual metade da potência total é irradiada, ou seja, no interior da faixa $0 < \theta < \theta_1$; (*c*) Um detector ótico, de 1 mm^2 de área de seção transversal, está posicionado em $r = 1$ m e em $\theta = 45°$ de tal forma que cobre o LED. Se 1 nW (nano watt) é medido pelo detector, qual é o valor de P_0 (em uma estimativa muito boa)?

3.15 Uma densidade volumétrica de carga está posicionada da seguinte maneira: $\rho_v = 0$ para $\rho < 1$ mm e para $\rho > 2$ mm, $\rho_v = 4\rho$ μC/m^3 para $1 < \rho < 2$ mm. (*a*) Calcule a carga total na região $0 < \rho < \rho_1$, $0 < z < L$, onde $1 < \rho_1 < 2$ mm. (*b*) Use a lei de Gauss para determinar D_ρ em $\rho = \rho_1$. (*c*) Calcule D_ρ em $\rho = 0{,}8$ mm, 1,6 mm e 2,4 mm.

3.16 Uma densidade de fluxo elétrico é dada por $\mathbf{D} = D_0\mathbf{a}_\rho$, onde D_0 é uma constante conhecida. (*a*) Que densidade de carga gera este campo? (*b*) Para o campo fornecido, qual carga total está contida no interior de um cilindro de raio a e altura b, onde o eixo do cilindro corresponde ao eixo z?

3.17 Um cubo é definido por $1 < x, y, z < 1{,}2$. Se $\mathbf{D} = 2x^2y\mathbf{a}_x + 3x^2y^2\mathbf{a}_y$ C/m^2: (*a*) Aplique a lei de Gauss para calcular o fluxo total que deixa a superfície fechada do cubo. (*b*) Calcule $\nabla \cdot \mathbf{D}$ no centro do cubo. (*c*) Estime a carga total dentro do cubo usando a Equação (8).

3.18 Determine se a divergência dos seguintes campos vetoriais é positiva, negativa ou zero: (*a*) o fluxo de energia térmica em J/(m^{2}s) em qualquer ponto em um cubo de gelo em processo de resfriamento; (*b*) a densidade de corrente em A/m^2 em um barramento que conduz corrente contínua; (*c*) a taxa de fluxo de massa em kg/(m^{2}s) abaixo da superfície da água em uma bacia, na qual a água está circulando no sentido horário quando vista por cima.

3.19 Uma superfície esférica de raio 3 mm está centrada em $P(4, 1, 5)$ no espaço livre. Considere $\mathbf{D} = x\mathbf{a}_x$ C/m^2 e use os resultados da Seção 3.4 para estimar o fluxo elétrico líquido que deixa a superfície esférica.

3.20 Uma distribuição radial de campo elétrico, no espaço livre, é dada, em coordenadas esféricas, por:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{r\rho_0}{3\epsilon_0}\,\mathbf{a}_r \qquad (r \leq a)$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{(2a^3 - r^3)\rho_0}{3\epsilon_0 r^2}\,\mathbf{a}_r \qquad (a \leq r \leq b)$$

$$\mathbf{E}_3 = \frac{(2a^3 - b^3)\rho_0}{3\epsilon_0 r^2}\,\mathbf{a}_r \qquad (r \geq b)$$

onde ρ_0, a e b são constantes. (*a*) Determine a densidade volumétrica de carga na região inteira ($0 \leq r \leq \infty$) mediante o uso apropriado de $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$. (*b*) Utilizando os parâmetros fornecidos, encontre a carga total, Q, no interior de uma esfera de raio r, onde $r > b$.

3.21 Calcule $\nabla \cdot \mathbf{D}$ no ponto especificado se (*a*) $\mathbf{D} = (1/z^2)[10xyz\,\mathbf{a}_x + 5x^2z\,\mathbf{a}_y + (2z^3 - 5x^2y)\,\mathbf{a}_z]$ em $P(-2, 3, 5)$; (*b*) $\mathbf{D} = 5z^2\,\mathbf{a}_\rho + 10\,\rho z\,\mathbf{a}_z$ em $P(3, -45°, 5)$; (*c*) $\mathbf{D} = 2r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{a}_r + r\cos\theta \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{a}_\theta + r\cos\phi\,\mathbf{a}_\phi$ em $P(3, 45°, -45°)$.

3.22 (*a*) Um campo de densidade de fluxo é dado como $\mathbf{F}_1 = 5\mathbf{a}_z$. Calcule o fluxo de $\mathbf{F}_1$ que sai de uma superfície hemisférica $r = a$, $0 < \theta < \pi/2$, $0 < \phi < 2\pi$. (*b*) Qual observação simples teria poupado bastante trabalho na parte *a*? (*c*) Agora suponha que o campo seja dado por $\mathbf{F}_2 = 5z\mathbf{a}_z$. Utilizando as integrais de superfície apropriadas, calcule o fluxo líquido de $\mathbf{F}_2$ que sai da superfície fechada que consiste do hemisfério da parte *a* e da sua base circular no plano *xy*. (*d*) Repita a parte *c* usando o teorema da divergência e uma integral volumétrica apropriada.

3.23 (*a*) Uma carga pontual Q localiza-se na origem. Mostre que div $\mathbf{D}$ é zero em todos os pontos exceto na origem. (*b*) Substitua a carga pontual por uma densidade volumétrica uniforme de carga ρ_{v0} para $0 < r < a$. Relacione ρ_{v0} com Q e a de modo que a carga total seja a mesma. Encontre div $\mathbf{D}$ em todos os pontos.

3.24 Em uma região no espaço livre, a densidade de fluxo elétrico é dada por

$$\mathbf{D} = \begin{cases} \rho_0(z+2d)\,\mathbf{a}_z \ \ \mathrm{C/m^2} & (-2d \le z \le 0) \\ -\rho_0(z-2d)\,\mathbf{a}_z \ \ \mathrm{C/m^2} & (0 \le z \le 2d) \end{cases}$$

Em qualquer outro lugar, $\mathbf{D} = 0$. (*a*) Usando $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$, encontre a densidade volumétrica de carga como função da posição em toda a parte. (*b*) Determine o fluxo elétrico que atravessa a superfície definida por $z = 0$, $-a \le x \le a$, $-b \le y \le b$. (*c*) Determine a carga total contida no interior da região $-a \le x \le a$, $-b \le y \le b$ e $-d \le z \le d$. (*d*) Determine a carga total contida no interior da região $-a \le x \le a$, $-b \le y \le b$ e $0 \le z \le 2d$.

3.25 Dentro da casca esférica $3 < r < 4$ m, a densidade de fluxo elétrico é dada por $\mathbf{D} = 5(r-3)^3\,\mathbf{a}_r\ \mathrm{C/m^2}$. (*a*) Qual é a densidade volumétrica de carga em $r = 4$? (*b*) Qual é a densidade de fluxo elétrico em $r = 4$? (*c*) Qual fluxo elétrico deixa a esfera $r = 4$? (*d*) Qual é a carga contida dentro da esfera $r = 4$?

3.26 Se tivermos um gás perfeito de densidade de massa ρ_m kg/m^3 e associarmos uma velocidade **U** m/s a cada elemento diferencial, então a taxa de fluxo de massa será $\rho_m\mathbf{U}$ kg/m^{2}s. Assim, considerações físicas levarão à *equação da continuidade*, $\nabla \cdot (\rho_m\mathbf{U}) = -\partial\rho_m / \partial t$. (*a*) Explique com palavras a interpretação física dessa equação. (*b*) Mostre que $\oint_s \rho_m\mathbf{U} \cdot d\mathbf{S} = -dM/dt$, onde M é a massa total do gás dentro da superfície fechada constante S, e explique o significado físico dessa equação.

3.27 Seja $\mathbf{D} = 5{,}00r^2\mathbf{a}_r$ mC/m^2 para $r \le 0{,}08$ m e $\mathbf{D} = 0{,}205\,\mathbf{a}_r/r^2$ μC/m^2 para $r \ge 0{,}08$ m. (*a*) Calcule ρ_v para $r = 0{,}06$ m. (*b*) Calcule ρ_v para $r = 0{,}1$ m. (*c*) Que densidade superficial de carga poderia ser posicionada em $r = 0{,}08$ m para fazer com que $\mathbf{D} = 0$ para $r > 0{,}08$ m?

3.28 Repita o Problema 3.8, mas use $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$ e escolha uma integral volumétrica apropriada.

3.29 Na região do espaço livre que inclui o volume $2 < x, y, z < 3$, $\mathbf{D} = \frac{2}{z^2}(yz\,\mathbf{a}_x + xz\,\mathbf{a}_y - 2xy\,\mathbf{a}_z)$ C/m^2. (*a*) Calcule o lado da integral volumétrica da equação do teorema da divergência para o volume aqui definido. (*b*) Calcule o lado da integral de superfície da superfície fechada correspondente.

3.30 (*a*) Use a primeira equação de Maxwell, $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$, para descrever a variação da intensidade de campo elétrico com x em uma região na qual não existe densidade de carga e na qual um dielétrico não homogêneo (heterogêneo) tem uma permissividade que aumenta exponencialmente com x. O campo tem somente um componente em x. (*b*) Repita a parte (*a*), mas com um campo elétrico na direção radial (coordenadas esféricas), onde novamente $\rho_v = 0$, mas em uma região na qual a permissividade *diminui* exponencialmente com r.

3.31 Dada a densidade de fluxo $\mathbf{D} = \frac{16}{r}\cos(2\theta)\,\mathbf{a}_\theta$ C/m^2, use dois métodos diferentes para calcular a carga total dentro da região $1 < r < 2$ m, $1 < \theta < 2$ rad, $1 < \phi < 2$ rad.

4

Energia e Potencial

Nos Capítulos 2 e 3 nos familiarizamos com a lei de Coulomb e com a sua utilização para determinar o campo elétrico devido a diversas distribuições simples de carga, e estudamos também a lei de Gauss e sua aplicação na determinação do campo devido a alguns arranjos simétricos de carga. O uso da lei de Gauss foi invariavelmente mais fácil para essas distribuições altamente simétricas, porque o problema da integração sempre desaparecia quando a superfície fechada apropriada era escolhida.

Entretanto, se tivéssemos tentado encontrar um campo ligeiramente mais complicado, tal como o de duas cargas pontuais diferentes separadas por uma pequena distância, perceberíamos ser impossível escolher uma superfície gaussiana apropriada e obter uma resposta. A lei de Coulomb, contudo, é mais poderosa e nos permite resolver problemas para os quais a lei de Gauss não é aplicável. A aplicação da lei de Coulomb é trabalhosa, detalhada e frequentemente bastante complexa; isso acontece porque a intensidade do campo elétrico (um campo vetorial) é encontrada diretamente da distribuição de cargas. Em geral, três integrações diferentes são necessárias, uma para cada componente, e a decomposição do vetor em componentes usualmente adiciona complexidade às integrais.

O ideal seria encontrar alguma função escalar, ainda não definida, com uma integração única, e então determinar o campo elétrico por meio desse escalar por algum procedimento simples e direto – diferenciação, por exemplo.

Essa função escalar existe, e é conhecida como o *potencial* ou *campo potencial*. Veremos que ela possui uma interpretação física muito real e é mais familiar para a maioria de nós do que o campo elétrico, que será utilizado para encontrá-la.

Assim, brevemente estaremos equipados com um terceiro método de calcular campos elétricos – uma integração escalar única, apesar de nem sempre tão simples quanto desejaríamos, seguida de uma prazerosa diferenciação.

4.1 ENERGIA GASTA NA MOVIMENTAÇÃO DE UMA CARGA PONTUAL EM UM CAMPO ELÉTRICO

A intensidade de campo elétrico foi definida como a força em uma carga unitária de teste no ponto em que desejamos calcular o valor do campo vetorial relacionado. Se tentarmos mover a carga de teste contra o campo elétrico, temos que exercer uma força igual e oposta àquela exercida pelo campo, e isso requer de nós o gasto de energia ou a realização de trabalho. Se desejarmos mover a carga na direção do campo, nosso gasto de energia se torna negativo, e não realizamos o trabalho: o campo o faz.

Suponha que desejemos mover uma carga Q por uma distância $d\mathbf{L}$ em um campo elétrico $\mathbf{E}$. A força em Q devida ao campo elétrico é

$$\mathbf{F}_E = Q\mathbf{E} \tag{1}$$

nessa equação, o subscrito nos lembra que essa força é decorrente do campo. O componente dessa força na direção de $d\mathbf{L}$ que devemos superar é

$$F_{EL} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a}_L = Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_L$$

onde $\mathbf{a}_L =$ um vetor unitário na direção de $d\mathbf{L}$.

A força que devemos aplicar é igual e oposta à força associada ao campo,

$$F_{\text{aplic}} = -Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_L$$

e nosso gasto de energia é o produto da força pela distância. Isto é, o trabalho diferencial realizado por uma fonte externa movendo a carga Q é $dW = -Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_L\, dL$, ou

$$dW = -Q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \tag{2}$$

onde substituímos $\mathbf{a}_L dL$ pela expressão mais simples $d\mathbf{L}$.

Essa quantidade diferencial de trabalho necessária pode ser zero sob diversas condições, determinadas facilmente da Equação (2). Existem as condições triviais para as quais $\mathbf{E}$, Q ou $d\mathbf{L}$ é zero, e um caso muito mais importante no qual $\mathbf{E}$ e $d\mathbf{L}$ são perpendiculares. Neste caso, a carga é sempre deslocada em uma direção que faz um ângulo reto com o campo elétrico. Podemos criar uma boa analogia entre o campo elétrico e o campo gravitacional onde, novamente, energia tem que ser gasta para se mover contra o campo. Deslizar uma massa com uma velocidade constante em uma superfície sem atrito é um processo que não exige esforço se a massa for deslocada ao longo de um contorno de elevação constante. Trabalho positivo ou negativo deve ser realizado ao movê-la para uma elevação mais alta ou mais baixa, respectivamente.

Retornando à carga no campo elétrico, o trabalho necessário para mover a carga por uma distância finita deve ser determinado por integração,

WW Interatividade

$$W = -Q \int_{\text{inicial}}^{\text{final}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \tag{3}$$

e o caminho deve ser especificado antes que a integral possa ser calculada. Considera--se que a carga esteja em repouso em ambas as suas posições – inicial e final.

Essa integral definida é básica para a teoria de campo, e vamos devotar a seção seguinte para a sua interpretação e cálculo.

EP4.1. Dado o campo elétrico $\mathbf{E} = \frac{1}{z^2}(8xyz\mathbf{a}_x + 4x^2z\mathbf{a}_y - 4x^2y\mathbf{a}_z)$ V/m, calcule a quantidade diferencial de trabalho exercido no deslocamento de uma carga de 6 nC por uma distância de 2 μm, começando em $P(2, -2, 3)$ e movimentando--se na direção $\mathbf{a}_L =$ (*a*) $-\frac{6}{7}\mathbf{a}_x + \frac{3}{7}\mathbf{a}_y + \frac{2}{7}\mathbf{a}_z$; (*b*) $\frac{6}{7}\mathbf{a}_x - \frac{3}{7}\mathbf{a}_y - \frac{2}{7}\mathbf{a}_z$; (*c*) $\frac{3}{7}\mathbf{a}_x + \frac{6}{7}\mathbf{a}_y$.

Resp. −149,3 fJ; 149,3 fJ; 0

4.2 INTEGRAL DE LINHA

A expressão da integral para o trabalho realizado no deslocamento de uma carga pontual Q de uma posição para outra, como na Equação (3), é um exemplo de uma integral de linha que, em notação de análise vetorial, sempre toma a forma da integral ao longo de um caminho predeterminado do produto escalar entre um campo vetorial e um vetor de comprimento diferencial $d\mathbf{L}$. Sem utilizar análise vetorial, teríamos que escrever

$$W = -Q \int_{\text{inicial}}^{\text{final}} E_L \, dL$$

onde $E_L =$ componente de $\mathbf{E}$ ao longo de $d\mathbf{L}$.

Uma integral de linha é semelhante a muitas outras integrais que aparecem em análise avançada – incluindo a integral de superfície que aparece na lei de Gauss, por esta ser essencialmente descritiva. Gostamos muito mais de olhar para ela do que resolvê-la. Ela nos diz para escolhermos um caminho, quebrá-lo em diversos segmentos muito pequenos, multiplicar o componente do campo ao longo de cada segmento pelo comprimento do segmento e, então, somar os resultados para todos os segmentos. Isso é um somatório, é claro, e a integral é obtida de forma exata somente quando o número de segmentos se torna infinito.

Esse procedimento é indicado na Figura 4.1, onde um caminho foi escolhido de uma posição inicial B até uma posição final[1] A e um *campo elétrico uniforme* foi selecionado por simplicidade. O caminho é dividido em seis segmentos, $\Delta\mathbf{L}_1$, $\Delta\mathbf{L}_2$, …, $\Delta\mathbf{L}_6$, e os componentes de $\mathbf{E}$ na direção de cada segmento são denotados por E_{L1}, E_{L2}, …, E_{L6}. Assim, o trabalho envolvido na movimentação de uma carga Q de B até A é aproximadamente

$$W = -Q(E_{L1}\Delta L_1 + E_{L2}\Delta L_2 + \cdots + E_{L6}\Delta L_6)$$

ou, utilizando notação vetorial,

$$W = -Q(\mathbf{E}_1 \cdot \Delta\mathbf{L}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot \Delta\mathbf{L}_2 + \cdots + \mathbf{E}_6 \cdot \Delta\mathbf{L}_6)$$

[1] À posição final é dada a designação A para corresponder à convenção para diferença de potencial, conforme discutido na seção seguinte.

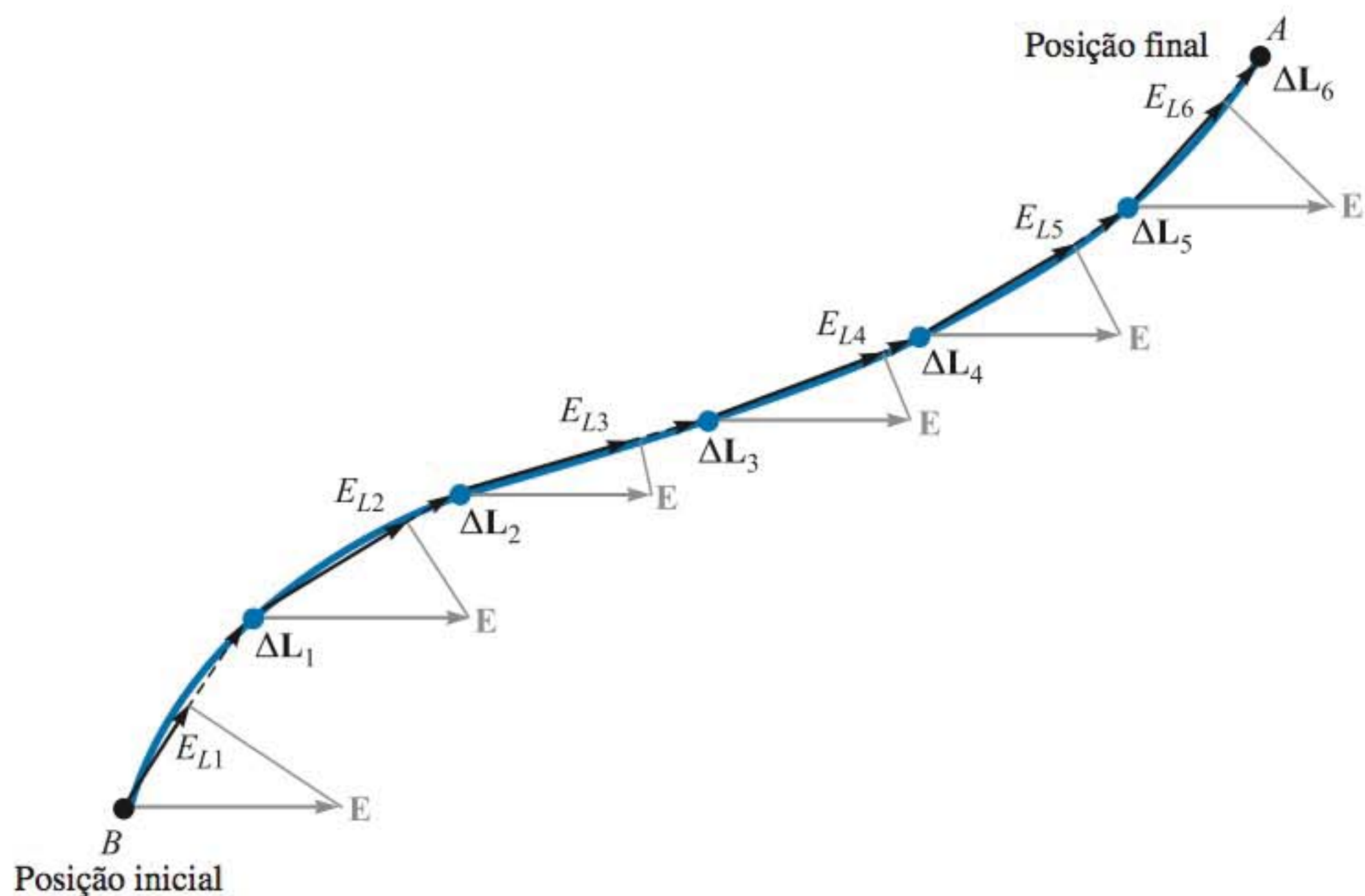



Figura 4.1 Uma interpretação gráfica de uma integral de linha em um campo uniforme. A integral de linha de E entre os pontos *B* e *A* é independente do caminho escolhido, mesmo em um campo não uniforme. Em geral, esse resultado não é verdadeiro para campos que variam no tempo.

e uma vez que consideramos um campo uniforme,

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \cdots = \mathbf{E}_6$$
$$W = -Q\mathbf{E} \cdot (\Delta\mathbf{L}_1 + \Delta\mathbf{L}_2 + \cdots + \Delta\mathbf{L}_6)$$

Qual é essa soma de segmentos de vetores entre esses últimos parênteses? Vetores se somam pela lei do paralelogramo, e a soma é justamente o vetor direcionado do ponto inicial B ao ponto final A, $\mathbf{L}_{BA}$. Logo,

$$W = -Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{L}_{BA} \qquad (\mathbf{E}\text{ uniforme}) \tag{4}$$

Lembrando da interpretação do somatório da integral de linha, podemos agora obter esse resultado para o campo uniforme de forma rápida a partir da expressão para a integral

$$W = -Q \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \tag{5}$$

quando aplicada a um campo uniforme

$$W = -Q\mathbf{E} \cdot \int_B^A d\mathbf{L}$$

onde a última integral se torna $\mathbf{L}_{BA}$ e

$$W = -Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{L}_{BA} \qquad (\mathbf{E}\text{ uniforme})$$

Para esse caso especial de uma intensidade de campo elétrico uniforme, devemos notar que o trabalho envolvido no deslocamento da carga depende apenas de Q, $\mathbf{E}$ e

$\mathbf{L}_{BA}$, um vetor desenhado do ponto inicial ao ponto final do caminho escolhido. Ele não depende do caminho específico que selecionamos ao longo do qual movemos a carga. Podemos ir de B até A por uma linha reta ou pela via *Old Chisholm Trail**, que o resultado será o mesmo. Vamos mostrar na Seção 4.5 que uma afirmação idêntica pode ser feita para qualquer campo $\mathbf{E}$ não uniforme (estático).

Vamos utilizar diversos exemplos para ilustrar a mecânica de montagem da integral de linha que aparece na Equação (5).

EXEMPLO 4.1

Dado o campo não uniforme

$$\mathbf{E} = y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$$

devemos determinar o trabalho realizado para deslocar 2 C de $B(1, 0, 1)$ até $A(0{,}8, 0{,}6, 1)$ ao longo do arco mais curto do círculo

$$x^2 + y^2 = 1 \quad z = 1$$

Solução. Usamos $W = -Q\int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$, onde $\mathbf{E}$ não é necessariamente constante (ou uniforme). Trabalhando em coordenadas cartesianas, o caminho diferencial $d\mathbf{L}$ é $dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z$, e a integral se torna

$$\begin{aligned} W &= -Q\int_B^A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} \\ &= -2\int_B^A (y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z)\cdot(dx\,\mathbf{a}_x + dy\,\mathbf{a}_y + dz\,\mathbf{a}_z) \\ &= -2\int_1^{0,8} y\,dx - 2\int_0^{0,6} x\,dy - 4\int_1^1 dz \end{aligned}$$

Os limites das integrais foram escolhidos de forma a corresponder aos valores inicial e final da variável de integração apropriada. Utilizando a equação do caminho circular (e selecionando o sinal da raiz que for correto para o quadrante envolvido), temos

$$\begin{aligned} W &= -2\int_1^{0,8} \sqrt{1-x^2}\,dx - 2\int_0^{0,6} \sqrt{1-y^2}\,dy - 0 \\ &= -\left[x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{sen}^{-1} x\right]_1^{0,8} - \left[y\sqrt{1-y^2} + \operatorname{sen}^{-1} y\right]_0^{0,6} \\ &= -(0{,}48 + 0{,}927 - 0 - 1{,}571) - (0{,}48 + 0{,}644 - 0 - 0) \\ &= -0{,}96\,\text{J} \end{aligned}$$

---

* N. de T.: O autor, nesse caso, quis fazer referência a um caminho bastante tortuoso.

EXEMPLO 4.2

Calcule novamente o trabalho necessário para deslocar 2 C de B até A no mesmo campo, mas dessa vez utilizando como caminho a linha reta que une B a A.

Solução. Começamos determinando as equações da linha reta. Quaisquer duas das seguintes três equações para planos que passam pela reta são suficientes para definir a reta

$$y - y_B = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}(x - x_B)$$

$$z - z_B = \frac{z_A - z_B}{y_A - y_B}(y - y_B)$$

$$x - x_B = \frac{x_A - x_B}{z_A - z_B}(z - z_B)$$

Da primeira equação temos

$$y = -3(x - 1)$$

e da segunda obtemos

$$z = 1$$

Logo,

$$\begin{aligned} W &= -2\int_1^{0,8} y\,dx - 2\int_0^{0,6} x\,dy - 4\int_1^1 dz \\ &= 6\int_1^{0,8} (x-1)\,dx - 2\int_0^{0,6} \left(1 - \frac{y}{3}\right) dy \\ &= -0{,}96 \text{ J} \end{aligned}$$

Essa é a mesma resposta que encontramos utilizando o caminho circular entre os mesmos dois pontos, e isso novamente demonstra a afirmação (ainda não provada) de que o trabalho realizado é independente do caminho tomado, em qualquer campo eletrostático.

Deve-se notar que as equações da linha reta mostram que $dy = -3\,dx$ e $dx = -\frac{1}{3}\,dy$. Essas substituições podem ser realizadas nas duas primeiras integrais, juntamente com uma mudança nos limites, e a resposta pode ser obtida calculando-se as novas integrais. Esse método é frequentemente mais simples se o integrando for função de uma única variável.

Note que as expressões para $d\mathbf{L}$ nos nossos três sistemas de coordenadas utilizam os comprimentos diferenciais obtidos no Capítulo 1 (cartesianas na Seção 1.3, cilíndricas na Seção 1.8 e esféricas na Seção 1.9):

$$d\mathbf{L} = dx\,\mathbf{a}_x + dy\,\mathbf{a}_y + dz\,\mathbf{a}_z \quad \text{(cartesianas)} \tag{6}$$

$$d\mathbf{L} = d\rho\,\mathbf{a}_\rho + \rho\,d\phi\mathbf{a}_\phi + dz\,\mathbf{a}_z \quad \text{(cilíndricas)} \tag{7}$$

$$d\mathbf{L} = dr\,\mathbf{a}_r + r\,d\theta\,\mathbf{a}_\theta + r\,\text{sen}\,\theta\,d\phi\,\mathbf{a}_\phi \quad \text{(esféricas)} \tag{8}$$

As inter-relações entre as diversas variáveis, em cada expressão, são determinadas a partir das equações específicas para o caminho.

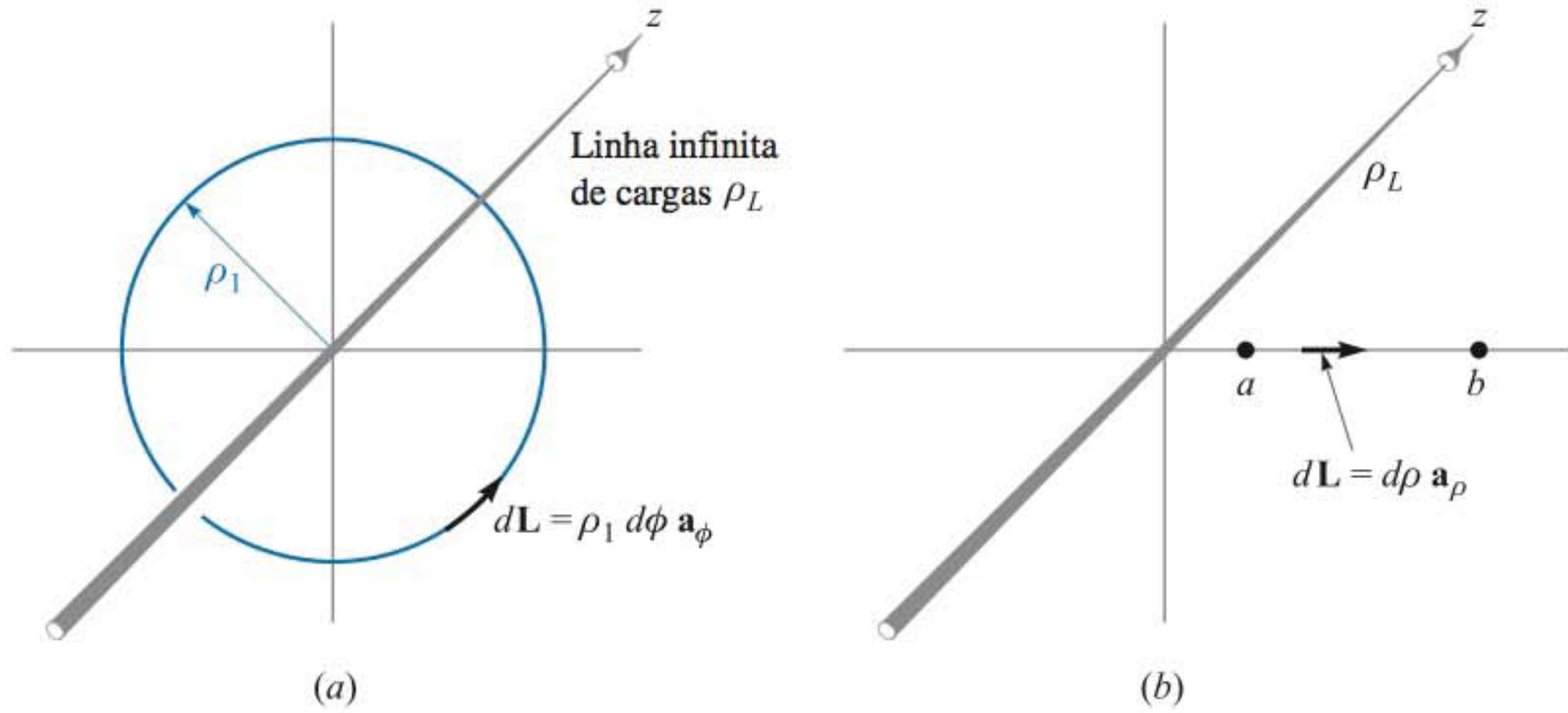



Figura 4.2 (*a*) Um caminho circular e (*b*) um caminho radial ao longo do qual uma carga Q é deslocada no campo de uma linha infinita de cargas. Nenhum trabalho é esperado no primeiro caso.

Como um exemplo final ilustrando o cálculo da integral de linha, vamos investigar diversos caminhos que poderíamos tomar próximo de uma linha infinita de cargas. O campo já foi obtido diversas vezes e está totalmente na direção radial,

$$\mathbf{E} = E_\rho \mathbf{a}_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}\mathbf{a}_\rho$$

Primeiro, vamos encontrar o trabalho realizado no deslocamento da carga positiva Q por um caminho circular de raio ρ_1 centrado na linha de cargas, conforme ilustrado na Figura 4.2*a*. Sem pegar no lápis, vemos que o trabalho deve ser nulo, pois o caminho é sempre perpendicular à intensidade de campo elétrico, ou a força na carga é sempre exercida em ângulos retos em relação à direção na qual a estamos movendo. Pela prática, entretanto, vamos montar a integral e obter a resposta.

O elemento diferencial $d\mathbf{L}$ é escolhido em coordenadas cilíndricas, e o caminho circular selecionado demanda que o $d\rho$ e dz sejam zero, de forma que $d\mathbf{L} = \rho_1\, d\phi\, \mathbf{a}_\phi$. O trabalho é, então,

$$W = -Q\int_{\text{inicial}}^{\text{final}} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho_1}\mathbf{a}_\rho \cdot \rho_1\, d\phi\, \mathbf{a}_\phi$$

$$= -Q\int_0^{2\pi} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} d\phi\, \mathbf{a}_\rho \cdot \mathbf{a}_\phi = 0$$

Agora, deslocaremos a carga de $\rho = a$ até $\rho = b$ ao longo de um caminho radial (Figura 4.2*b*). Neste caso, $d\mathbf{L} = d\rho\, \mathbf{a}_\rho$ e

$$W = -Q\int_{\text{inicial}}^{\text{final}} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}\mathbf{a}_\rho \cdot d\rho\, \mathbf{a}_\rho = -Q\int_a^b \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0}\frac{d\rho}{\rho}$$

ou

$$W = -\frac{Q\rho_L}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

Uma vez que b é maior que a, $\ln(b/a)$ é positivo e o trabalho realizado é negativo, indicando que a fonte externa, que está movendo a carga, recebe energia.

Uma das armadilhas no cálculo de integrais de linha é a tendência de se utilizar muitos sinais negativos quando uma carga é deslocada na direção de um valor *decrescente* de coordenada. Os limites da integral dão conta disso completamente, e nenhuma tentativa mal orientada deve ser feita para mudar o sinal de $d\mathbf{L}$. Suponha que desloquemos Q de b até a (Figura 4.2b). Ainda teremos $d\mathbf{L} = d\rho\, \mathbf{a}_\rho$, e o sentido diferente será mostrado reconhecendo-se $\rho = b$ como o ponto inicial e $\rho = a$ como o ponto final,

$$W = -Q \int_b^a \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{Q\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

Essa é a negativa da resposta anterior, e está obviamente correta.

EP4.2. Calcule o trabalho realizado no deslocamento de uma carga de 4 C de $B(1, 0, 0)$ até $A(0, 2, 0)$ pelo caminho $y = 2 - 2x$, $z = 0$ no campo $\mathbf{E} =$ (a) $5\mathbf{a}_x$ V/m, (b) $5x\mathbf{a}_x$ V/m; (c) $5x\mathbf{a}_x + 5y\mathbf{a}_y$ V/m.

Resp. 20 J; 10 J; −30 J

EP4.3. Veremos mais tarde que um campo $\mathbf{E}$ variante no tempo não é conservativo. (Se ele não for conservativo, o trabalho expresso pela Equação (3) deve ser uma função do caminho utilizado.) Sendo $\mathbf{E} = y\mathbf{a}_x$ V/m em certo instante de tempo, calcule o trabalho necessário para deslocar uma carga de 3 C de (1, 3, 5) até (2, 0, 3) ao longo dos segmentos de linha reta que unem: (a) (1, 3, 5) a (2, 3, 5) a (2, 0, 5) a (2, 0, 3); (b) (1, 3, 5) a (1, 3, 3) a (1, 0, 3) a (2, 0, 3).

Resp. −9 J; 0

4.3 DEFINIÇÃO DE DIFERENÇA DE POTENCIAL E POTENCIAL

WW Ilustração

Estamos agora prontos para definir um novo conceito a partir da expressão para o trabalho realizado por uma fonte externa no deslocamento de uma carga Q de um ponto a outro em um campo elétrico $\mathbf{E}$: a *diferença de potencial e trabalho*.

$$W = -Q \int_{\text{inicial}}^{\text{final}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

De forma muito semelhante àquela na qual definimos a intensidade de campo elétrico como a força em uma carga de teste *unitária*, definimos agora *diferença de potencial V* como o trabalho realizado (por uma fonte externa) no deslocamento de uma carga positiva *unitária* de um ponto a outro no campo elétrico,

$$\text{Diferença de potencial} = V = -\int_{\text{inicial}}^{\text{final}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \qquad (9)$$

Temos que concordar com relação à direção do movimento; fazemos isso definindo que V_{AB} significa a diferença de potencial entre os pontos A e B, além de ser o trabalho realizado no deslocamento da carga unitária de B (mencionado por último) até A (mencionado primeiro). Com isso, ao determinar V_{AB}, temos que B é o ponto inicial e A é o ponto final. A razão para tal definição, até certo ponto peculiar, se tornará clara em breve, quando for visto que o ponto inicial B é frequentemente tomado como estando no infinito, enquanto o ponto final A representa a posição fixa da carga. O ponto A é, portanto, intrinsecamente mais significativo.

A diferença de potencial é medida em joules por coulomb, para o qual o *volt* é definido como uma unidade mais usual, e abreviado como V. Logo, a diferença de potencial entre os pontos A e B é

$$V_{AB} = -\int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \text{ V} \tag{10}$$

e V_{AB} é positivo se o trabalho é realizado no deslocamento da carga positiva de B até A.

Pelo exemplo da linha de cargas da Seção 4.2, encontramos que o trabalho realizado para deslocar uma carga Q de $\rho = b$ até $\rho = a$ era

$$W = \frac{Q\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

Logo, a diferença de potencial entre os pontos $\rho = a$ e $\rho = b$ é

$$V_{ab} = \frac{W}{Q} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} \tag{11}$$

Podemos treinar o emprego dessa definição, encontrando a diferença de potencial entre os pontos A e B em distâncias radiais r_A e r_B em relação a uma carga pontual Q. Escolhendo a origem em Q,

$$\mathbf{E} = E_r \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

e

$$d\mathbf{L} = dr\, \mathbf{ar}$$

temos

$$V_{AB} = -\int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\int_{r_B}^{r_A} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\, dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) \tag{12}$$

Se $r_B > r_A$, a diferença de potencial V_{AB} é positiva, indicando que energia é despendida pela fonte externa quando traz a carga positiva de r_B até r_A. Isso está de acordo com a evidência física segundo a qual duas cargas iguais se repelem.

Frequentemente, é mais conveniente falar em *potencial* (ou *potencial absoluto*) de um ponto do que em diferença de potencial entre dois pontos. Mas isso significa apenas que concordamos em medir toda a diferença de potencial em relação a um ponto de referência específico, o qual consideramos ter potencial igual a zero. Um entendimento comum deve ser alcançado com relação ao zero de referência antes

que uma definição de potencial tenha sentido. Uma pessoa que coloca uma mão nas placas de deflexão de um tubo de raios catódicos (as quais estão "em um potencial de 50 V") e a outra mão no terminal do catodo, provavelmente, estaria tremendo muito para entender que o catodo não é o zero de referência, mas que todos os potenciais nesse circuito são usualmente medidos com relação à blindagem metálica em volta do tubo. O catodo pode estar a vários milhares de volts negativo em relação à blindagem.

Talvez o ponto zero de referência mais universal em medições de potenciais experimentais ou físicos seja a "terra", pela qual queremos dizer o potencial da região superficial da própria Terra. Teoricamente, usualmente representamos essa superfície por um plano infinito de potencial igual a zero, apesar de alguns problemas que envolvem largas escalas, tais como aqueles envolvendo propagação pelo Oceano Atlântico, necessitarem de uma superfície esférica de potencial zero.

Outro "ponto" de referência largamente utilizado é o infinito. Isso normalmente aparece em problemas teóricos que abordam uma situação física na qual a superfície da Terra está relativamente longe da região em que estamos interessados, tal como o campo estático próximo à ponta da asa de um avião (que adquiriu uma carga ao voar por uma tempestade), ou o campo dentro de um átomo. Trabalhando com o campo potencial *gravitacional* na Terra, o zero de referência é normalmente tomado ao nível do mar. Para uma missão interplanetária, contudo, o zero de referência é mais convenientemente escolhido no infinito.

Uma superfície cilíndrica com algum raio definido pode, ocasionalmente, ser utilizada como um zero de referência quando a simetria cilíndrica está presente e o infinito se mostra inconveniente. Num cabo coaxial, o condutor externo é selecionado como o zero de referência para o potencial. Além disso, obviamente existem numerosos problemas especiais, tais como aqueles para os quais um hiperboloide de duas camadas ou um esferoide achatado nos polos deve ser selecionado como a referência de potencial zero, mas esses casos não nos devem preocupar por enquanto.

Se o potencial no ponto A é V_A e aquele no ponto B é V_B, então

$$\boxed{V_{AB} = V_A - V_B} \tag{13}$$

onde, necessariamente, concordamos que V_A e V_B possuem o mesmo ponto de zero de referência.

EP4.4. Um campo elétrico é expresso em coordenadas cartesianas por $\mathbf{E} = 6x^2\mathbf{a}_x + 6y\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$ V/m. Calcule (*a*) V_{MN} se os pontos M e N são especificados por $M(2, 6, -1)$ e $N(-3, -3, 2)$; (*b*) V_M se $V = 0$ em $Q(4, -2, -35)$; (*c*) V_N se $V = 2$ em $P(1, 2, -4)$.

Resp. $-139{,}0$ V; $-120{,}0$ V; $19{,}0$ V

4.4 CAMPO POTENCIAL DE UMA CARGA PONTUAL

Na Seção 4.3 encontramos, na Equação (12), uma expressão para a diferença de potencial entre dois pontos posicionados em $r = r_A$ e $r = r_B$ no campo de uma carga

pontual Q situada na origem. Como podemos, de forma conveniente, definir um zero de referência de potencial? A possibilidade mais simples é fazer $V = 0$ no infinito. Se deixarmos o ponto $r = r_B$ retroceder até o infinito, o potencial em r_A torna-se

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A}$$

ou, como não existe razão para identificar este ponto com o subscrito A,

$$\boxed{V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}} \tag{14}$$

Essa expressão define o potencial em qualquer ponto a uma distância r da carga pontual Q na origem, sendo o potencial em um raio infinito tomado como zero de referência. Retornando para uma interpretação física, podemos dizer que $Q/4\pi\epsilon_0 r$ joules de trabalho devem ser realizados quando se desloca uma carga de 1 C do infinito até qualquer ponto a r metros da carga Q.

Um método conveniente para expressar o potencial, sem selecionar um zero de referência específico, seria identificar r_A como r novamente e fazer $Q/4\pi\epsilon_0 r_B$ ser uma constante. Então

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + C_1 \tag{15}$$

e C_1 deve ser escolhido de modo que $V = 0$ em qualquer valor desejado de r. Poderíamos, também, selecionar o zero de referência indiretamente, escolhendo V para ser V_0 em $r = r_0$.

Deve-se notar que a *diferença de potencial* entre dois pontos não é uma função de C_1.

As Equações (14) e (15) representam o campo potencial de uma carga pontual. O potencial é um campo escalar e não envolve vetor unitário.

Vamos agora definir uma *superfície equipotencial* como a superfície composta de todos aqueles pontos que possuem o mesmo valor de potencial. Todas as linhas de campo devem ser perpendiculares à superfície equipotencial, nos pontos onde tais linhas interceptarem a superfície. Portanto, não há trabalho envolvido no deslocamento de uma carga unitária por uma superfície equipotencial. As superfícies equipotenciais no campo potencial de uma carga pontual são esferas centradas na carga pontual.

WW Ilustração

Uma inspeção na forma do campo potencial de uma carga pontual revela que ele é um campo que varia com o inverso da distância, enquanto a intensidade de campo elétrico tem uma relação com o inverso do quadrado da distância. Um resultado similar ocorre para o campo de força gravitacional de uma massa pontual (lei do inverso do quadrado) e o campo de potencial gravitacional (inverso da distância). A força gravitacional exercida pela Terra em um objeto a um milhão de quilômetros dela é quatro vezes aquela exercida no mesmo objeto a dois milhões de quilômetros de distância. Entretanto, a energia cinética dada a um objeto em queda livre, que parte do fim do universo com velocidade zero, é apenas duas vezes maior quando está a um milhão de quilômetros do que quando estava a dois milhões de quilômetros.

EP4.5. Uma carga pontual de 15 nC localiza-se na origem, no espaço livre. Calcule V_1 se o ponto P_1 está posicionado em $P_1(-2, 3, -1)$ e (*a*) $V = 0$ em (6, 5, 4); (*b*) $V = 0$ no infinito; (*c*) $V = 5$ V em (2, 0, 4).

Resp. 20,67 V; 36,0 V; 10,89 V

4.5 CAMPO POTENCIAL DE UM SISTEMA DE CARGAS: PROPRIEDADE CONSERVATIVA

O potencial em um ponto foi definido como o trabalho realizado para se trazer uma carga unitária positiva do zero de referência até esse ponto; e suspeitamos que esse trabalho, e consequentemente o potencial, seja independente do caminho tomado. Se não o fosse, o potencial não seria um conceito muito útil.

Vamos agora provar nossa afirmação. Devemos fazer isso começando com o campo potencial da carga pontual única para a qual mostramos, na Seção 4.4, a independência com relação ao caminho, notando que o campo é linear com relação à carga, de forma que superposição é aplicável. Daí, temos que o potencial de um sistema de cargas tem em qualquer ponto, um valor, independente do caminho tomado no deslocamento da carga de teste até aquele ponto.

Logo, o campo potencial de uma carga pontual única, que vamos identificar como Q_1 e posicionar em $\mathbf{r}_1$, envolve apenas a distância $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$ de Q_1 até o ponto em $\mathbf{r}$ onde estamos estabelecendo o valor do potencial. Para um zero de referência no infinito, temos

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}$$

O potencial devido a duas cargas, Q_1 em $\mathbf{r}_1$ e Q_2 em $\mathbf{r}_2$, é uma função apenas de $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$ e $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|$, as distâncias de Q_1 e Q_2 até o ponto de campo, respectivamente.

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}$$

Continuando a adicionar cargas, temos que o potencial resultante de n cargas pontuais é

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^{n} \frac{Q_m}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_m|} \tag{16}$$

Se cada carga pontual for agora representada como um pequeno elemento de uma distribuição volumétrica contínua de carga $\rho_v \Delta v$, então

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\rho_v(\mathbf{r}_1)\Delta v_1}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{\rho_v(\mathbf{r}_2)\Delta v_2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} + \cdots + \frac{\rho_v(\mathbf{r}_n)\Delta v_n}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|}$$

À medida que permitimos que o número de elementos se torne infinito, obtemos a expressão integral

$$V(\mathbf{r}) = \int_{\text{vol}} \frac{\rho_v(\mathbf{r}')\,dv'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{17}$$

Andamos uma boa distância do campo potencial de uma carga pontual única, e seria útil examinar a Equação (17) e refrescar nossas memórias com relação ao significado de cada termo. O potencial $V(\mathbf{r})$ é determinado em relação a um potencial zero de referência no infinito e é uma medida exata do trabalho executado para se trazer uma carga unitária do infinito para o ponto de campo em $\mathbf{r}$ no qual estamos calculando o potencial. A densidade volumétrica de carga $\rho_v(\mathbf{r}')$ e o elemento diferencial de volume dv' se combinam para representar uma quantidade diferencial de carga $\rho_v(\mathbf{r}')dv'$ posicionada em $\mathbf{r}'$. A distância $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ é a distância do ponto de fonte ao ponto de campo. A integral é uma integral (volumétrica) múltipla.

Se a distribuição de cargas toma a forma de uma linha de cargas ou de uma lâmina de cargas, a integração será ao longo da linha ou sobre a superfície:

$$V(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho_L(\mathbf{r}')\, dL'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{18}$$

$$V(\mathbf{r}) = \int_S \frac{\rho_S(\mathbf{r}')\, dS'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{19}$$

A expressão mais genérica para o potencial é obtida combinando as Equações (16), (17), (18) e (19).

Essas expressões de integrais para o potencial, considerando-se a distribuição de cargas, devem ser comparadas a expressões similares para a intensidade de campo elétrico, tal como a Equação (15) na Seção 2.3:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\text{vol}} \frac{\rho_v(\mathbf{r}')\, dv'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

O potencial novamente varia com o inverso da distância, e a intensidade de campo elétrico varia com o inverso do quadrado da distância. O último, de fato, é um campo vetorial.

EXEMPLO 4.3

Para ilustrar o uso de uma dessas integrais do potencial, vamos calcular V no eixo z para uma linha uniforme de cargas ρ_L na forma de um anel, $\rho = a$, no plano $z = 0$, conforme mostrado na Figura 4.3.

Solução. Trabalhando com a Equação (18), temos $dL' = ad\phi'$, $\mathbf{r} = z\mathbf{a}_z$, $\mathbf{r}' = a\mathbf{a}_\rho$, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{a^2 + z^2}$, e

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{\rho_L a\, d\phi'}{4\pi\epsilon_0\sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{\rho_L a}{2\epsilon_0\sqrt{a^2 + z^2}}$$

Para um zero de referência no infinito:

1. O potencial devido a uma carga pontual única é o trabalho realizado para deslocar uma carga unitária positiva do infinito até o ponto no qual desejamos o potencial, e o trabalho é independente do caminho escolhido entre os dois pontos.
2. O campo potencial na presença de certo número de cargas pontuais é a soma dos campos potenciais individuais devidos a cada carga.

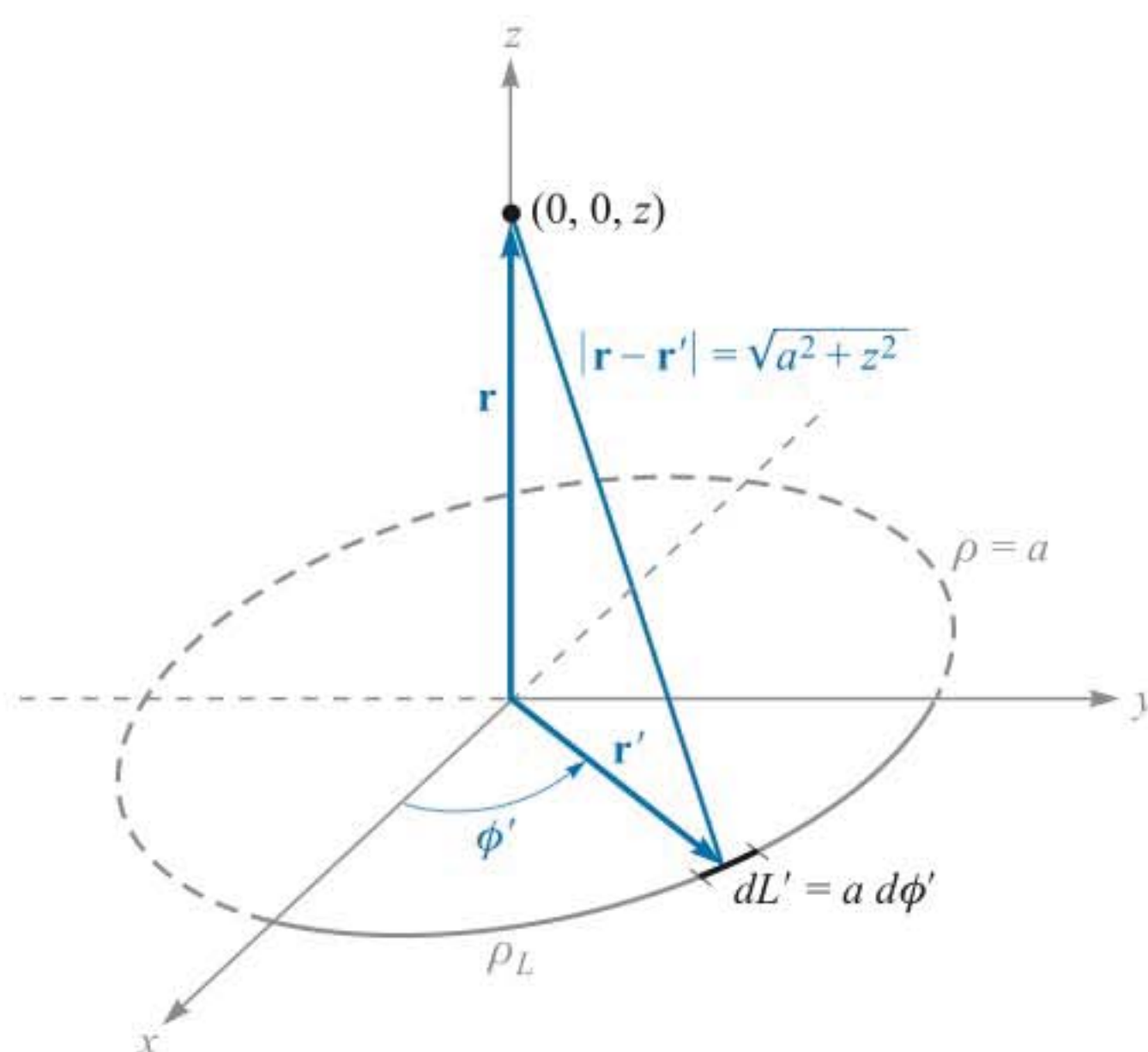



Figura 4.3 O campo potencial de um anel de densidade linear uniforme de carga é facilmente obtido por $V = \int \rho_L(\mathbf{r}')dL'/(4\pi\epsilon_0|r - \mathbf{r}'|)$.

3. Assim, o potencial devido a certo número de cargas pontuais ou qualquer distribuição contínua de cargas pode ser calculado deslocando-se uma carga unitária do infinito até o ponto em questão ao longo de qualquer caminho que escolhermos.

   Em outras palavras, a expressão para o potencial (zero de referência no infinito),

$$V_A = -\int_{\infty}^{A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

ou diferença de potencial,

$$V_{AB} = V_A - V_B = -\int_{B}^{A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

não é dependente do caminho escolhido para a integral de linha, não importando a fonte do campo **E**.

Esse resultado é frequentemente enunciado de forma concisa lembrando-se que nenhum trabalho é realizado ao se deslocar a carga unitária por qualquer *caminho fechado*, ou

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0 \qquad (20)$$

Um pequeno círculo é colocado no sinal de integração para indicar a natureza fechada do caminho. Esse círculo também apareceu na formulação da lei de Gauss, onde uma integral de *superfície* fechada foi utilizada.

A Equação (20) é verdadeira para campos *estáticos*, mas veremos no Capítulo 9 que Faraday demonstrou que ela é incompleta quando campos magnéticos variantes no tempo estão presentes. Uma das maiores contribuições de Maxwell para a teoria eletromagnética foi mostrar que um campo elétrico variante no tempo produz um

campo magnético e, assim, poderemos verificar que a Equação (20) não é correta quando **E** ou o campo magnético varia com o tempo.

Restringindo nossa atenção para o caso estático no qual **E** não muda com o tempo, considere o circuito c.c.* mostrado na Figura 4.4. Dois pontos, A e B, estão marcados, e a Equação (20) determina que um trabalho nulo está envolvido no deslocamento de uma carga unitária de A até B por R_2 e por R_3, e depois de volta para A por R_1, ou que a soma das diferenças de potencial ao longo de qualquer caminho fechado é zero.

A Equação (20) é, então, apenas uma forma mais genérica da lei circuital de Kirchhoff para tensões; mais geral na medida em que podemos aplicá-la a qualquer região na qual um campo elétrico exista e não estamos restritos a um circuito convencional composto de fios, resistências e baterias. A Equação (20) deve ser corrigida antes de a aplicarmos a campos variantes no tempo.

Qualquer campo que satisfaça uma equação do mesmo tipo da Equação (20), isto é, onde a integral de linha fechada do campo for zero, é chamado de *campo conservativo*. O nome vem do fato de que nenhum trabalho é realizado (ou que a energia é *conservada*) ao longo de um caminho fechado. O campo gravitacional também é conservativo, pois qualquer energia despendida na movimentação (levantando) de um objeto contra o campo é recuperada exatamente quando o objeto é retornado (abaixado) para sua posição original. Um campo gravitacional não conservativo poderia resolver nosso problema de energia para sempre.

Quando consideramos um campo *não conservativo* evidentemente é possível que a integral de linha possa ser zero para determinados caminhos fechados. Como exemplo, considere o campo de força $\mathbf{F} = \text{sen}\,\pi\,\rho\,\mathbf{a}_\phi$. Ao redor de um caminho circular de raio $\rho = \rho_1$, temos $d\mathbf{L} = \rho\,d\phi\,\mathbf{a}_\phi$, e

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^{2\pi} \text{sen}\,\pi\rho_1\mathbf{a}_\phi \cdot \rho_1 d\phi\,\mathbf{a}_\phi = \int_0^{2\pi} \rho_1\,\text{sen}\,\pi\rho_1\,d\phi$$

$$= 2\pi\rho_1\,\text{sen}\,\pi\rho_1$$

A integral é zero se $\rho_1 = 1, 2, 3, ...$, etc., mas não é zero para outros valores de ρ_1, ou para a maioria dos outros caminhos fechados, e o campo dado não é conservativo. Um campo conservativo deve fornecer um valor nulo para a integral de linha ao redor de todos os caminhos fechados possíveis.

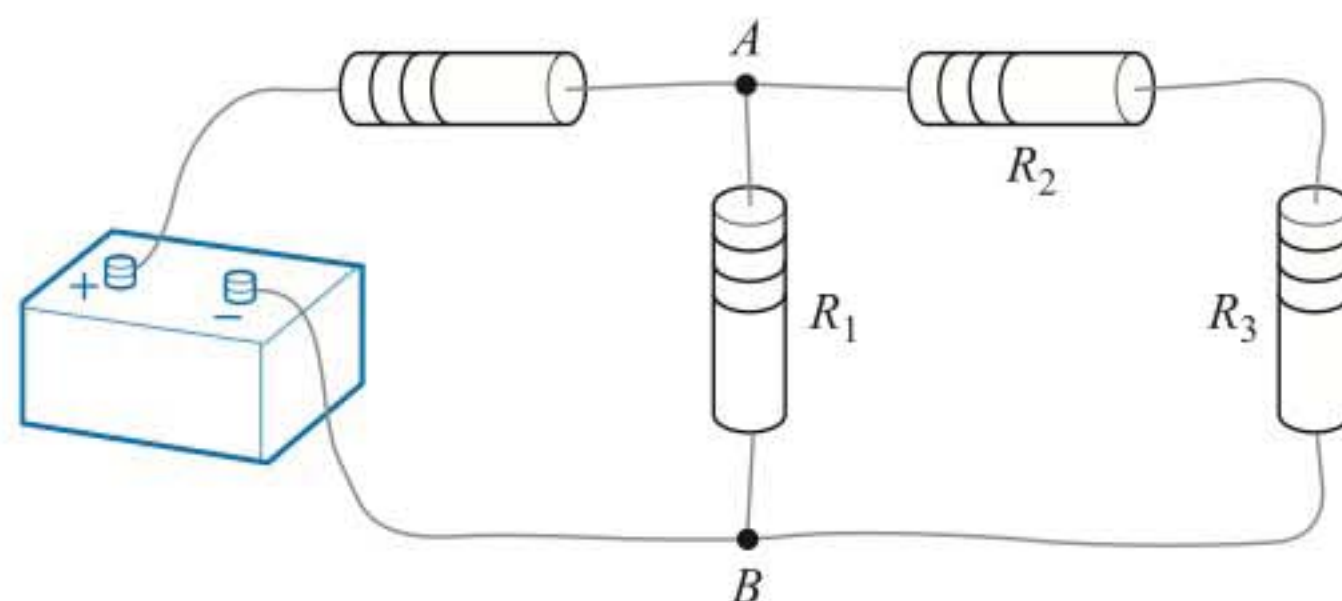



Figura 4.4 Um problema de circuito c.c. simples que deve ser solucionado pela aplicação de $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$ na forma da lei das tensões de Kirchhoff.

* N. de T.: Circuito c.c. = circuito de corrente contínua.

EP4.6. Tomando o zero de referência para o potencial no infinito, calcule o potencial em (0, 2, 2) causado por essa configuração de cargas no espaço livre (*a*) 12 nC/m na linha $\rho = 2{,}5$ m, $z = 0$; (*b*) carga pontual de 18 nC em (1, 2, -1); (*c*) 12 nC/m na linha $y = 2{,}5$, $z = 0$, $-1{,}0 < x < 1{,}0$.

Resp. 529 V; 43,2 V; 66,3 V

4.6 GRADIENTE DO POTENCIAL

WWW Interatividade

Temos agora dois métodos para determinar o potencial, um diretamente da intensidade de campo elétrico por meio de uma integral de linha, e outro pela própria distribuição básica de cargas por meio de uma integral volumétrica. Nenhum dos dois métodos é muito útil na determinação dos campos na maioria dos problemas práticos, entretanto, como veremos depois, nem a intensidade de campo elétrico e nem a distribuição de cargas são frequentemente conhecidas. É muito mais provável que a informação preliminar consista de uma descrição de duas superfícies equipotenciais, tal como a situação de termos dois condutores paralelos de seções retas circulares em potenciais de 100 e -100 V. Talvez desejemos encontrar a capacitância entre os condutores, ou as distribuições de carga e de corrente nos condutores, das quais as perdas podem ser calculadas.

Essas grandezas podem ser facilmente obtidas pelo campo potencial, e nosso objetivo imediato será um método simples de encontrar a intensidade de campo elétrico por meio do potencial.

Já temos a relação genérica entre essas duas grandezas, que é uma integral de linha,

$$V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \tag{21}$$

mas é muito mais fácil utilizar a direção inversa: dado **E**, encontrar *V*.

Entretanto, a Equação (21) pode ser aplicada a um elemento de comprimento muito curto $\Delta\mathbf{L}$ ao longo do qual **E** é essencialmente constante, levando a uma diferença de potencial incremental ΔV,

$$\Delta V \doteq -\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{L} \tag{22}$$

Considere, agora, uma região genérica do espaço, conforme mostrado na Figura 4.5, na qual tanto **E** quanto *V* variam na medida em que nos movemos de ponto para ponto. A Equação (22) nos diz para escolhermos um elemento vetorial incremental de comprimento $\Delta\mathbf{L} = \Delta L\, \mathbf{a}_L$ e multiplicar sua intensidade pelo componente de **E** na direção de $\mathbf{a}_L$ (uma interpretação do produto escalar) para obter a pequena diferença de potencial entre os pontos inicial e final de $\Delta\mathbf{L}$.

Se designarmos o ângulo entre $\Delta\mathbf{L}$ e **E** como θ, então

$$\Delta V \doteq -E\Delta L \cos\theta$$

Desejamos agora passar ao limite e considerar a derivada dV/dL. Para tanto, temos que mostrar que *V* pode ser interpretado como uma *função* $V(x, y, z)$. Até o

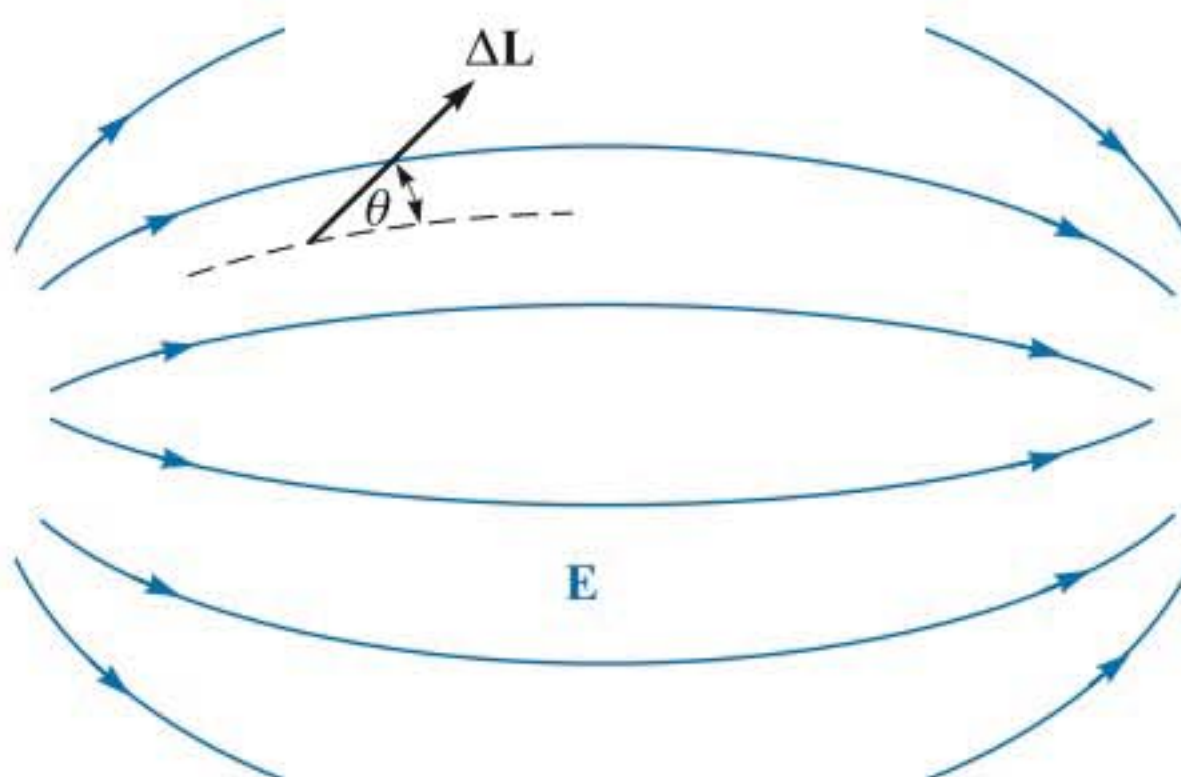



Figura 4.5 Um elemento vetorial incremental de comprimento $\Delta\mathbf{L}$ é mostrado fazendo um ângulo de θ com um campo $\mathbf{E}$, indicado por suas linhas de força. As fontes do campo não são mostradas.

momento, V é simplesmente o resultado da integral de linha (21). Se considerarmos um ponto inicial específico ou zero de referência e então tomarmos nosso ponto final por (x, y, z), saberemos que o resultado da integração será uma função única do ponto final (x, y, z), pois $\mathbf{E}$ é um campo conservativo. Logo, V é uma função unívoca $V(x, y, z)$. Assim, podemos passar ao limite e obter

$$\frac{dV}{dL} = -E\cos\theta$$

Em que direção deve $\Delta\mathbf{L}$ ser colocado para se obter um valor máximo para ΔV? Lembre-se de que $\mathbf{E}$ possui um valor definido no ponto em que estamos trabalhando e é independente da direção de $\Delta\mathbf{L}$. A intensidade ΔL também é constante, e nossa variável é $\mathbf{a}_L$, o vetor unitário que mostra a direção e sentido de $\Delta\mathbf{L}$. É óbvio que o incremento positivo máximo de potencial, ΔV_{max}, ocorrerá quando $\cos\theta$ for igual a -1, ou $\Delta\mathbf{L}$ apontar no sentido *oposto* de $\mathbf{E}$. Para essa condição,

$$\left.\frac{dV}{dL}\right|_{max} = E$$

Esse pequeno exercício nos mostra duas características da relação entre $\mathbf{E}$ e V em qualquer ponto:

1. O módulo (valor absoluto) do vetor intensidade de campo elétrico é dado pelo valor máximo da taxa de variação do potencial com a distância.
2. Esse valor máximo é obtido quando o sentido do incremento de distância é oposto a $\mathbf{E}$ ou, em outras palavras, o sentido de $\mathbf{E}$ é *oposto* ao sentido no qual o potencial está *aumentando* mais rapidamente.

Vamos agora ilustrar essas relações considerando o potencial. A Figura 4.6 tem a intenção de mostrar a informação que nos foi dada sobre algum campo potencial. Ela assim o faz mostrando as superfícies equipotenciais (mostradas como linhas no esboço bidimensional). Desejamos também informação sobre a intensidade de campo elétrico no ponto P. Começando em P, dispomos de uma pequena distância diferencial $\Delta\mathbf{L}$ em várias direções e sentidos, procurando por aqueles nos quais o potencial está mudando (aumentando) mais rapidamente. Pelo esboço, essa direção (e sentido) parece ser para

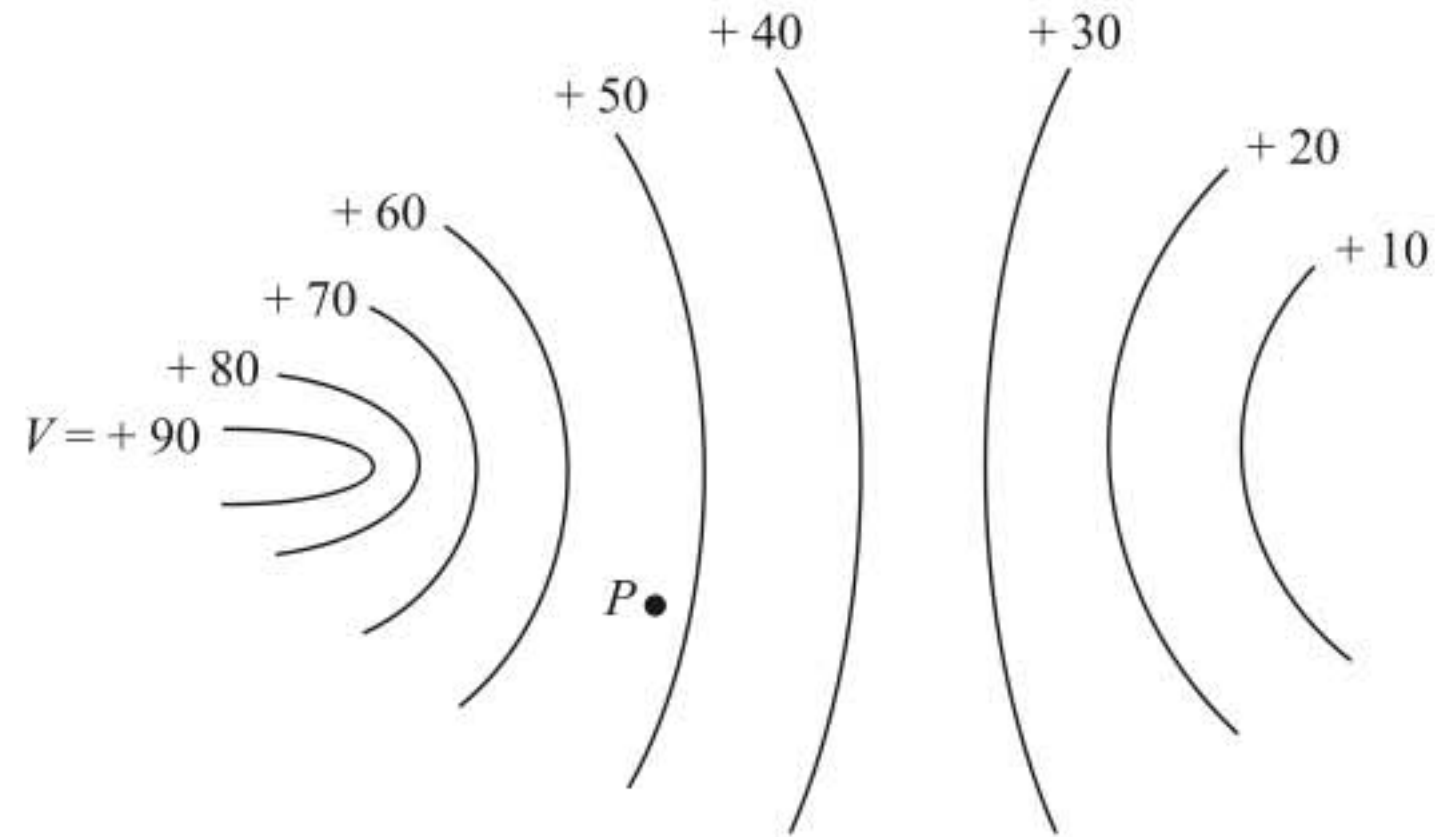



Figura 4.6 Um campo de potencial é mostrado pelas suas superfícies equipotenciais. Em qualquer ponto, o campo **E** é normal à superfície equipotencial que passa por esse ponto e aponta na direção e sentido das superfícies mais negativas.

a esquerda e ligeiramente para cima. Pela segunda característica vista anteriormente, a intensidade de campo elétrico está, portanto, orientada no sentido oposto, ou seja, para a direita e ligeiramente para baixo, em P. Sua intensidade é obtida dividindo-se o pequeno aumento no potencial pelo pequeno elemento de comprimento.

Parece provável que o sentido no qual o potencial está aumentando mais rapidamente seja perpendicular às equipotenciais (no sentido de *aumento* do potencial), e isso está correto, pois se $\Delta\mathbf{L}$ está direcionado ao longo da equipotencial, $\Delta V = 0$ pela nossa definição de uma superfície equipotencial. Mas, então

$$\Delta V = -\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{L} = 0$$

e, uma vez que nem $\mathbf{E}$ e nem $\Delta\mathbf{L}$ são iguais a zero, $\mathbf{E}$ deve ser perpendicular a esse $\Delta\mathbf{L}$ ou perpendicular às equipotenciais.

Como é mais provável que a informação do campo potencial seja determinada primeiro, vamos descrever matematicamente a direção de $\Delta\mathbf{L}$ que leva a um máximo aumento no potencial quando expresso pelo campo potencial e não pela intensidade de campo elétrico. Obtemos isso fazendo com que $\mathbf{a}_N$ seja um vetor unitário normal à superfície equipotencial e orientado na direção e no sentido dos potenciais mais altos. A intensidade de campo elétrico, expressa pelo potencial, é

$$\mathbf{E} = -\left.\frac{dV}{dL}\right|_{max} \mathbf{a}_N \tag{23}$$

o que mostra que a intensidade de $\mathbf{E}$ é dada pela taxa máxima de variação espacial de V e que a direção de $\mathbf{E}$ é *normal* à superfície equipotencial (no sentido da *diminuição* de potencial).

Uma vez que $dV/dL|_{max}$ ocorre quando $\Delta\mathbf{L}$ está na direção e sentido de $\mathbf{a}_N$, devemos nos lembrar desse fato ao considerarmos

$$\left.\frac{dV}{dL}\right|_{max} = \frac{dV}{dN}$$

e

$$\mathbf{E} = -\frac{dV}{dN}\mathbf{a}_N \tag{24}$$

As Equações (23) ou (24) servem para fornecer uma interpretação física do processo de se encontrar a intensidade de campo elétrico a partir do potencial. Ambas são descritivas de um procedimento geral, e não pretendemos utilizá-las diretamente para obter informação quantitativa. Esse procedimento que leva de V a $\mathbf{E}$ não é único para esse par de grandezas, entretanto apareceu como a relação entre um campo escalar e outro vetorial em hidráulica, termodinâmica e magnetismo – na verdade, em quase todos os campos nos quais análise vetorial tem sido aplicada.

A operação em V na qual $-\mathbf{E}$ é obtido é conhecida como *gradiente*, e o gradiente de um campo escalar T é definido como

$$\text{Gradiente de } T = \text{grad } T = \frac{dT}{dN}\mathbf{a}_N \tag{25}$$

onde $\mathbf{a}_N$ é um vetor unitário normal às superfícies equipotenciais, e a normal escolhida é aquela que aponta na direção e sentido dos valores crescentes de T.

Utilizando esse novo termo, podemos agora escrever a relação entre V e $\mathbf{E}$ como

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V \tag{26}$$

Uma vez que mostramos que V é uma função única de x, y e z, podemos tomar sua diferencial total

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

Mas, temos também

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -E_x\, dx - E_y\, d_y - E_z\, dz$$

Uma vez que ambas as expressões são verdadeiras para quaisquer dx, dy e dz, então

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Esses resultados podem ser vetorialmente combinados para levar a

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z\right) \tag{27}$$

e uma comparação entre as Equações (26) e (27) nos fornece uma expressão que pode ser utilizada para calcular o gradiente em coordenadas cartesianas,

$$\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z \tag{28}$$

O gradiente de um escalar é um vetor, e a experiência mostra que vetores unitários que frequentemente são acrescentados de forma incorreta à expressão de divergência parecem ser aqueles que foram incorretamente retirados do gradiente. Uma vez que a interpretação física do gradiente expressa pela Equação (25) acaba por mostrar a taxa máxima de variação espacial de uma grandeza escalar e *a direção e o sentido nos quais esse máximo ocorre*, a natureza vetorial do gradiente deve ser autoevidente.

O operador vetorial

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

pode ser utilizado formalmente como um operador em um escalar, T, ∇T, produzindo

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial T}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

do qual vemos que

$$\boxed{\nabla T = \text{grad}\, T}$$

Interatividade

Isso nos permite utilizar uma expressão muito compacta para relacionar **E** e V,

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V} \tag{29}$$

O gradiente pode ser expresso pelas derivadas parciais em outros sistemas de coordenadas pela aplicação da sua definição na Equação (25). Essas expressões são derivadas no Apêndice A e repetidas aqui por conveniência ao se lidar com problemas que possuem simetria cilíndrica ou esférica. Elas também aparecem nas páginas finais do livro.

$$\boxed{\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z \qquad \text{(cartesianas)}} \tag{30}$$

$$\boxed{\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z \qquad \text{(cilíndricas)}} \tag{31}$$

$$\boxed{\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{a}_\phi \qquad \text{(esféricas)}} \tag{32}$$

Note que o denominador de cada termo tem a forma de um dos componentes de $d\mathbf{L}$ naquele sistema de coordenadas, a não ser pelas derivadas parciais que substituem diferenciais ordinárias. Como exemplo, r sen $\theta\, d\phi$ se torna r sen $\theta\, \partial\phi$.

Ilustraremos a seguir o conceito de gradiente com um exemplo.

EXEMPLO 4.4

Considere o campo potencial $V = 2x^2y - 5z$ e um ponto $P(-4, 3, 6)$. Desejamos calcular diversos valores numéricos no ponto P: o potencial V, a intensidade de campo

elétrico **E**, a direção e o sentido de **E**, a densidade de fluxo elétrico **D** e a densidade volumétrica de carga ρ_v.

Solução. O potencial em $P(-4, 3, 6)$ é

$$V_P = 2(-4)^2(3) - 5(6) = 66 \text{ V}$$

Em seguida, podemos utilizar a operação de gradiente para obter a intensidade de campo elétrico,

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -4xy\mathbf{a}_x - 2x^2\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

O valor de **E** no ponto P é

$$\mathbf{E}_P = 48\mathbf{a}_x - 32\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

e

$$|\mathbf{E}_P| = \sqrt{48^2 + (-32)^2 + 5^2} = 57{,}9 \text{ V/m}$$

A direção e sentido de **E** em P é dada pelo vetor unitário

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{E,P} &= (48\mathbf{a}_x - 32\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z)/57{,}9 \\ &= 0{,}829\mathbf{a}_x - 0{,}553\mathbf{a}_y + 0{,}086\mathbf{a}_z\end{aligned}$$

Se considerarmos que esses campos existem no espaço livre, então

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} = -35{,}4xy\,\mathbf{a}_x - 17{,}71x^2\,\mathbf{a}_y + 44{,}3\,\mathbf{a}_z \text{ pC/m}^2$$

Finalmente, podemos utilizar a relação de divergência para calcular a densidade volumétrica de carga que é a fonte do campo potencial dado,

$$\rho_v = \nabla \cdot \mathbf{D} = -35{,}4y \text{ pC/m}^3$$

Em P, $\rho_v = -106{,}2 \text{ pC/m}^3$.

EP4.7. Uma porção de um campo potencial bidimensional ($E_z = 0$) é mostrada na Figura 4.7. As linhas de grade estão espaçadas por 1 mm no campo real. Determine os valores aproximados para **E** em coordenadas retangulares em: (*a*) *a*; (*b*) *b*; (*c*) *c*.

Resp. $-1.075\mathbf{a}_y$ V/m; $-600\mathbf{a}_x - 700\mathbf{a}_y$ V/m; $-500\mathbf{a}_x - 650\mathbf{a}_y$ V/m

EP4.8. Dado o campo potencial em coordenadas cilíndricas $V = \dfrac{100}{z^2+1}\rho\cos\phi \text{V}$, e o ponto P em $\rho = 3$ m, $\phi = 60°$, $z = 2$ m, calcule os valores em P para (*a*) V; (*b*) **E**; (*c*) E; (*d*) dV/dN; (*e*) $\mathbf{a}_N$; (*f*) ρ_v no espaço livre.

Resp. 30,0 V; $-10{,}00\mathbf{a}_\rho + 17{,}3\mathbf{a}_\phi + 24{,}0\mathbf{a}_z$ V/m; 31,2 V/m; 31,2 V/m; $0{,}32\mathbf{a}_\rho - 0{,}55\mathbf{a}_\phi - 0{,}77\mathbf{a}_z$; -234 pC/m^3.

4.7 DIPOLO ELÉTRICO

Os campos de dipolo que vamos desenvolver nessa seção são muito importantes porque formam a base do comportamento de materiais dielétricos em campos elétricos, conforme será discutido no Capítulo 6, assim como a justificativa da utilização de imagens, como descrito na Seção 5.5 do Capítulo 5. Além disso, esse desenvolvimento servirá para ilustrar a importância do conceito de potencial apresentado neste capítulo.

Um *dipolo elétrico*, ou simplesmente *dipolo*, é o nome dado a duas cargas pontuais de magnitudes iguais e sinais opostos, separadas por uma distância que é pequena se comparada à distância ao ponto P cujos campos elétrico e potencial desejamos saber. O dipolo é mostrado na Figura 4.8*a*. O ponto distante P é descrito pelas coordenadas esféricas r, θ e $\phi = 90°$, em vista da simetria azimutal. As cargas pontuais positiva e negativa possuem separação d e coordenadas cartesianas $(0, 0, \frac{1}{2}d)$ e $(0, 0, -\frac{1}{2}d)$, respectivamente.

Assim, fica definida a geometria. Mas o que faríamos em seguida? Deveríamos calcular a intensidade de campo elétrico total somando-se os campos conhecidos de cada carga pontual? Seria mais fácil calcular o campo potencial total primeiro? Em ambos os casos, depois que encontrarmos um, deveremos encontrar o outro pelo primeiro, antes de dar o problema como resolvido.

Se escolhermos calcular **E** primeiro, deveremos ter dois componentes a serem determinados em coordenadas esféricas (a simetria mostra que E_ϕ é zero); assim, a única maneira de se encontrar V por meio de **E** é pelo uso da integral de linha. Esse último passo inclui o estabelecimento de um zero de referência adequado para o potencial, uma vez que a integral de linha nos dá apenas a diferença de potencial entre os dois pontos nas extremidades do caminho de integração.

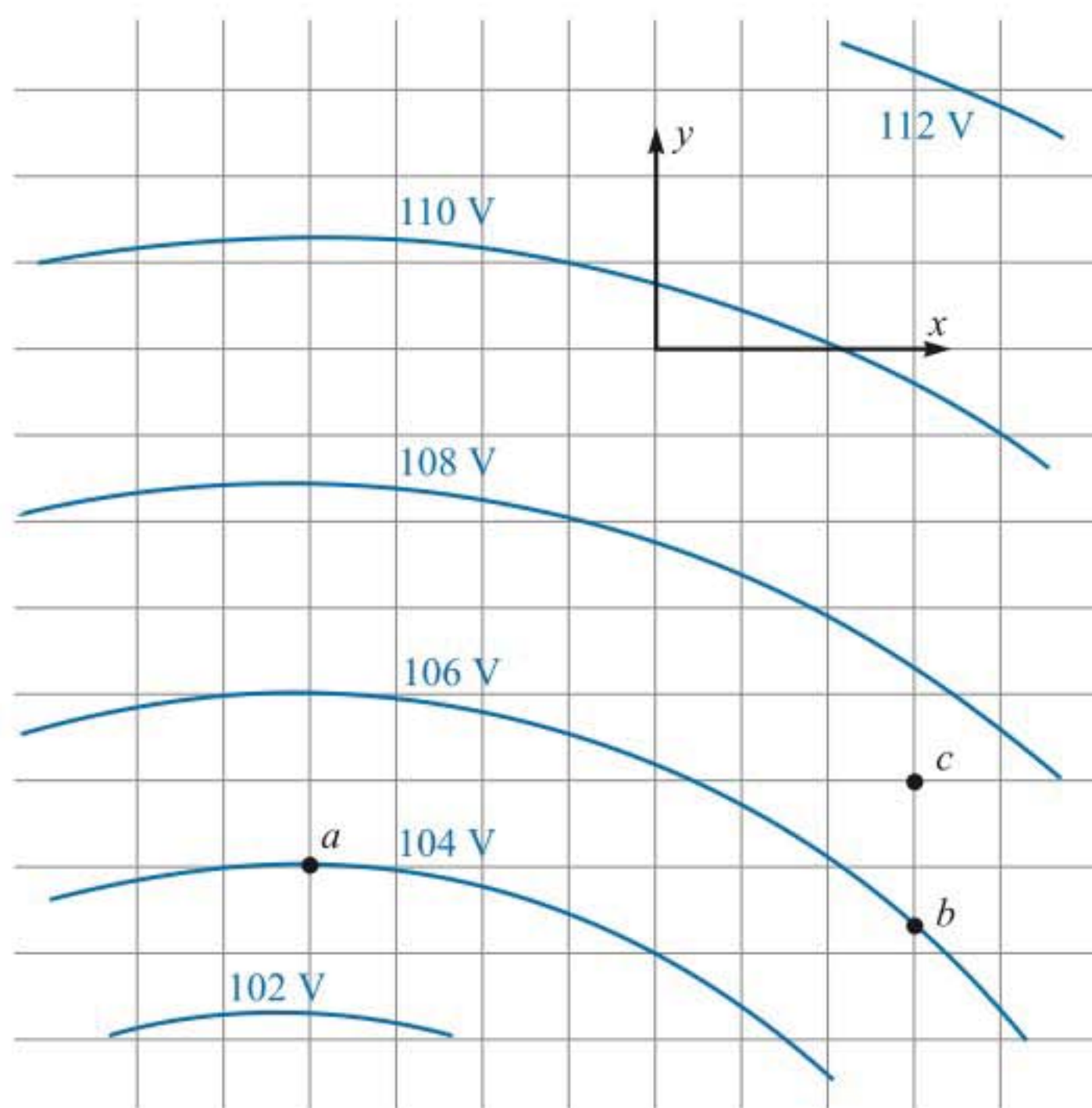



Figura 4.7 Ver Exercício Proposto 4.7.

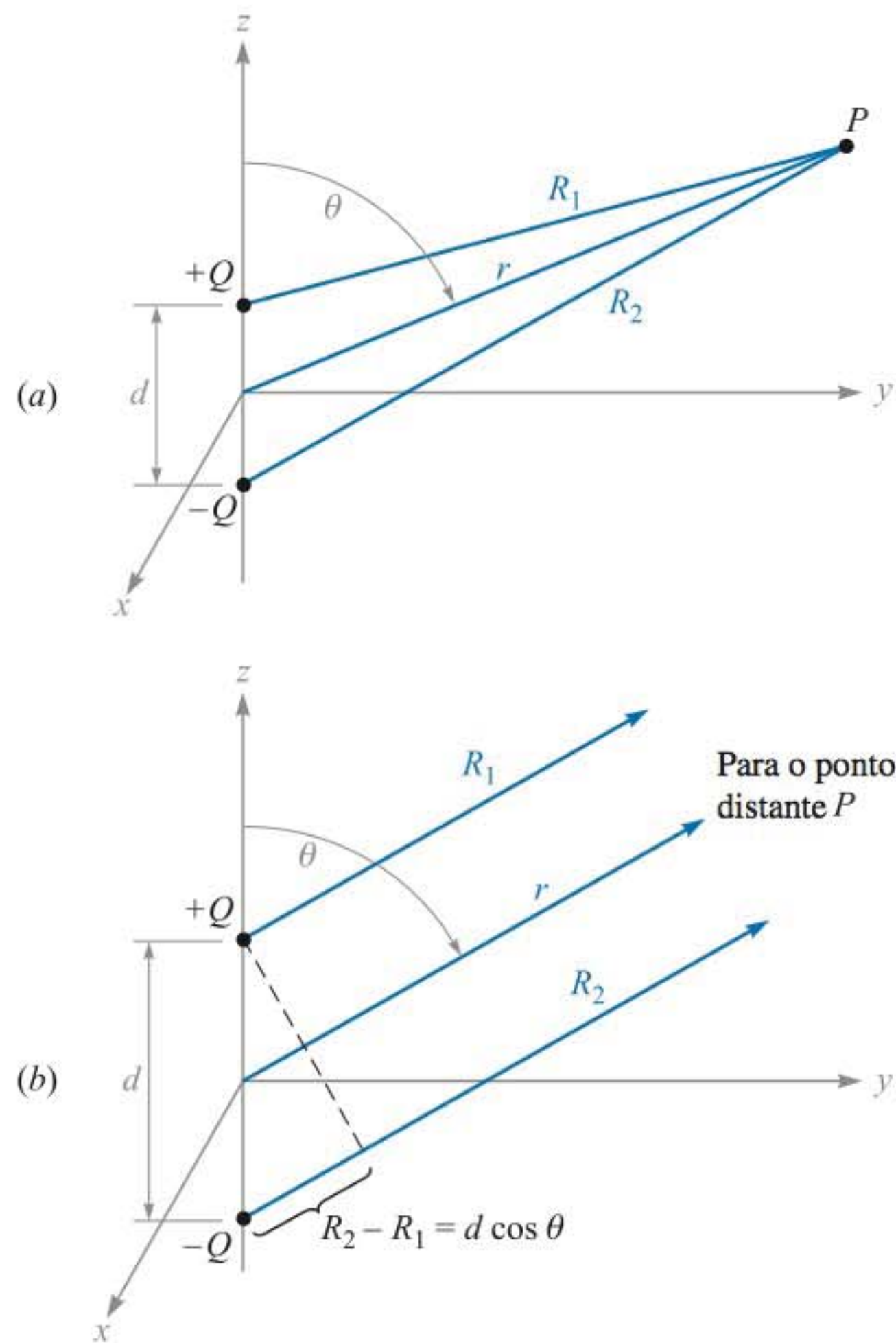



Figura 4.8 (*a*) A geometria do problema de um dipolo elétrico. O momento do dipolo $p = Qd$ está na direção $\mathbf{a}_z$. (*b*) Para um ponto distante P, R_1 é essencialmente paralelo a R_2, e $R_2 - R_1 = d\cos\theta$.

Por outro lado, determinar V primeiramente é um problema muito mais simples. Isso ocorre porque podemos achar o potencial como uma função da posição ao simplesmente somar os potenciais escalares relativos às duas cargas. A intensidade, a direção e o sentido do vetor $\mathbf{E}$, que é dependente da posição, são subsequentemente encontrados, com facilidade relativa, por meio do negativo do gradiente de V.

Escolhendo esse método mais simples, tomamos as distâncias de Q e $-Q$ em relação a P por R_1 e R_2, respectivamente, e escrevemos o potencial total como

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

Note que o plano $z = 0$, a meio caminho entre as duas cargas pontuais, é o lugar geométrico dos pontos para os quais $R_1 = R_2$, e está, portanto, no potencial zero, assim como estão todos os pontos no infinito.

Para um ponto distante, $R_1 = R_2$, e o produto R_1R_2 no denominador pode ser substituído por r^2. Entretanto, a aproximação não pode ser realizada no numerador sem que seja obtida a solução trivial de que o campo potencial se aproxima de zero à medida que nos distanciamos para muito longe do dipolo. Chegando um pouco mais

perto do dipolo, vemos pela Figura 4.8*b* que $R_2 - R_1$ pode ser aproximado muito facilmente se admitirmos que R_1 e R_2 são paralelos entre si,

$$R_2 - R_1 \doteq d \cos\theta$$

O resultado final é, então,

$$\boxed{V = \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}} \qquad (33)$$

Novamente, notamos que o plano $z = 0$ ($\theta = 90°$) está no potencial zero.

Utilizando a relação de gradiente em coordenadas esféricas,

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial V}{\partial\phi}\mathbf{a}_\phi\right)$$

obtemos

$$\mathbf{E} = -\left(-\frac{Qd\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}\mathbf{a}_r - \frac{Qd\,\text{sen}\,\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}\mathbf{a}_\theta\right) \qquad (34)$$

ou

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3}(2\cos\theta\,\mathbf{a}_r + \text{sen}\,\theta\,\mathbf{a}_\theta)} \qquad (35)$$

Esses são os campos distantes desejados do dipolo, obtidos com uma quantidade muito pequena de esforço. Qualquer estudante, que tenha várias horas para gastar, pode tentar resolver o problema na direção inversa – os autores consideram o processo muito longo e detalhado para ser incluído, mesmo para impressionar.

Para obter um gráfico do campo potencial, podemos escolher um dipolo em que $Qd/(4\pi\epsilon_0) = 1$, e então $\cos\theta = Vr^2$. As linhas superiores e inferiores* na Figura 4.9 indicam equipotenciais para as quais $V = 0$, $+0{,}2$, $+0{,}4$, $+0{,}6$, $+0{,}8$ e $+1$, conforme indicado. O eixo do dipolo é vertical, com a carga positiva no topo. As linhas de força para o campo elétrico são obtidas pela aplicação dos métodos da Seção 2.6 em coordenadas esféricas,

$$\frac{E_\theta}{E_r} = \frac{r\,d\theta}{dr} = \frac{\text{sen}\,\theta}{2\cos\theta}$$

ou

$$\frac{dr}{r} = 2\,\text{cotg}\,\theta\,d\theta$$

da qual obtemos

$$r = C_1\,\text{sen}^2\,\theta$$

As linhas de força à direita e à esquerda mostradas na Figura 4.9 são para $C_1 = 1$, 1,5, 2 e 2,5.

* N. de T.: As linhas sem "setas" correspondem às linhas de potencial, enquanto as que têm "setas" correspondem às linhas de força.

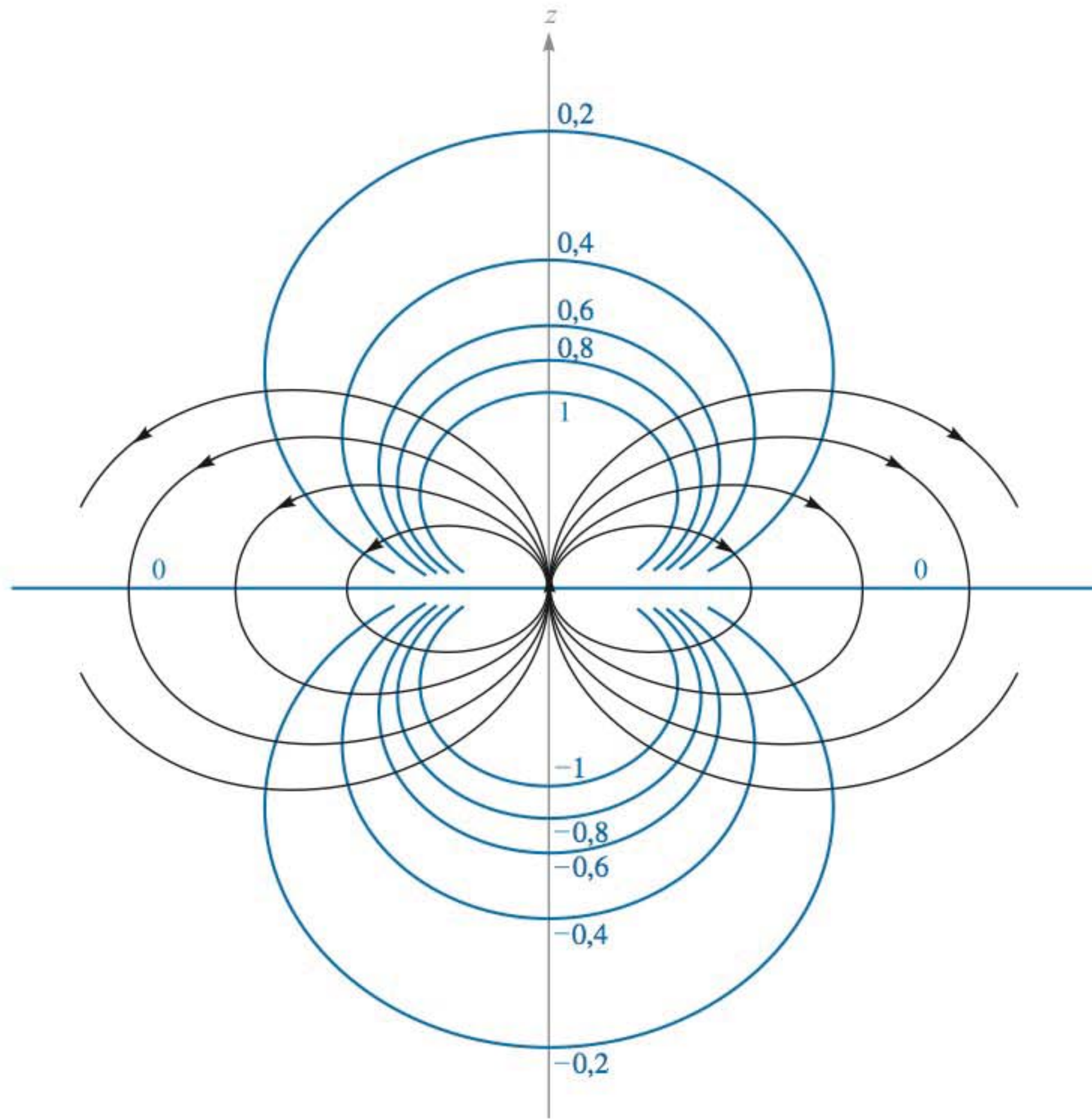



Figura 4.9 O campo eletrostático de um dipolo pontual com seu momento na direção $\mathbf{a}_z$. Seis superfícies equipotenciais são identificadas com valores relativos de V.

O campo potencial do dipolo, Equação (33), pode ser simplificado fazendo-se uso do momento do dipolo. Vamos, primeiramente, identificar o vetor comprimento direcionado de $-Q$ para $+Q$ como $\mathbf{d}$ e, então, definir o *momento de dipolo* como $Q\mathbf{d}$ e associá-lo ao símbolo $\mathbf{p}$. Logo

$$\boxed{\mathbf{p} = Q\mathbf{d}} \tag{36}$$

As unidades de $\mathbf{p}$ são C · m.

Uma vez que $\mathbf{d} \cdot \mathbf{a}_r = d \cos \theta$, temos então

$$V = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_r}{4\pi \epsilon_0 r^2} \tag{37}$$

Este resultado pode ser generalizado como

$$V = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{p} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{38}$$

onde $\mathbf{r}$ posiciona o ponto de campo P e $\mathbf{r}'$ determina o centro do dipolo. A Equação (38) é independente de qualquer sistema de coordenadas.

O momento de dipolo **p** aparecerá novamente quando discutirmos materiais dielétricos. Uma vez que ele é igual ao produto da carga pela separação, nem o momento de dipolo e nem o potencial mudarão à medida que Q aumentar e **d** diminuir, desde que o produto se mantenha constante. O caso-limite de um *dipolo pontual* é atingido quando fazemos **d** se aproximar de zero e Q se aproximar de infinito, de forma que o produto **p** seja finito.

Voltando nossa atenção para os campos resultantes, é interessante notar que o campo potencial é agora proporcional ao inverso do *quadrado* da distância, e a intensidade de campo elétrico é proporcional ao inverso do *cubo* da distância em relação ao dipolo. Cada campo cai mais rápido que o campo correspondente para a carga pontual, mas isso não é mais do que deveríamos esperar, pois as cargas opostas parecem estar mais próximas entre si em distâncias maiores e atuam mais como se fossem uma carga pontual de 0 C.

Arranjos simétricos de maiores números de cargas pontuais produzem campos proporcionais ao inverso de potências mais e mais altas de r. Essas distribuições de cargas são chamadas de *multipolos*, e são utilizadas em séries infinitas para aproximar configurações de cargas mais complexas.

EP4.9. Um dipolo elétrico posicionado na origem no espaço livre tem um momento $\mathbf{p} = 3\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$ nC · m. (*a*) Calcule V em $P_A(2, 3, 4)$. (*b*) Calcule V em $r = 2{,}5$, $\theta = 30°$, $\phi = 40°$.

Resp. 0,23 V; 1,97 V

EP4.10. Um dipolo de momento $\mathbf{p} = 6\mathbf{a}_z$ nC · m está posicionado na origem no espaço livre. (*a*) Calcule V em $P(r = 4, \theta = 20°, \phi = 0°)$. (*b*) Calcule **E** em P.

Resp. 3,17 V; $1{,}58\mathbf{a}_r + 0{,}29\mathbf{a}_\theta$ V/m

4.8 DENSIDADE DE ENERGIA NO CAMPO ELETROSTÁTICO

Introduzimos o conceito de potencial pela consideração do trabalho realizado – ou energia despendida – no deslocamento de uma carga pontual por um campo elétrico, e agora temos que solucionar as pendências daquela discussão, dando um passo adiante na investigação do fluxo de energia.

Trazer uma carga positiva do infinito até o campo de uma outra carga positiva requer trabalho, e esse trabalho é realizado pela fonte externa que move a carga. Vamos imaginar que a fonte externa desloca a carga até um ponto próximo da carga fixa e então a mantenha lá. A energia deve ser conservada, e a energia gasta trazendo essa carga para a posição representa agora uma energia potencial, pois se a fonte externa soltasse a carga, essa última aceleraria afastando-se da carga fixa, adquirindo energia cinética sozinha, assim como a capacidade de realizar trabalho.

Com o objetivo de encontrar a energia potencial presente em um sistema de cargas, temos de determinar o trabalho realizado por uma fonte externa no posicionamento das cargas.

Vamos começar visualizando um universo vazio. Trazer uma carga Q_1 do infinito até qualquer posição não requer trabalho, pois não há campo presente.[2] O posicionamento de Q_2 em um ponto no campo de Q_1 requer uma quantidade de trabalho dado por meio do produto da carga Q_2 pelo potencial naquele ponto gerado por Q_1. Representamos esse potencial por $V_{2,1}$, onde o primeiro subscrito indica a posição e o segundo subscrito, a fonte. Ou seja, $V_{2,1}$ é o potencial na posição de Q_2 devido a Q_1. Logo

$$\text{Trabalho para posicionar } Q_2 = Q_2 V_{2,1}$$

Similarmente, vamos expressar o trabalho necessário para posicionar cada carga adicional no campo de todas as outras já presentes:

$$\text{Trabalho para posicionar } Q_3 = Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2}$$
$$\text{Trabalho para posicionar } Q_4 = Q_4 V_{4,1} + Q_4 V_{4,2} + Q_4 V_{4,3}$$

e assim por diante. O trabalho total é obtido somando-se cada contribuição:

$$\begin{aligned}\text{Trabalho total de posicionamento} &= \text{energia potencial do campo}\\ &= W_E = Q_2 V_{2,1} + Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2} + Q_4 V_{4,1}\\ &\quad + Q_4 V_{4,2} + Q_4 V_{4,3} + \cdots \end{aligned} \tag{39}$$

Notando a forma de um termo representativo na equação anterior,

$$Q_3 V_{3,1} = Q_3 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} = Q_1 \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{31}}$$

onde R_{13} e R_{31} representam, cada um, a distância escalar entre Q_1 e Q_3, vemos que poderia ter sido escrito, igualmente, $Q_1 V_{1,3}$. Se cada termo da expressão para a energia total for substituído pelo seu equivalente, teremos

$$W_E = Q_1 V_{1,2} + Q_1 V_{1,3} + Q_2 V_{2,3} + Q_1 V_{1,4} + Q_2 V_{2,4} + Q_3 V_{3,4} + \cdots \tag{40}$$

Somando-se as duas expressões para energia, as Equações (39) e (40), temos uma chance de simplificar um pouco o resultado:

$$\begin{aligned} 2W_E = {} & Q_1(V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \cdots)\\ & + Q_2(V_{2,1} + V_{2,3} + V_{2,4} + \cdots)\\ & + Q_3(V_{3,1} + V_{3,2} + V_{3,4} + \cdots)\\ & + \cdots \end{aligned}$$

Cada soma de potenciais em parênteses é o potencial combinado devido a todas as cargas, exceto para a carga no ponto onde esse potencial combinado é encontrado. Em outras palavras,

$$V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \cdots = V_1$$

[2] Contudo, alguém em uma fábrica no infinito teria que, em primeiro lugar, realizar uma quantidade infinita de trabalho para criar a carga pontual! Quanta energia é necessária para juntar duas metades de cargas para fazer uma carga unitária?

V_1 é o potencial na posição de Q_1 devido à presença de Q_2, Q_3, ... Temos, então,

$$W_E = \frac{1}{2}(Q_1V_1 + Q_2V_2 + Q_3V_3 + \cdots) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{m=N} Q_m V_m \tag{41}$$

Com o objetivo de se obter uma expressão para a energia armazenada em uma região de distribuição contínua de carga, cada carga é substituída por $\rho_v\, dv$, e o somatório se torna uma integral,

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{\text{vol}} \rho_v V\, dv \tag{42}$$

As Equações (41) e (42) nos permitem encontrar a energia potencial total presente em um sistema de cargas pontuais ou de densidade volumétrica de carga distribuída. Expressões similares podem ser facilmente expressas pelas densidades lineares ou superficiais de carga. Normalmente, preferimos utilizar a Equação (42) e deixá-la representar todos os vários tipos de cargas que precisam ser considerados. Isso sempre pode ser feito considerando-se cargas pontuais, densidades lineares de carga ou densidades superficiais de carga como distribuições contínuas de densidade volumétrica de carga em regiões muito pequenas. Em breve, ilustraremos tal procedimento com um exemplo.

Antes de fazermos qualquer interpretação desse resultado, vamos gastar algumas poucas linhas de análise vetorial mais difícil para obtermos uma expressão equivalente à Equação (42), mas expressa por **E** e **D**.

Começamos fazendo a expressão se tornar um pouco mais longa. Utilizando a primeira equação de Maxwell, substituímos ρ_v por seu equivalente $\nabla \cdot \mathbf{D}$ e, fazendo uso de uma identidade vetorial que é verdadeira para qualquer função escalar V e qualquer função vetorial **D**,

$$\nabla \cdot (V\mathbf{D}) \equiv V(\nabla \cdot \mathbf{D}) + \mathbf{D} \cdot (\nabla V) \tag{43}$$

Isso pode ser prontamente provado por expansão em coordenadas cartesianas. Temos, então, sucessivamente,

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{\text{vol}} \rho_v V\, dv = \frac{1}{2}\int_{\text{vol}} (\nabla \cdot \mathbf{D})V\, dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\text{vol}} [\nabla \cdot (V\mathbf{D}) - \mathbf{D} \cdot (\nabla V)]\, dv$$

Utilizando o teorema da divergência do Capítulo 3, a primeira integral volumétrica da última equação é transformada em uma integral de superfície fechada, onde a superfície fechada envolve o volume considerado. Esse volume, que primeiramente apareceu na Equação (42), deve conter *todas* as cargas, e nenhuma pode ser deixada do lado de fora. Podemos, então, considerar que o volume tem extensão *infinita*, caso desejarmos. Temos

$$W_E = \frac{1}{2}\oint_S (V\mathbf{D}) \cdot d\mathbf{S} - \frac{1}{2}\int_{\text{vol}} \mathbf{D} \cdot (\nabla V)\, dv$$

A integral de superfície é igual a zero, pois sobre essa superfície fechada, que envolve o universo, vemos que V se aproxima de zero pelo menos tão rapidamente quanto $1/r$ (de lá, as cargas se parecem com cargas pontuais), e **D** se aproxima de zero pelo menos tão rapidamente quanto $1/r^2$. O integrando, portanto, se aproxima de zero pelo

menos tão repidamente quanto $1/r^3$, enquanto o elemento diferencial de superfície, que se parece cada vez mais com uma porção de uma esfera, aumenta apenas por r^2. Consequentemente, no limite, à medida que $r \to \infty$, o integrando e a integral se aproximam de zero. Substituindo $\mathbf{E} = -\nabla V$ no restante da integral volumétrica, temos a nossa resposta,

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{\text{vol}} \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\,dv = \frac{1}{2}\int_{\text{vol}} \epsilon_0 E^2\,dv \tag{44}$$

Vamos agora utilizar essa última expressão para calcular a energia armazenada no campo eletrostático de uma seção de um cabo ou capacitor coaxial de comprimento L. Vimos na Seção 3.3 que

$$D_\rho = \frac{a\rho_S}{\rho}$$

Logo,

$$\mathbf{E} = \frac{a\rho_S}{\epsilon_0\rho}\mathbf{a}_\rho$$

onde ρ_s é a densidade superficial de carga no condutor interno, cujo raio é a. Logo,

$$W_E = \frac{1}{2}\int_0^L\int_0^{2\pi}\int_a^b \epsilon_0\frac{a^2\rho_S^2}{\epsilon_0^2\rho^2}\rho\,d\rho\,d\phi\,dz = \frac{\pi L a^2\rho_S^2}{\epsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

Esse mesmo resultado pode ser obtido por meio da Equação (42). Escolhemos o condutor externo como nosso zero de referência de potencial, e assim o potencial no cilindro interno será

$$V_a = -\int_b^a E_\rho\,d\rho = -\int_b^a \frac{a\rho_S}{\epsilon_0\rho}\,d\rho = \frac{a\rho_S}{\epsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

A densidade superficial de carga ρ_S em $\rho = a$ pode ser interpretada como a densidade volumétrica de carga $\rho_v = \rho_S/t$, se estendendo de $\rho = a - \frac{1}{2}t$ a $\rho = a + \frac{1}{2}t$, onde $t \ll a$. O integrando na Equação (42) é, portanto, zero em todos os pontos entre os cilindros (onde a densidade volumétrica de carga é zero), assim como no cilindro externo (onde o potencial é zero). A integração é, portanto, realizada apenas dentro da fina casca cilíndrica em $\rho = a$,

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{\text{vol}} \rho_v\,V\,dV = \frac{1}{2}\int_0^L\int_0^{2\pi}\int_{a-t/2}^{a+t/2} \frac{\rho_S}{t}a\frac{\rho_S}{\epsilon_0}\ln\frac{b}{a}\rho\,d\rho\,d\phi\,dz$$

da qual

$$W_E = \frac{a^2\rho_S^2\ln(b/a)}{\epsilon_0}\pi L$$

novamente.

Essa expressão toma uma forma mais familiar se percebermos que a carga total no condutor interno é $Q = 2\pi a L\rho_S$. Combinando-a com a diferença de potencial entre os cilindros, V_a, vemos que

$$W_E = \frac{1}{2}QV_a$$

que deve ser familiar, já que é a energia armazenada em um capacitor.

A questão "onde a energia é armazenada em um campo elétrico" não foi ainda respondida. A energia potencial não pode nunca ser definida precisamente quanto à sua localização física. Alguém levanta um lápis e o lápis adquire energia potencial. A energia está armazenada nas moléculas do lápis, no campo gravitacional entre o lápis e a Terra, ou em algum lugar obscuro? A energia do capacitor está armazenada nas próprias cargas, no campo, ou onde? Ninguém pode oferecer qualquer prova para sua opinião pessoal, e a tarefa de decidir deve ser deixada para os filósofos.

Pela teoria de campos eletromagnéticos fica fácil acreditar que a energia em um campo elétrico ou de uma distribuição de cargas está armazenada no próprio campo, pois se tomarmos a Equação (44), uma expressão rigorosamente correta,

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{\text{vol}} \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\,dv$$

e ao escrevê-la em uma forma diferencial

$$dW_E = \tfrac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\,dv$$

ou

$$\frac{dW_E}{dv} = \tfrac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} \qquad (45)$$

obtemos uma quantidade de $\frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}$, que tem dimensão de densidade de energia, ou joules por metro cúbico. Sabemos que se integrarmos essa densidade de energia por todo o volume que contém o campo, o resultado será, com certeza, a energia total presente, mas não temos mais justificativa para dizer que a energia armazenada em cada elemento diferencial de volume dv é $\frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\,dv$ do que teríamos ao olhar a Equação (42) e dizer que a energia armazenada é $\frac{1}{2}\rho_v V dv$. A interpretação proporcionada pela Equação (45), contudo, é conveniente, e devemos utilizá-la até que se prove o contrário.

EP4.11. Calcule a energia armazenada no espaço livre para a região 2 mm $< r <$ 3 mm, $0 < \theta < 90°$, $0 < \phi < 90°$, dado o campo de potencial $V =$: $(a)\ \dfrac{200}{r}$ V; $(b)\ \dfrac{300\cos\theta}{r^2}$ V.

Resp. 46,4 μJ; 36,7 J

REFERÊNCIAS

1. Attwood, S. S. *Electric and Magnetic Fields*. 3. ed. New York: John Wiley & Sons, 1949. Existem diversos mapas de campos bem desenhados de várias distribuições de cargas, incluindo o campo do dipolo. Análise vetorial não é utilizada.
2. Skilling, H. H. (Ver Referências sugeridas no Capítulo 3.) O gradiente é descrito nas páginas 19-21.
3. Thomas, G. B., Jr., and R. L. Finney. (Ver Referências sugeridas no Capítulo 1.) A derivada direcional e o gradiente são apresentados nas páginas 823-830.

Quizzes

PROBLEMAS

4.1 O valor de **E** em $P(\rho = 2, \phi = 40°, z = 3)$ é dado como $\mathbf{E} = 100\mathbf{a}_\rho - 200\mathbf{a}_\phi + 300\mathbf{a}_z$ V/m. Determine o trabalho incremental necessário para deslocar uma carga de 20 μC por uma distância de 6 μm: (*a*) na direção de $\mathbf{a}_\rho$; (*b*) na direção de $\mathbf{a}_\phi$; (*c*) na direção de $\mathbf{a}_z$; (*d*) na direção de **E**; (*e*) na direção de $\mathbf{G} = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$.

4.2 Uma carga pontual positiva, de intensidade q_1, repousa na origem. Deduza uma expressão para o trabalho incremental realizado para mover uma segunda carga pontual q_2 por uma distância dx da posição inicial (x, y, z) no sentido $-\mathbf{a}_x$.

4.3 Se $\mathbf{E} = 120\mathbf{a}_\rho$ V/m, calcule a quantidade incremental de trabalho realizado na movimentação de uma carga de 50 μC por uma distância de 2 mm de (*a*) $P(1, 2, 3)$ em direção a $Q(2, 1, 4)$; (*b*) $Q(2, 1, 4)$ na direção de $P(1, 2, 3)$.

4.4 Um campo elétrico, no espaço livre, é dado por $\mathbf{E} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$ V/m. Determine o trabalho realizado para deslocar uma carga de 1 μC através deste campo (*a*) de (1, 1, 1) para (0, 0, 0); (*b*) de $(\rho = 2, \phi = 0)$ para $(\rho = 2, \phi = 90°)$; (*c*) de $(r = 10, \theta = \theta_0)$ para $(r = 10, \theta = \theta_0 + 180°)$.

4.5 Calcule o valor de $\int_A^P \mathbf{G} \cdot d\mathbf{L}$ for $\mathbf{G} = 2y\mathbf{a}_x$ com $A(1, -1, 2)$ e $P(2, 1, 2)$ usando o caminho (*a*) segmentos de linha reta $A(1, -1, 2)$ para $B(1, 1, 2)$ para $P(2, 1, 2)$; (*b*) segmentos de linha reta $A(1, -1, 2)$ para $C(2, -1, 2)$ para $P(2, 1, 2)$

4.6 Um campo elétrico, no espaço livre, é dado por $\mathbf{E} = x\,\hat{\mathbf{a}}_x + 4z\,\hat{\mathbf{a}}_y + 4y\,\hat{\mathbf{a}}_z$. Dado $V(1, 1, 1) = 10$ V, determine V(3, 3, 3).

4.7 Seja $\mathbf{G} = 3xy^2\mathbf{a}_x + 2z\mathbf{a}_y$. Dado um ponto inicial $P(2, 1, 1)$ e um ponto final $Q(4, 3, 1)$, calcule $\int \mathbf{G} \cdot d\mathbf{L}$ usando o caminho (*a*) linha reta: $y = x - 1$, $z = 1$; (*b*) parábola: $6y = x^2 + 2$, $z = 1$.

4.8 Dado $\mathbf{E} = -x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y$, (*a*) calcule o trabalho envolvido no deslocamento de uma carga unitária positiva por um arco circular do círculo centrado na origem, de $x = a$ até $x = y = a/\sqrt{2}$; (*b*) mostre que o trabalho realizado no movimento da carga ao redor do círculo inteiro de $x = a$ é zero.

4.9 Uma densidade superficial de carga uniforme de 20 nC/m^2 está presente na superfície esférica $r = 0{,}6$ cm no espaço livre. (*a*) Calcule o potencial absoluto em $P(r = 1$ cm, $\theta = 25°, \phi = 50°)$. (*b*) Calcule V_{AB} dados os pontos $A(r = 2$ cm, $\theta = 30°, \phi = 60°)$ e $B(r = 3$ cm, $\theta = 45°, \phi = 90°)$.

4.10 Uma esfera, de raio a, contém uma densidade superficial de carga de ρ_{s0} C/m^2. (*a*) Determine o potencial absoluto na superfície da esfera. (*b*) Uma casca condutora aterrada, de raio b, onde $b > a$, é agora posicionada ao redor da esfera carregada. Qual é o potencial na superfície esférica interna neste caso?

4.11 Seja uma densidade superficial de carga uniforme de 5 nC/m^2 presente no plano $z = 0$, uma densidade linear de carga uniforme de 8 nC/m posicionada em $x = 0$, $z = 4$, e uma carga pontual de 2 μC presente em $P(2, 0, 0)$. Se $V = 0$ em $M(0, 0, 5)$, calcule V em $N(1, 2, 3)$.

4.12 Em coordenadas esféricas, $\mathbf{E} = 2r/(r^2 + a^2)^2\mathbf{a}_r$ V/m. Calcule o potencial em qualquer ponto, usando a referência (*a*) $V = 0$ no infinito; (*b*) $V = 0$ em $r = 0$; (*c*) $V = 100$ V em $r = a$.

4.13 Três cargas pontuais idênticas, de 4 pC cada, estão posicionadas nos vértices de um triângulo equilátero de 0,5 mm de lado, no espaço livre. Quanto trabalho deve ser realizado para mover uma carga para um ponto equidistante das outras duas e na linha que as une?

4.14 Dado o campo elétrico $\mathbf{E} = (y + 1)\mathbf{a}_x + (x - 1)\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$, calcule a diferença de potencial entre os pontos (*a*) $(2, -2, -1)$ e $(0, 0, 0)$; (*b*) $(3, 2, -1)$ e $(-2, -3, 4)$.

4.15 Duas linhas uniformes de cargas de 8 nC/m cada estão posicionadas em $x = 1$, $z = 2$, e em $x = -1$, $y = 2$, no espaço livre. Se o potencial na origem vale 100 V, calcule V em $P(4, 1, 3)$.

4.16 Sabe-se que a função potencial de uma distribuição de carga esfericamente simétrica, no espaço livre (com $a < r < \infty$), é dada por $V(r) = V_0 a^2/r^2$, onde V_0 e a são constantes. (*a*) Determine a intensidade de campo elétrico. (*b*) Calcule a densidade volumétrica de carga. (*c*) Encontre a carga contida no interior do raio a. (*d*) Calcule a energia total armazenada na carga (ou, equivalentemente, em seu campo elétrico), na região $a < r < \infty$.

4.17 Densidades superficiais de carga uniformes de 6 e 2 nC/m^2 estão presentes em $\rho = 2$ e 6 cm, respectivamente, no espaço livre. Considere $V = 0$ em $\rho = 4$ cm e calcule V em (*a*) $\rho = 5$ cm; (*b*) $\rho = 7$ cm.

4.18 Calcule o potencial na origem produzido por uma linha de cargas $\rho_L = kx/(x^2 + a^2)$ que se estende ao longo do eixo x, de $x = a$ até $+\infty$, onde $a > 0$. Considere o zero de referência no infinito.

4.19 A superfície anelar 1 cm $< \rho <$ 3 cm, $z = 0$, está carregada com a densidade superficial não uniforme de carga $\rho_s = 5\rho$ nC/m^2. Calcule V em $P(0, 0, 2 \text{ cm})$ se $V = 0$ no infinito.

4.20 Em determinado meio, o potencial elétrico é dado por

$$V(x) = \frac{\rho_0}{a\epsilon_0}\left(1 - e^{-ax}\right)$$

onde ρ_0 e a são constantes. (*a*) Determine a intensidade de campo elétrico, $\mathbf{E}$. (*b*) Calcule a diferença de potencial entre os pontos $x = d$ e $x = 0$. (*c*) Se a permissividade do meio é dada por $\epsilon(x) = \epsilon_0 e^{ax}$, encontre a densidade de fluxo elétrico, $\mathbf{D}$, e a densidade volumétrica de carga, ρ_v, na região. (*d*) Calcule a energia armazenada na região $(0 < x < d)$, $(0 < y < 1)$, $(0 < z < 1)$.

4.21 Seja $V = 2xy^2z^3 + 3\ln(x^2 + 2y^2 + 3z^2)$ V no espaço livre. Calcule cada uma das seguintes grandezas em $P(3, 2, -1)$ (*a*) V; (*b*) $|V|$; (*c*) $\mathbf{E}$; (*d*) $|\mathbf{E}|$; (*e*) $\mathbf{a}_N$; (*f*) $\mathbf{D}$.

4.22 Uma linha de carga, de comprimento infinito, se estende ao longo do eixo z e contém uma densidade linear uniforme de carga de ρ_ℓ C/m. Uma casca cilíndrica, perfeitamente condutora, cujo eixo coincide com o eixo z, envolve a linha de carga. O cilindro (de raio b) está no mesmo potencial da terra (ou do solo). De acordo com essas condições, a função potencial no interior do cilindro ($\rho < b$) é dada por

$$V(\rho) = k - \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0}\ln(\rho)$$

onde k é uma constante. (*a*) Determine k, expressando-a pelos parâmetros dados ou conhecidos. (*b*) Encontre a intensidade de campo elétrico, $\mathbf{E}$, para $\rho < b$. (*c*) Encontre a intensidade de campo elétrico, $\mathbf{E}$, para $\rho > b$. (*d*) Calcule a energia armazenada no campo elétrico *por unidade de comprimento*, na direção z, no interior do volume definido por $\rho > a$, onde $a < b$.

4.23 Sabe-se que o potencial é dado como $V = 80\rho^{0,6}$ V. Considerando condições de espaço livre, calcule. (*a*) $\mathbf{E}$; (*b*) a densidade volumétrica de carga em $\rho = 0{,}5$ m; (*c*) a carga total dentro da superfície fechada $\rho = 0{,}6$, $0 < z < 1$.

4.24 Uma determinada configuração de carga, esfericamente simétrica e imersa no espaço livre, produz um campo elétrico fornecido em coordenadas esféricas por

$$\mathbf{E}(r) = \begin{cases} (\rho_0 r^2)/(100\epsilon_0)\,\mathbf{a}_r \text{ V/m} & (r \leq 10) \\ (100\rho_0)/(\epsilon_0 r^2)\,\mathbf{a}_r \text{ V/m} & (r \geq 10) \end{cases}$$

onde ρ_0 é uma constante. (*a*) Determine a densidade de carga como uma função da posição. (*b*) Encontre o potencial absoluto como uma função da posição nas regiões $r \leq 10$ e $r \geq 10$. (*c*) Confira seu resultado da parte *b* por meio da utilização do gradiente. (*d*) Calcule a energia armazenada na carga mediante uma integral da forma da Equação (42). (*e*) Calcule a energia armazenada no campo por meio de uma integral da forma da Equação (44).

4.25 Dentro do cilindro $\rho = 2$, $0 < z < 1$, o potencial é dado por $V = 100 + 50\rho + 150\rho \operatorname{sen}\phi$ V. (*a*) Calcule V, $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ e ρ_v em $P(1, 60°, 0{,}5)$ no espaço livre. (*b*) Quanta carga está presente dentro do cilindro?

4.26 Consideremos uma placa muito fina, quadrada e condutora imperfeita de 2 m de lado, posicionada no plano $z = 0$ com um vértice na origem de forma que ela permaneça totalmente dentro do primeiro quadrante. O potencial em qualquer ponto da placa é dado por $V = -e^{-x} \operatorname{sen} y$. (*a*) Um elétron entra na placa em $x = 0$, $y = \pi/3$ com velocidade inicial zero. Em qual direção está seu movimento inicial? (*b*) Por causa de colisões com as partículas da placa, o elétron atinge uma velocidade relativamente baixa e pequena aceleração (o trabalho que o campo exerce nele é convertido, em grande parte, em calor).

O elétron se move, portanto, ao longo de uma linha de força. Onde ele deixa a placa e em que direção estará se movimentando nesse instante?

4.27 Duas cargas pontuais de 1 nC em (0, 0, 0,1) e -1 nC em (0, 0, -0,1) estão no espaço livre. (*a*) Calcule V em P(0,3, 0, 0,4). (*b*) Calcule $|\mathbf{E}|$ em P. (*c*) Agora trate as duas cargas como um dipolo na origem e calcule V em P.

4.28 Use a intensidade de campo elétrico de um dipolo [Seção 4.7, Equação (35)] para calcular a diferença no potencial entre pontos em θ_a e θ_b, cada ponto tendo as mesmas coordenadas r e ϕ. Sob quais condições a resposta concorda com a Equação (33), para o potencial em θ_a?

4.29 Um dipolo que tem um momento $\mathbf{p} = 3\mathbf{a}_x - 5\mathbf{a}_y + 10\mathbf{a}_z$ nC · m está posicionado em $Q(1, 2, -4)$ no espaço livre. Calcule V em $P(2, 3, 4)$.

4.30 Um dipolo para o qual $\mathbf{p} = 10\epsilon_0\mathbf{a}_z$ C · m está posicionado na origem. Qual é a equação da superfície em que $E_z = 0$, mas $\mathbf{E} \neq \mathbf{0}$?

4.31 Um campo de potencial no espaço livre é expresso por $V = 20/(xyz)$ V. (*a*) Calcule a energia total armazenada dentro do cubo $1 < x, y, z < 2$. (*b*) Qual valor seria obtido caso fosse considerada uma densidade uniforme de energia igual ao valor no centro do cubo?

4.32 (*a*) Utilizando a Equação (35), calcule a energia armazenada no campo do dipolo na região $r > a$. (*b*) Por que não podemos deixar a se aproximar de zero, no limite?

4.33 Uma esfera de cobre de raio 4 cm está carregada com uma carga total uniformemente distribuída de 5 μC, no espaço livre. (*a*) Use a lei de Gauss para achar **D** externo à esfera. (*b*) Calcule a energia total armazenada no campo eletrostático. (*c*) Use $W_E = Q^2/(2C)$ para calcular a capacitância da esfera isolada.

4.34 Uma esfera de raio a contém uma densidade volumétrica de carga uniforme ρ_0 C/m^3. Encontre a energia total armazenada aplicando (*a*) a Equação (42); (*b*) a Equação (44).

4.35 Quatro cargas pontuais de 0,8 nC estão posicionadas, no espaço livre, nos vértices de um quadrado de 4 cm de lado. (*a*) Calcule a energia potencial total armazenada. (*b*) Uma quinta carga de 0,8 nC é instalada no centro do quadrado. Novamente, calcule a energia total armazenada.

4.36 Uma densidade superficial uniforme de carga, ρ_s, está distribuída em uma casca esférica de raio b, centrada na origem e imersa no espaço livre. (*a*) Determine o potencial absoluto em qualquer parte, com o zero de referência no infinito. (*b*) Encontre a energia armazenada na esfera por meio da consideração da densidade de carga e do potencial em uma versão bidimensional da Equação (42). (*c*) Calcule a energia armazenada no campo elétrico e mostre que os resultados das partes (*b*) e (*c*) são idênticos.

5

Condutores e Dielétricos

Neste capítulo, aplicaremos as leis e os métodos que aprendemos a alguns dos materiais com os quais um engenheiro deve trabalhar. Na primeira parte do capítulo, estudaremos os materiais condutores ao descrever os parâmetros que relacionam corrente a campo elétrico aplicado. Isso conduz à definição geral da lei de Ohm. Com esses resultados, poderemos calcular valores de resistência para algumas das formas geométricas mais simples que os condutores podem assumir. As condições que devem ser respeitadas nas fronteiras dos condutores serão encontradas em seguida, e esse conhecimento nos possibilitará introduzir o uso das imagens. As propriedades de semicondutores serão descritas para concluir a discussão de meios condutores.

Na segunda parte do capítulo, estudaremos os materiais isolantes, ou dielétricos. Tais materiais diferem dos condutores pois, idealmente, não existe carga livre que possa ser transportada dentro dos mesmos para produzir corrente de condução. Em vez disso, todas as cargas estão confinadas à estrutura molecular ou cristalina pelas forças de coulomb. Um campo elétrico aplicado tem o efeito de deslocar as cargas ligeiramente, levando à formação de um conjunto de dipolos elétricos. A extensão desse efeito é medida pela permissividade relativa, ou constante dielétrica. A polarização do meio pode modificar o campo elétrico, cuja intensidade, direção e sentido podem diferir dos valores que apareceriam em um dielétrico diferente ou no espaço livre. As condições de fronteira para os campos nas interfaces entre dielétricos serão investigadas com o objetivo de avaliar essas diferenças.

Deve-se notar, também, que a maioria dos materiais possuirá ambas as propriedades, a dielétrica e a condutora; isto quer dizer que, um material considerado dielétrico pode ser ligeiramente condutivo, e um material que é principalmente condutivo pode ser ligeiramente polarizável. Essas variações dos casos ideais levam a alguns comportamentos interessantes, particularmente com relação aos efeitos na propagação de ondas eletromagnéticas, conforme será visto posteriormente. ■

5.1 CORRENTE E DENSIDADE DE CORRENTE

Cargas elétricas em movimento constituem uma *corrente*. A unidade de corrente é o ampère (A), definido como a taxa de movimento de cargas que passam por um dado ponto de referência (ou atravessando um dado plano de referência) de um coulomb por segundo. A corrente é simbolizada por I;

$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{1}$$

Assim, a corrente é definida como o movimento de cargas positivas, apesar da condução em metais ocorrer pela movimentação de elétrons, conforme veremos em breve.

Em teoria de campo, é mais provável que estejamos interessados em eventos que ocorrem em um ponto e não em alguma região ampla, e por isso acharemos mais útil o conceito de *densidade de corrente*, medida em ampères por metro quadrado (A/m^2). A densidade de corrente é um vetor[1] representado por **J**.

O incremento de corrente ΔI que atravessa uma superfície incremental ΔS normal à densidade de corrente é

$$\Delta I = J_N \Delta S$$

e no caso em que a densidade de corrente não é perpendicular à superfície,

$$\Delta I = \mathbf{J} \cdot \Delta \mathbf{S}$$

A corrente total é obtida por integração,

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \tag{2}$$

A densidade de corrente pode ser relacionada à velocidade da densidade volumétrica de carga em um ponto. Considere o elemento de carga $\Delta Q = \rho_v \Delta \nu = \rho_v \, \Delta S \, \Delta L$, conforme mostrado na Figura 5.1*a*. Para simplificar a explicação, vamos considerar que o elemento de carga está orientado com suas arestas paralelas aos eixos coordenados e que possui apenas um componente x de velocidade. No intervalo de tempo Δt, verificamos que o elemento de carga se move por uma distância Δx, como indicado na Figura 5.1*b*. Assim, movemos uma carga $\Delta Q = \rho_v \, \Delta S \, \Delta x$ por um plano de referência perpendicular à direção de movimento em um incremento de tempo Δt, e a corrente resultante é

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho_v \, \Delta S \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Quando tomamos o limite com relação ao tempo, temos

$$\Delta I = \rho_v \, \Delta S \, v_x$$

[1] Corrente não é um vetor, pois é fácil visualizar um problema no qual uma corrente total I em um condutor de seção reta não uniforme (como uma esfera) deve ter direções diferentes em cada ponto de uma dada seção reta. A corrente em um fio extremamente fino, ou uma *corrente filamentar*, é ocasionalmente definida como um vetor, mas normalmente preferimos ser consistentes e dar a direção ao filamento ou ao caminho, e não à corrente.

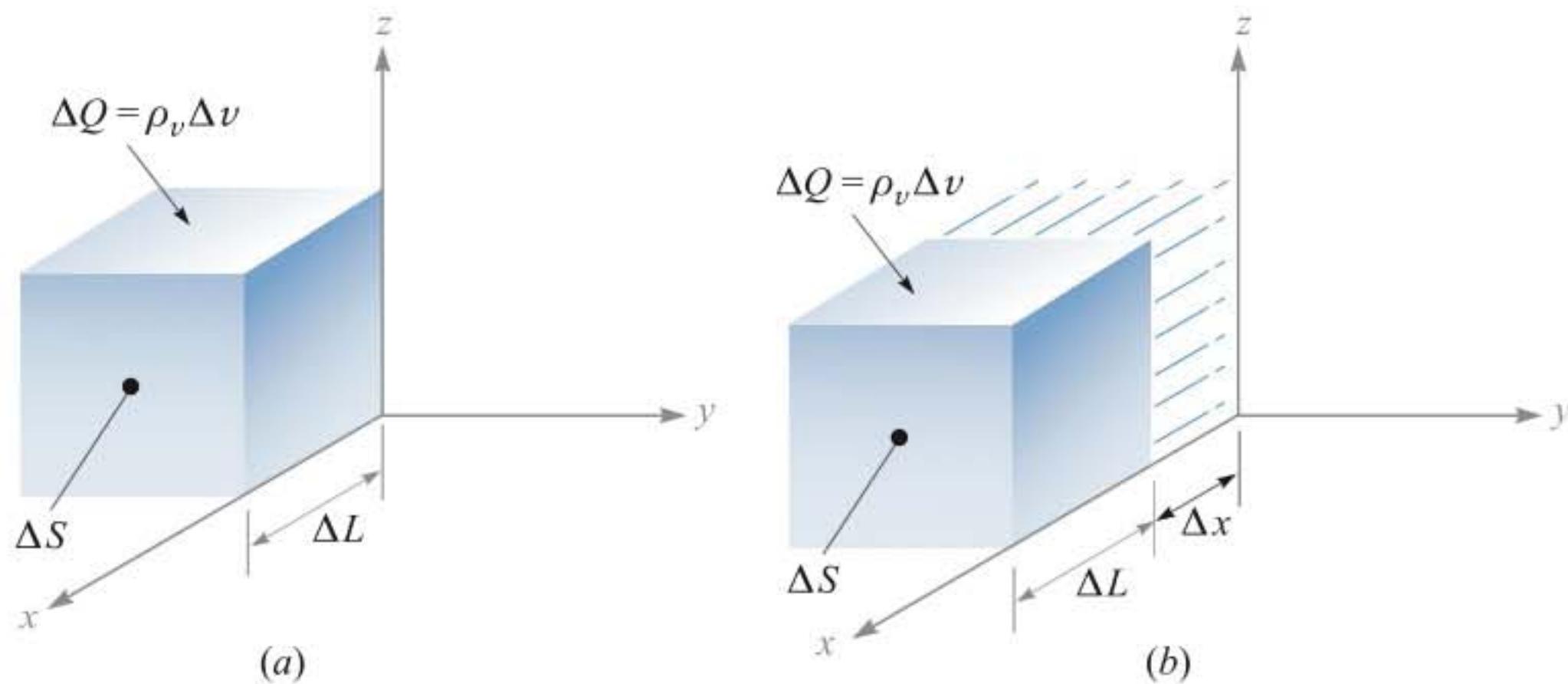



Figura 5.1 Um incremento de carga, $\Delta Q = \rho_v \Delta S \Delta L$, que se move por uma distância Δx em um tempo Δt, produz um componente de densidade de corrente, (no limite), de $J_x = \rho_v v_x$.

onde v_x representa o componente em x da velocidade $\mathbf{v}$.[2] Considerando agora a densidade de corrente, encontramos

$$J_x = \rho_v \, v_x$$

e, de uma forma genérica,

$$\boxed{\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{v}} \tag{3}$$

Este último resultado mostra, de forma muito clara, que a carga em movimento se constitui em corrente. Chamamos esse tipo de corrente de *corrente de convecção*, e $\mathbf{J}$ ou $\rho_v\mathbf{v}$ é a *densidade de corrente de convecção*. Note que a densidade de corrente de convecção está linearmente relacionada à densidade de carga, assim como à velocidade. A taxa de fluxo de massa de carros (carros por metro quadrado por segundo) no Túnel Holland, por exemplo, poderia ser elevada tanto pelo aumento na densidade de carros por metro cúbico quanto pelo aumento da velocidade dos carros, se os motoristas forem capazes de assim o fazer.

EP5.1. Dado o vetor densidade de corrente $\mathbf{J} = 10\rho^2 z\mathbf{a}_\rho - 4\rho\cos^2\phi\,\mathbf{a}_\phi$ mA/m^2: (*a*) calcule a densidade de corrente em $P(\rho = 3, \phi = 30°, z = 2)$; (*b*) determine a corrente total que flui para fora da faixa circular $\rho = 3$, $0 < \phi < 2\pi$, $2 < z < 2{,}8$.

Resp. $180\mathbf{a}_\rho - 9\mathbf{a}_\phi$ mA/m^2; 3,26 A

5.2 CONTINUIDADE DA CORRENTE

A introdução do conceito de corrente é seguida, logicamente, por uma discussão sobre a conservação da carga e da equação da continuidade. O princípio da conservação da carga determina simplesmente que cargas não podem ser criadas e nem destruídas,

[2] A letra v em minúsculo é utilizada tanto para volume quando para velocidade. Note, entretanto, que velocidade sempre aparece como um vetor $\mathbf{v}$, um componente v_x, ou uma intensidade $|\mathbf{v}|$, enquanto o volume aparece apenas na forma diferencial como dv ou Δv.

apesar de quantidades iguais de cargas positivas e negativas poderem ser *simultaneamente* criadas, obtidas por separação, destruídas ou perdidas por recombinação.

A equação da continuidade vem deste princípio, quando consideramos qualquer região limitada por uma superfície fechada. A corrente pela superfície fechada é

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

e este *fluxo para fora* de carga positiva deve ser balanceado pelo decréscimo de cargas positivas (ou, talvez, um aumento de carga negativa) dentro da superfície fechada. Se a carga dentro da superfície fechada é denotada por Q_i, então a taxa de decréscimo é $-dQ_i/dt$ e o princípio de conservação de cargas requer

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ_i}{dt} \tag{4}$$

Seria bom responder aqui a uma pergunta frequentemente formulada: "Não há um erro no sinal? Pensei que $I = dQ/dt$". A presença ou ausência de sinal negativo depende de qual corrente e carga consideramos. Na teoria de circuitos, normalmente, associamos o fluxo de corrente para dentro de um terminal de um capacitor com a taxa temporal de aumento da carga naquela placa. A corrente da Equação (4), entretanto, é uma corrente que *flui para fora*.

A Equação (4) é a forma integral da equação da continuidade, e a forma diferencial, ou pontual, é obtida utilizando-se o teorema da divergência para mudar a integral de superfície em uma integral volumétrica:

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{vol}} (\nabla \cdot \mathbf{J})\, dv$$

Em seguida, representamos a carga envolvida Q_i pela integral volumétrica da densidade de carga,

$$\int_{\text{vol}} (\nabla \cdot \mathbf{J})\, dv = -\frac{d}{dt} \int_{\text{vol}} \rho_v\, dv$$

Se concordarmos em manter a superfície constante, a derivada se torna uma derivada parcial e pode aparecer dentro da integral,

$$\int_{\text{vol}} (\nabla \cdot \mathbf{J})\, dv = \int_{\text{vol}} -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}\, dv$$

da qual temos a forma pontual da equação da continuidade,

$$(\nabla \cdot \mathbf{J}) = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \tag{5}$$

Relembrando o significado físico da divergência, essa equação indica que a corrente (ou carga por segundo), que diverge de um pequeno volume, por unidade de volume, é igual à taxa temporal de decréscimo da carga por unidade de volume em cada ponto.

Como um exemplo numérico que ilustra alguns dos conceitos das duas últimas seções, vamos considerar uma densidade de corrente que está direcionada radialmente para fora e decresce exponencialmente com o tempo,

$$\mathbf{J} = \frac{1}{r}e^{-t}\mathbf{a}_r \text{ A/m}^2$$

Selecionando um instante de tempo $t = 1$ s, podemos calcular a corrente total que flui para fora em $r = 5$ m:

$$I = J_r S = \left(\tfrac{1}{5}e^{-1}\right)(4\pi 5^2) = 23{,}1 \text{ A}$$

No mesmo instante, mas para um raio ligeiramente maior, $r = 6$ m, temos

$$I = J_r S = \left(\tfrac{1}{6}e^{-1}\right)\left(4\pi 6^2\right) = 27{,}7 \text{ A}$$

Logo, a corrente total é maior em $r = 6$ que em $r = 5$.

Para verificar por que isso acontece, precisamos olhar para a densidade volumétrica de carga e para a velocidade. Usamos a equação da continuidade primeiro:

$$-\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{r}e^{-t}\mathbf{a}_r\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{1}{r}e^{-t}\right) = \frac{1}{r^2}e^{-t}$$

Em seguida, determinamos a densidade volumétrica de carga integrando com relação a t. Uma vez que ρ_v é dada por uma derivada parcial com relação ao tempo, a "constante" de integração pode ser uma função de r:

$$\rho_v = -\int \frac{1}{r^2}e^{-t}\,dt + K(r) = \frac{1}{r^2}e^{-t} + K(r)$$

Se considerarmos que $\rho_v \to 0$ à medida que $t \to \infty$, então $K(r) = 0$, e

$$\rho_v = \frac{1}{r^2}e^{-t} \text{ C/m}^3$$

Podemos, agora, utilizar $\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{v}$ para encontrar a velocidade,

$$v_r = \frac{J_r}{\rho_v} = \frac{\frac{1}{r}e^{-t}}{\frac{1}{r^2}e^{-t}} = r \text{ m/s}$$

A velocidade é maior em $r = 6$ do que em $r = 5$, e vemos que alguma força (não especificada) está acelerando a densidade de carga em uma direção para fora.

Resumindo, temos uma densidade de corrente que é inversamente proporcional a r, uma densidade de carga que é inversamente proporcional a r^2 e uma velocidade e corrente total que são proporcionais a r. Todas as grandezas variam com e^{-t}.

EP5.2. Uma densidade de corrente é dada em coordenadas cilíndricas como $\mathbf{J} = -10^6 z^{1,5}\mathbf{a}_z$ A/m^2 na região $0 \le \rho \le 20$ μm. Para $\rho \ge 20$ μm, $\mathbf{J} = \mathbf{0}$. (*a*) Calcule a corrente total que atravessa a superfície $z = 0{,}1$ m na direção $\mathbf{a}_z$. (*b*) Se a velocidade da carga é 2×10^6 m/s em $z = 0{,}1$ m, calcule ρ_v. (*c*) Se a densidade volumétrica de carga em $z = 0{,}15$ m é -2.000 C/m^3, calcule a velocidade da carga.

Resp. $-39{,}7$ μA; $-15{,}8$ mC/m^3; 29,0 m/s

5.3 CONDUTORES METÁLICOS

Atualmente, os físicos descrevem o comportamento dos elétrons ao redor do núcleo atômico positivo considerando a energia total do elétron em relação a um nível de referência zero para um elétron a uma distância infinita do núcleo. A energia total é a soma das energias cinética e potencial, e uma vez que energia deve ser doada a um elétron para afastá-lo do núcleo, a energia de cada elétron no átomo é uma quantidade negativa. Apesar de esse quadro apresentar algumas limitações, é conveniente associar esses valores de energia com órbitas ao redor do núcleo, já que as energias mais negativas correspondem a órbitas de raios menores. De acordo com a teoria quântica, apenas alguns níveis discretos de energia (ou estados de energia) são permitidos em um dado átomo, e um elétron deve, portanto, absorver ou emitir quantidades discretas de energia, (ou quanta) quando passa de um nível para outro. Em um átomo normal na temperatura zero absoluto há um elétron ocupando cada uma das camadas de energia mais baixas, começando do núcleo e continuando para fora, até que o suprimento de elétrons se esgote.

Em um sólido cristalino, tal como em um metal ou em um diamante, os átomos estão agrupados próximos uns dos outros, muito mais elétrons estão presentes e muito mais níveis permitidos de energia estão disponíveis por causa das forças de interação entre átomos adjacentes. Verificamos que as energias que podem ser possuídas pelos elétrons estão agrupadas em faixas largas ou "bandas", e cada uma consiste em níveis discretos muito numerosos e pouco espaçados uns dos outros. Em uma temperatura de zero absoluto, o sólido normal também possui cada nível ocupado, começando pelo mais baixo e procedendo em ordem, até que todos os elétrons estejam posicionados. Os elétrons com os níveis de energia mais altos (menos negativos), os elétrons de valência, estão posicionados na *banda de valência*. Se existirem níveis de energia mais altos permitidos na banda de valência, ou se a banda de valência se unir suavemente a uma *banda de condução*, verificaremos que energia cinética adicional pode ser dada aos elétrons de valência por um campo externo, resultando em um fluxo de elétrons. O sólido é então chamado de *condutor metálico*. A banda de valência preenchida e a banda de condução não totalmente preenchida para um condutor na temperatura zero absoluto, são sugeridas pelo esboço na Figura 5.2*a*.

Energia

Banda de condução vazia
Banda de valência preenchida
Condutor
(*a*)

Banda de condução vazia
Banda proibida de energia
Banda de valência preenchida
Isolante
(*b*)

Banda de condução vazia
Banda proibida de energia
Banda de valência preenchida
Semicondutor
(*c*)

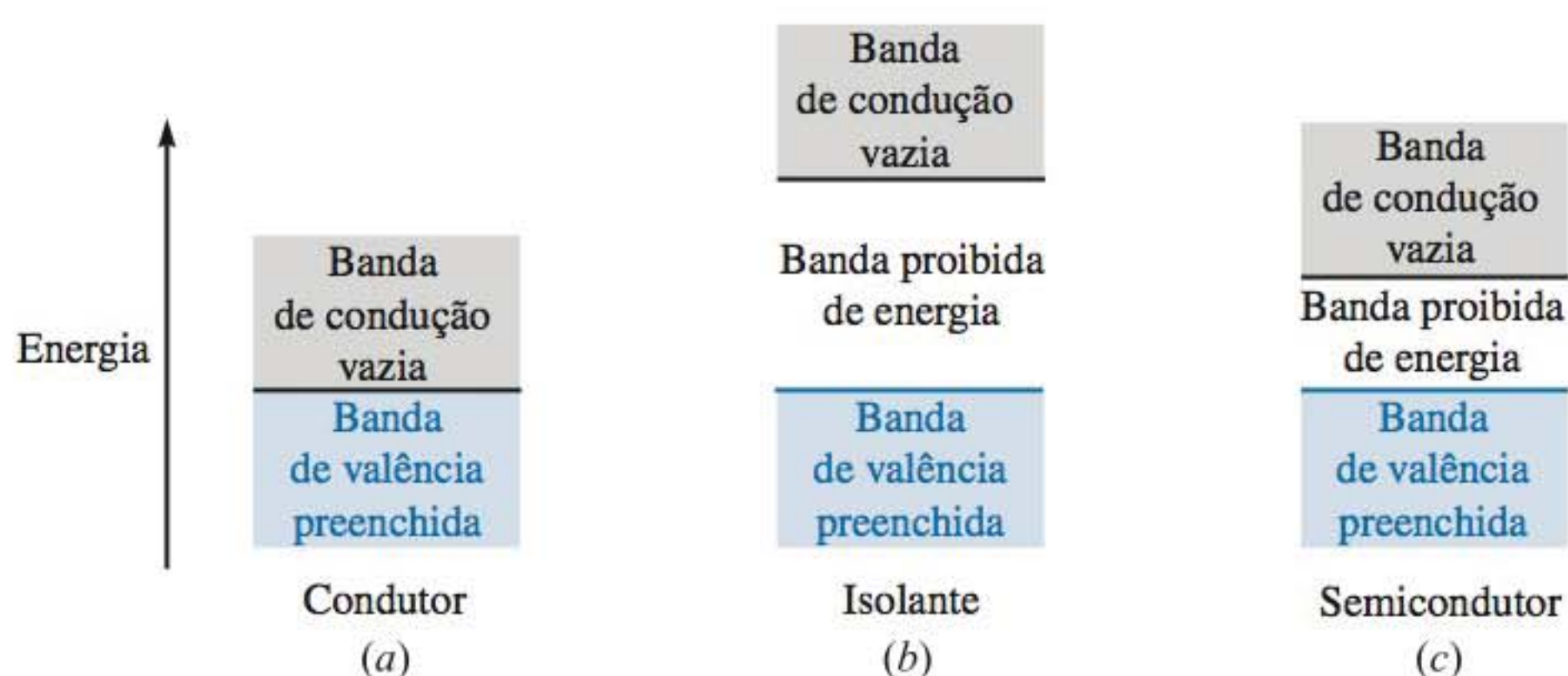



Figura 5.2 A estrutura em bandas de energia em três diferentes tipos de materiais a 0 K. (*a*) O condutor não exibe banda proibida de energia entre as bandas de valência e de condução. (*b*) O isolante apresenta uma grande banda proibida de energia. (*c*) O semicondutor tem apenas uma pequena banda proibida de energia.

Entretanto, se o elétron com a energia mais alta ocupa o nível máximo na banda de valência e existe uma "banda proibida" (*gap*) entre as bandas de valência e de condução, o elétron não pode aceitar energia adicional em pequenas quantidades, e o material será um isolante. Essa estrutura em bandas é indicada na Figura 5.2*b*. Note que se uma quantidade relativamente grande de energia puder ser transferida para o elétron, ele pode ser suficientemente estimulado a saltar a banda proibida, indo para a próxima banda onde a condução possa acontecer com facilidade. Neste caso, o isolante será rompido.

Uma condição intermediária ocorre quando apenas uma pequena banda proibida separa as duas bandas, conforme ilustrado na Figura 5.2*c*. Pequenas quantidades de energia na forma de calor, luz ou um campo elétrico podem aumentar a energia dos elétrons no topo da banda preenchida e proporcionar a base para a condução. Esses materiais são isolantes que apresentam muitas das propriedades dos condutores e são chamados de *semicondutores*.

Vamos, primeiramente, considerar o condutor. Nele, os elétrons de valência, ou elétrons de *condução* ou *livres*, movem-se sob a influência de um campo elétrico. Com um campo **E**, um elétron que tem uma carga $Q = -e$ experimentará a força

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$$

No espaço livre, o elétron aceleraria e continuamente aumentaria sua velocidade (e energia). No material cristalino, o progresso do elétron é impedido pelas colisões contínuas com a rede cristalina termicamente estimulada, e uma velocidade média constante é logo atingida. Esta velocidade, $\mathbf{v}_d$, é chamada de *velocidade de deriva*[*], e está linearmente relacionada à intensidade de campo elétrico pela *mobilidade* dos elétrons em um dado material. Designamos mobilidade pelo símbolo μ (mu), de forma que

$$\mathbf{v}_d = -\mu_e \mathbf{E} \tag{6}$$

onde μ_ϵ é a mobilidade de um elétron e é positiva por definição. Note que a velocidade do elétron está em sentido oposto ao de **E**. A Equação (6) também mostra que a mobilidade é medida nas unidades de metros ao quadrado por volt-segundo; valores típicos[3] são 0,0012 para o alumínio, 0,0032 para o cobre e 0,0056 para a prata.

Para esses bons condutores, uma velocidade de deriva de poucos centímetros por segundo é suficiente para produzir um aumento de temperatura notável e pode causar o derretimento do fio se o calor não puder ser rapidamente retirado por condução térmica ou radiação.

Substituindo (6) na Equação (3) da Seção 5.1, obtemos

$$\boxed{\mathbf{J} = -\rho_e \mu_e \mathbf{E}} \tag{7}$$

onde ρ_e é a densidade de carga de elétrons livres, um valor negativo. A densidade de carga total ρ_v é zero, porque cargas positivas e negativas iguais estão presentes no material neutro. O valor negativo de ρ_e e o sinal de menos levam a uma densidade de corrente **J** que está na mesma direção da intensidade de campo elétrico **E**.

[3] Wert e Thomson, p. 238, listado nas Referências no final deste capítulo.

* N. de T.: Do inglês, *drift velocity*.

A relação entre **J** e **E** para um condutor metálico, contudo, é também especificada pela condutividade σ (sigma),

WWW Ilustração

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \tag{8}$$

onde σ é medido em siemens[4] por metro (S/m). Um siemens (1 S) é a unidade básica de condutância no sistema SI e é definido como um ampère por volt. Anteriormente, a unidade de condutância era chamada de mho, simbolizada por um Ω *invertido*. Assim como o siemens reverencia os irmãos Siemens, a unidade recíproca, associada à resistência, é chamada de ohm (1 Ω é um volt por ampère), reverenciando George Simon Ohm, um físico alemão que descreveu pela primeira vez a relação entre tensão e corrente, implícita na Equação (8). Chamamos essa equação de *forma pontual da lei de Ohm*. Veremos a forma mais comum da lei de Ohm brevemente.

Entretanto, primeiramente é interessante saber a condutividade de vários condutores metálicos. Valores típicos (em siemens por metro) são de $3{,}82 \times 10^7$ para o alumínio, $5{,}80 \times 10^7$ para o cobre e $6{,}17 \times 10^7$ para a prata. Dados para outros condutores podem ser encontrados no Apêndice C. Quando se observa dados como esses, é mais que natural verificarmos que estamos sendo apresentados a valores *constantes* – o que é a mais pura verdade. Condutores metálicos obedecem à lei de Ohm bastante fielmente, e essa é uma relação *linear*. A condutividade é constante para uma larga faixa de densidade de corrente e de intensidade de campo elétrico. A lei de Ohm e os condutores metálicos são também descritos como *isotrópicos*, ou seja, suas propriedades são as mesmas em todas as direções. Um material que não é isotrópico é chamado de *anisotrópico*, e vamos tratar de materiais desse tipo no Capítulo 6.

Contudo, a condutividade é uma função da temperatura. A resistividade, que é o recíproco da condutividade, varia quase linearmente com a temperatura na região da temperatura ambiente, e para o alumínio, o cobre e a prata, aumenta em aproximadamente 0,4% para um aumento de temperatura de 1 K.[5] Para diversos metais, a resistividade cai abruptamente até zero quando em uma temperatura de poucos kelvin. Essa propriedade é chamada de *supercondutividade*. Cobre e prata não são supercondutores, apesar do alumínio sê-lo, em temperaturas abaixo de 1,14 K.

Se agora combinarmos as Equações (7) e (8), a condutividade poderá ser expressa pela densidade de carga e pela mobilidade do elétron,

$$\sigma = -\rho_e \mu_e \tag{9}$$

Pela definição de mobilidade da Equação (6), é interessante notar nesse momento que uma alta temperatura acarreta uma maior vibração da rede cristalina, um maior impedimento para o progresso de elétrons para uma dada intensidade de campo elétrico, uma menor velocidade de deriva, uma menor mobilidade, uma menor condutividade da Equação (9) e uma maior resistividade, conforme afirmado.

[4] Este é o nome de família de dois irmãos nascidos na Alemanha, Karl Wilhelm e Werner von Siemens, que foram famosos inventores engenheiros no século XIX. Karl se tornou um cidadão britânico e foi nomeado Cavaleiro, tornando-se *Sir* William Siemens.

[5] Uma grande quantidade de dados sobre temperatura para materiais condutores estão disponíveis no *Standard Handbook for Electrical Engineering*, listado nas Referências no final deste capítulo.

A aplicação da lei de Ohm na forma pontual para uma região macroscópica (vista a olho nu) leva a uma forma mais familiar. Inicialmente, consideremos que **J** e **E** são *uniformes* e estão na região cilíndrica mostrada na Figura 5.3. Uma vez que são uniformes,

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = JS \tag{10}$$

e

$$\begin{aligned} V_{ab} &= -\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\mathbf{E} \cdot \int_b^a d\mathbf{L} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{L}_{ba} \\ &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{L}_{ab} \end{aligned} \tag{11}$$

ou

$$V = EL$$

Logo

$$J = \frac{I}{S} = \sigma E = \sigma \frac{V}{L}$$

ou

$$V = \frac{L}{\sigma S} I$$

A razão da diferença de potencial entre as duas extremidades do cilindro e a corrente que entra no terminal mais positivo, contudo, é conhecida da teoria elementar de circuitos como a *resistência* do cilindro, e por isso

$$\boxed{V = IR} \tag{12}$$

onde

$$\boxed{R = \frac{L}{\sigma S}} \tag{13}$$

A Equação (12) obviamente é conhecida como *lei de Ohm*, e a Equação (13) nos permite calcular a resistência R, medida em ohms (abreviada como Ω), de objetos condutores que possuem campos uniformes. Se os campos não são uniformes, a resistência pode, ainda, ser definida como a razão de V por I, onde V é a diferença de potencial

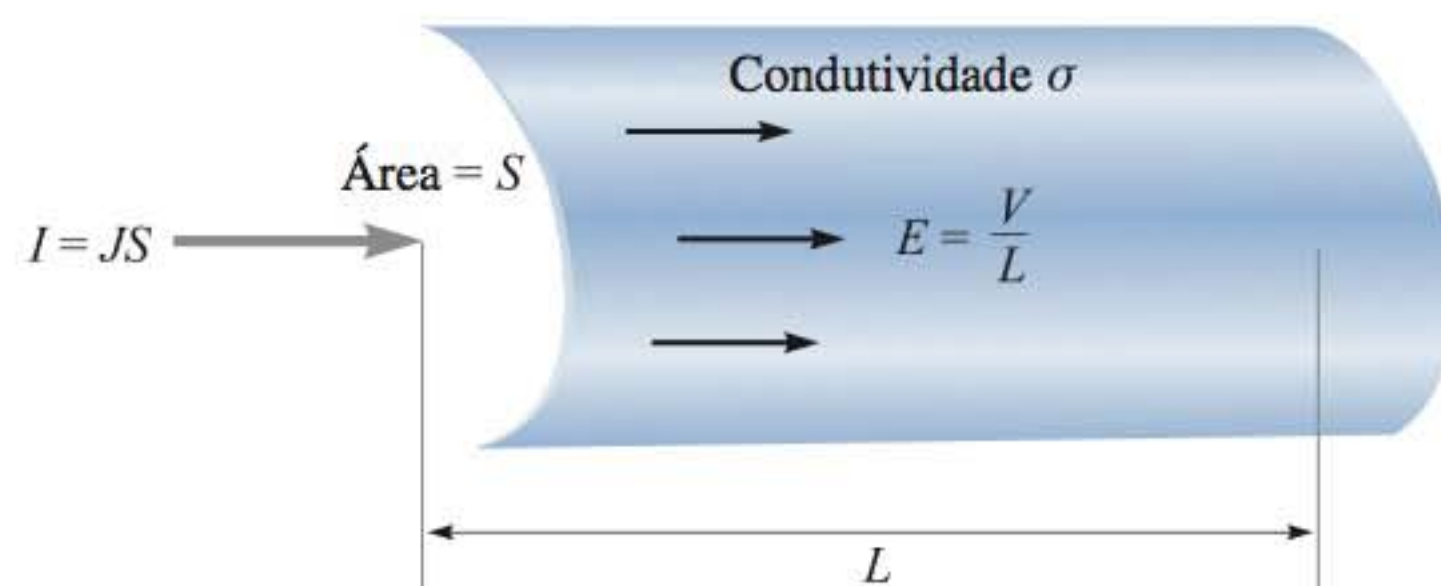



Figura 5.3 Densidade de corrente J e intensidade de campo elétrico E uniformes em uma região cilíndrica de comprimento L e seção reta de área S. Aqui, $V = IR$, onde $R = L/\sigma S$.

entre duas superfícies equipotenciais especificadas no material e I é a corrente total que atravessa a superfície mais positiva no material. Pelas relações integrativas genéricas nas Equações (10) e (11) e pela lei de Ohm na Equação (8), podemos escrever essa expressão mais genérica para a resistência quando os campos não são uniformes,

$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{-\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}{\int_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}} \tag{14}$$

A integral de linha é tomada entre as duas superfícies equipotenciais no condutor, e a integral de superfície é calculada na mais positiva dessas duas equipotenciais. Não podemos resolver esses problemas não uniformes neste momento, mas deveremos ser capazes de resolver vários deles após passarmos pelo Capítulo 6.

EXEMPLO 5.1

Como um exemplo da determinação da resistência de um cilindro, vamos calcular a resistência de um fio de cobre #16, de 1,609 km de comprimento, que possui um diâmetro de 1,291 mm.

Solução. O diâmetro do fio é de $1{,}291 \times 10^{-3}$ m, a área da seção reta é $\pi\,(1{,}291 \times 10^{-3}/2)^2 = 1{,}308 \times 10^{-6}\ \text{m}^2$, e o comprimento é de 1.609 m. Utilizando uma condutividade de $5{,}80 \times 10^7$ S/m, a resistência do fio é, portanto,

$$R = \frac{1.609}{(5{,}80 \times 10^7)(1{,}308 \times 10^{-6})} = 21{,}2\ \Omega$$

Este fio pode, seguramente, suportar 10 A c.c., correspondendo a uma densidade de corrente de $10/(1{,}308 \times 10^{-6}) = 7{,}65 \times 10^6\ \text{A/m}^2$, ou $7{,}65\ \text{A/mm}^2$. Com essa corrente, a diferença de potencial entre as duas extremidades do fio é 212 V, a intensidade do campo elétrico é 0,312 V/m, a velocidade de deriva é 0,000422 m/s, ou um pouco mais que ¼ de quilômetro por semana, e a densidade de carga de elétrons livres é $-1{,}81 \times 10^{10}\ \text{C/m}^3$, ou aproximadamente um elétron por cubo de dois ângstrons de lado.

EP5.3. Calcule a intensidade da densidade de corrente em uma amostra de prata para a qual $\sigma = 6{,}17 \times 10^7$ S/m e $\mu_e = 0{,}0056\ \text{m}^2/\text{V}\cdot\text{s}$ se: (*a*) a velocidade de deriva é 1,5 μm/s; (*b*) a intensidade de campo elétrico é 1 mV/m; (*c*) a amostra é um cubo de 2,5 mm de lado e tem uma tensão de 0,4 mV entre faces opostas; (*d*) a amostra é um cubo de 2,5 mm de lado e por ela passa uma corrente total de 0,5 A.

Resp. 16,5 kA/m^2; 61,7 kA/m^2; 9,9 MA/m^2; 80,0 kA/m^2

EP5.4. Um condutor de cobre tem um diâmetro de 15,24 mm e comprimento de 365,7 m. Suponha que por ele circule uma corrente total de 50 A c.c. (*a*) Calcule a resistência total do condutor. (*b*) Que valor de densidade de corrente existe nele? (*c*) Qual é a tensão contínua entre as extremidades do condutor? (*d*) Quanta potência é dissipada no fio?

Resp. 0,035 Ω; $2{,}74 \times 10^5\ \text{A/m}^2$; 1,73 V; 86,4 W

5.4 PROPRIEDADES DOS CONDUTORES E CONDIÇÕES DE FRONTEIRA

Devemos temporariamente nos afastar mais uma vez das condições estáticas consideradas e deixar o tempo variar por alguns microssegundos para verificar o que acontece quando a distribuição de cargas é subitamente desbalanceada dentro de um material condutor. Vamos supor, para fins de argumentação, que apareça subitamente uma quantidade de elétrons no interior de um condutor. Os campos elétricos criados por esses elétrons não são contrapostos por nenhuma carga positiva, e os elétrons, portanto, começam a acelerar afastando-se uns dos outros. Isso continua até os elétrons atingirem a superfície do condutor, ou até que uma quantidade de elétrons igual à quantidade injetada atinja a superfície.

Neste ponto, a progressão dos elétrons afastando-se uns dos outros é interrompida, pois o material que envolve o condutor é um isolante que não possui uma banda de condução conveniente. Nenhuma carga deve permanecer dentro do condutor. Se permanecesse, o campo elétrico resultante forçaria as cargas em direção à superfície.

Por isso, o resultado final dentro de um condutor é uma densidade de carga igual a zero, e uma densidade superficial de carga em sua superfície exterior. Essa é uma das duas características de um bom condutor.

A outra característica, enunciada para condições estáticas nas quais nenhuma corrente pode fluir, deriva diretamente da lei de Ohm: a intensidade de campo elétrico dentro do condutor é zero. Fisicamente, vemos que se um campo elétrico estivesse presente, os elétrons de condução se moveriam e produziriam uma corrente, levando, assim, a uma condição não estática.

Resumindo, segundo a eletrostática nenhuma carga e nenhum campo elétrico podem existir em qualquer ponto *dentro* de um material condutor. Contudo, carga pode aparecer na superfície, na forma de uma densidade superficial de carga, e nossa próxima investigação vai tratar de campos *externos* ao condutor.

Desejamos relacionar esses campos externos à carga na superfície do condutor. O problema é simples, e vamos, primeiramente, direcionar nosso caminho para uma solução com pouca matemática.

Se a intensidade de campo elétrico externo for decomposta em dois componentes, um tangencial e outro normal à superfície do condutor, perceberemos que o componente tangencial é zero. Se não fosse zero, uma força tangencial seria aplicada aos elementos de carga superficial, resultando no deslocamento dos mesmos e condições não estáticas. Uma vez que condições estáticas são consideradas, a intensidade de campo elétrico e densidade de fluxo elétrico tangenciais serão iguais a zero.

A lei de Gauss responde nossas perguntas relativas ao componente normal. O fluxo elétrico que deixa um pequeno incremento de superfície deve ser igual à carga que reside na superfície incremental. O fluxo não pode penetrar no condutor, pois o campo total em seu interior é zero; assim, deve deixar ortogonalmente a superfície do condutor. Quantitativamente, podemos dizer que a densidade de fluxo elétrico em coulombs por metro quadrado que deixa a superfície normalmente é igual à densidade superficial de carga em coulombs por metro quadrado, ou $D_N = \rho_S$.

Se utilizarmos alguns dos nossos resultados anteriormente derivados na realização de uma análise mais cuidadosa (e, incidentalmente, introduzir um método genérico que deveremos utilizar depois), poderemos estabelecer uma fronteira entre

um condutor e o espaço livre (Figura 5.4), mostrando os componentes tangenciais e normais de **D** e **E** no lado do espaço livre da fronteira. Ambos os campos são zero no condutor. O campo tangencial pode ser determinado aplicando a Equação (20), Seção 4.5,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

ao redor do pequeno caminho fechado *abcda*. A integral deve ser quebrada em quatro partes

$$\int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a = 0$$

Lembrando que $\mathbf{E} = 0$ dentro do condutor, expressamos o comprimento de a até b ou de c até d por Δw e de b para c ou de d para a por Δh, e obtemos

$$E_t \Delta w - E_{N,\text{em}\, b} \tfrac{1}{2} \Delta h + E_{N,\text{em}\, a} \tfrac{1}{2} \Delta h = 0$$

À medida que permitimos Δh se aproximar de zero, mantendo Δw pequeno mas finito, não faz diferença se os campos normais são ou não iguais em a e b, pois Δh faz com que esses produtos se tornem desprezivelmente pequenos. Logo, $E_t \Delta w = 0$ e, assim, $E_t = 0$.

A condição relativa ao campo normal é encontrada mais rapidamente, considerando D_N em vez de E_N e escolhendo um pequeno cilindro como superfície gaussiana. Considere a altura como Δh e tome as áreas nas faces do topo e da base por ΔS. Novamente, vamos fazer Δh se aproximar de zero. Usando a lei de Gauss,

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

integramos sobre as três superfícies distintas

$$\int_{\text{topo}} + \int_{\text{base}} + \int_{\text{lados}} = Q$$

e verificamos que as duas últimas são zero (por diferentes razões). Então

$$D_N \Delta S = Q = \rho_S \Delta S$$

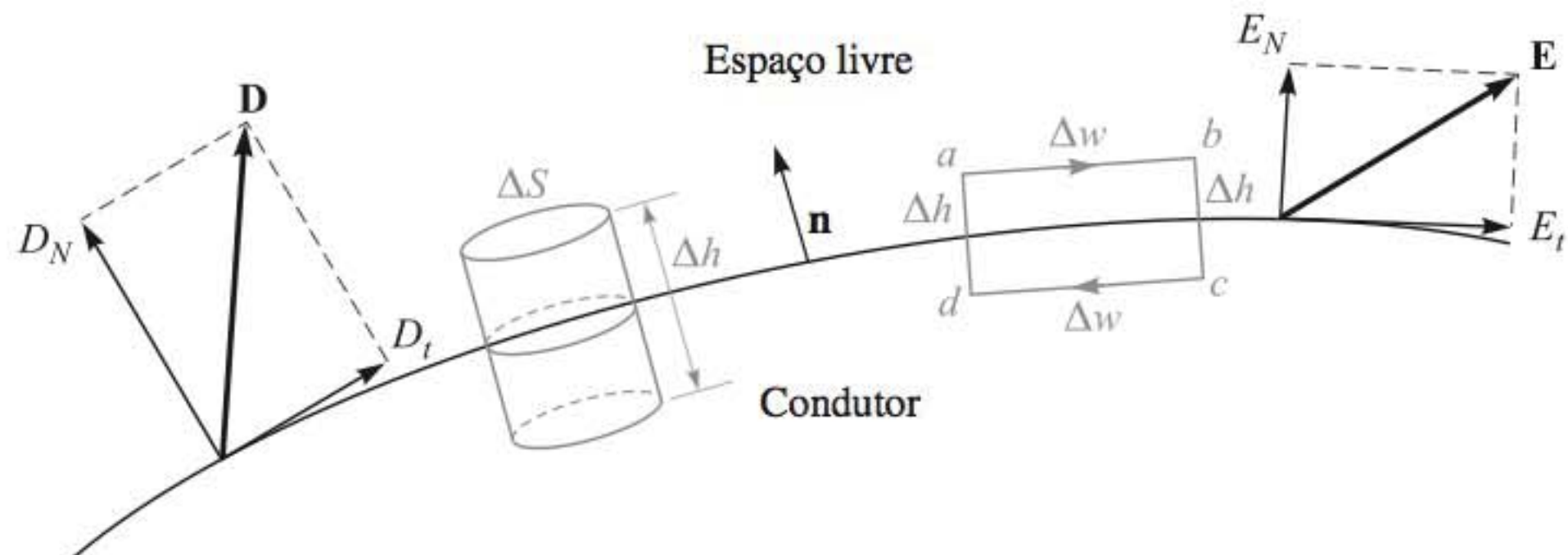



Figura 5.4 Um caminho fechado e uma superfície gaussiana apropriados são utilizados para determinar as condições de fronteira na interface entre um condutor e o espaço livre. $E_t = 0$ e $D_N = \rho_S$.

ou

$$D_N = \rho_S$$

Essas são as *condições de fronteira* desejadas para a fronteira condutor-espaço livre em eletrostática,

$$\boxed{D_t = E_t = 0} \tag{15}$$

$$\boxed{D_N = \epsilon_0 E_N = \rho_S} \tag{16}$$

O fluxo elétrico deixa o condutor em uma direção normal à superfície, e o valor da densidade de fluxo elétrico é numericamente igual à densidade superficial de carga. As Equações (15) e (16) podem ser, mais formalmente, expressas por meio da utilização dos campos vetoriais

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}\big|_s = 0 \tag{17}$$

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}\big|_s = \rho_s \tag{18}$$

onde **n** é o vetor unitário normal à superfície que aponta para fora do condutor, como mostrado na Figura 5.4; ambas as operações* são avaliadas na superfície do condutor, *s*. Realizando o produto vetorial, ou o escalar, de qualquer campo com **n** tem-se como resultado o componente tangencial ou o normal do campo, respectivamente.

Uma consequência direta e importante de uma intensidade de campo elétrico tangencial igual a zero é o fato de que a superfície de um condutor é uma superfície equipotencial. O cálculo da diferença de potencial entre quaisquer dois pontos na superfície pela integral de linha leva a um resultado nulo, porque o caminho deve ser escolhido na própria superfície, onde $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$.

Para resumir os princípios aplicáveis a condutores em campos eletrostáticos, podemos afirmar que:

1. A intensidade de campo elétrico estático dentro de um condutor é zero.
2. A intensidade de campo elétrico estático na superfície de um condutor possui, em todos os pontos, direção normal à superfície.
3. A superfície de um condutor é uma superfície equipotencial

Utilizando esses três princípios, uma determinada quantidade de grandezas podem ser calculadas na fronteira de um condutor, uma vez que se conhece o campo potencial.

EXEMPLO 5.2

Dado o potencial

$$V = 100(x^2 - y^2)$$

e um ponto $P(2, -1, 3)$, pertencente a uma fronteira condutor-espaço livre, vamos calcular V, **E**, **D** e ρ_S em P, e também a equação da superfície do condutor.

* N. de T.: Produtos vetorial e escalar.

Solução. O potencial no ponto P é

$$V_P = 100[2^2 - (-1)^2] = 300 \text{ V}$$

Uma vez que o condutor é uma superfície equipotencial, o potencial na superfície inteira deve ser 300 V. Além disso, se o condutor for um objeto sólido, o potencial em todos os pontos dentro e sobre o condutor será 300 V, pois $\mathbf{E} = 0$ dentro do condutor.

A equação que representa o lugar geométrico de todos os pontos que possuem o potencial de 300 V é

$$300 = 100(x^2 - y^2)$$

ou

$$x^2 - y^2 = 3$$

Essa é, portanto, a equação da superfície do condutor. Trata-se de um cilindro hiperbólico, como mostrado na Figura 5.5. Vamos considerar, arbitrariamente, que o condutor sólido posiciona-se acima e à direita da superfície equipotencial no ponto P, enquanto o espaço livre está abaixo e à esquerda.

Em seguida, encontramos $\mathbf{E}$ pela operação de gradiente,

$$\mathbf{E} = -100\nabla(x^2 - y^2) = -200x\mathbf{a}_x + 200y\mathbf{a}_y$$

No ponto P,

$$\mathbf{E}_P = -400\mathbf{a}_x - 200\mathbf{a}_y \text{ V/m}$$

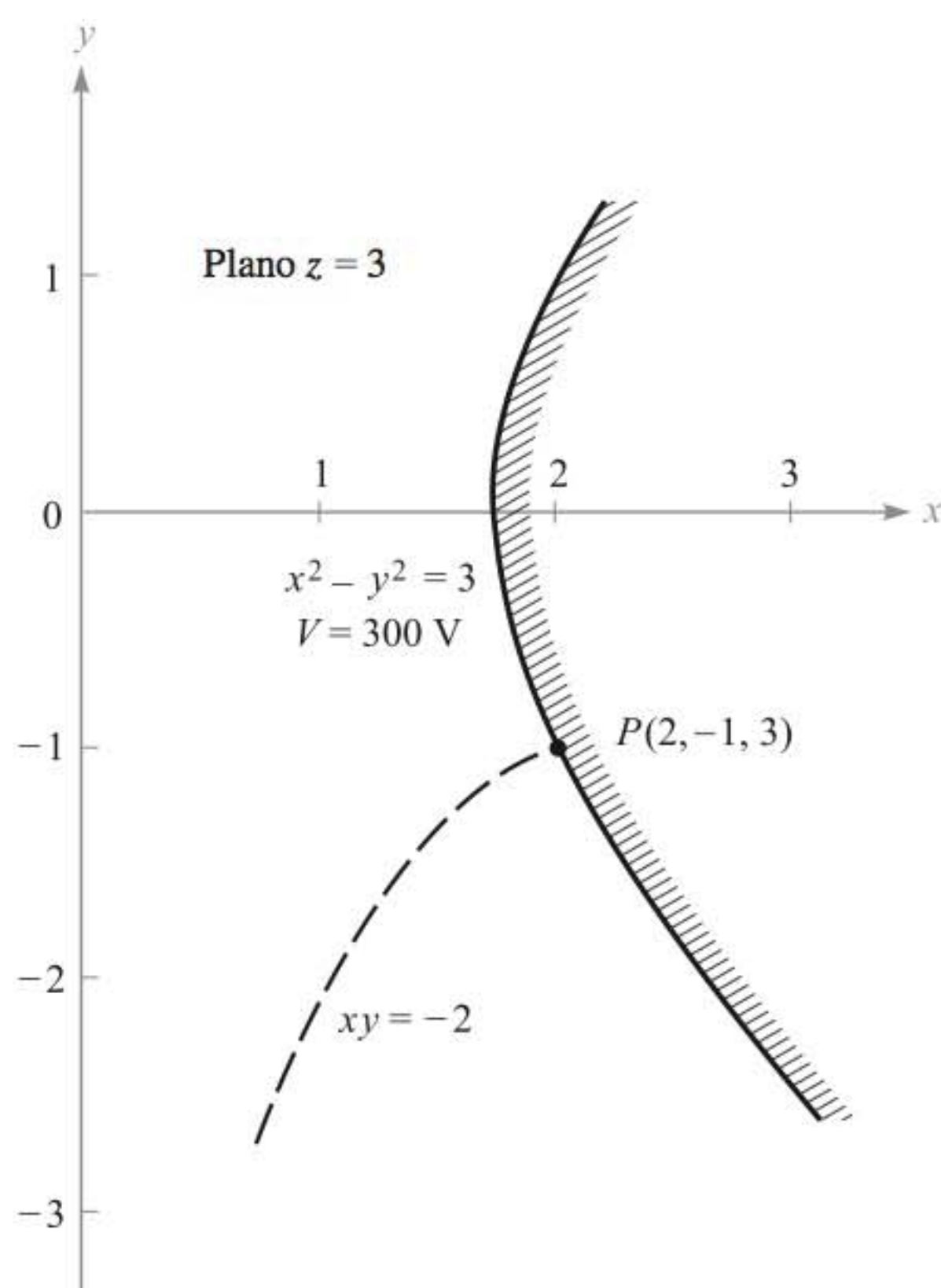



Figura 5.5 Dado o ponto $P(2, -1, 3)$ e o campo de potencial $V = 100(x^2 - y^2)$, temos que a superfície equipotencial por P é $x^2 - y^2 = 3$, e a linha de força por P é $xy = -2$.

Uma vez que $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$, temos

$$\mathbf{D}_P = 8{,}854 \times 10^{-12}\mathbf{E}_P = -3{,}54\mathbf{a}_x - 1{,}771\mathbf{a}_y \text{ nC/m}^2$$

O sentido do campo é para baixo e para a esquerda em P, e é normal à superfície equipotencial. Com isso,

$$D_N = |\mathbf{D}_P| = 3{,}96 \text{ nC/m}^2$$

Logo, a densidade superficial de carga em P é

$$\rho_{S,P} = D_N = 3{,}96 \text{ nC/m}^2$$

Note que se tivéssemos tomado a região à esquerda da superfície equipotencial como o condutor, o campo $\mathbf{E}$ *terminaria* na superfície de cargas e teríamos $\rho_S = -3{,}96 \text{ nC/m}^2$.

EXEMPLO 5.3

Finalmente, vamos determinar a equação da linha de força que passa por P.

Solução. Vemos que

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{200y}{-200x} = -\frac{y}{x} = \frac{dy}{dx}$$

Logo,

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0$$

e

$$\ln y + \ln x = C_1$$

Com isso,

$$xy = C_2$$

A linha (ou superfície) por P é obtida quando $C_2 = (2)(-1) = -2$. Logo, a linha de força é o traçado de outro cilindro hiperbólico,

$$xy = -2$$

Isso também é mostrado na Figura 5.5

EP5.5. Dado o campo potencial no espaço livre $V = 100 \text{ senh } 5x \text{ sen } 5y$ V, e o ponto $P(0{,}1,\ 0{,}2,\ 0{,}3)$, calcule em P: (*a*) V; (*b*) $\mathbf{E}$; (*c*) $|\mathbf{E}|$; (*d*) $|\rho_S|$ caso P esteja posicionado na superfície de um condutor.

Resp. 43,8 V; $-474\mathbf{a}_x - 140{,}8\mathbf{a}_y$ V/m; 495 V/m; 4,38 nC/m^2

5.5 MÉTODO DAS IMAGENS

Uma característica importante do campo do dipolo que desenvolvemos no Capítulo 4 é o plano infinito de potencial zero que existe no meio do caminho entre as duas cargas. Tal plano pode ser representado por um plano condutor extremamente fino e infinito em extensão. O condutor é uma superfície equipotencial no potencial $V = 0$, e a intensidade de campo elétrico é, portanto, normal à superfície. Com isso, se substituirmos a configuração do dipolo mostrada na Figura 5.6*a* pela carga única e plano condutor mostrados na Figura 5.6*b*, os campos na metade superior de cada figura serão os mesmos. Abaixo do plano condutor, todos os campos são iguais a zero, uma vez que não posicionamos nenhuma carga nessa região. Naturalmente, poderíamos também substituir uma carga negativa única abaixo do plano condutor pelo arranjo do dipolo e obter equivalência para os campos na metade inferior de cada região.

Se aproximarmos essa equivalência do ponto de vista oposto, começamos com uma carga única sobre um plano condutor perfeito, e assim poderemos manter os mesmos campos sobre o plano, removendo o plano e posicionando uma carga negativa em uma localização simétrica abaixo do plano. Essa carga é chamada de *imagem* da carga original, e tem valor negativo em relação a esta.

Se pudermos fazer isso uma primeira vez, a linearidade nos permite fazer isso de novo e de novo e, assim, *qualquer* configuração de carga sobre um plano de terra infinito poderá ser substituída por um arranjo composto da configuração de cargas dada e de sua imagem, e o plano condutor será removido. Isso é sugerido pelas duas ilustrações da Figura 5.7. Em muitos casos, o campo potencial do novo sistema é muito mais fácil de ser calculado, pois não contém o plano condutor com sua densidade superficial de cargas desconhecida.

Como um exemplo da utilização das imagens, vamos encontrar a densidade superficial de carga em $P(2, 5, 0)$ no plano condutor $z = 0$, considerando uma linha de cargas de 30 nC/m posicionada em $x = 0$, $z = 3$, conforme mostrado na Figura 5.8*a*. Removemos o plano e inserimos uma linha de cargas imagem de -30 nC/m em $x = 0$, $z = -3$, conforme ilustrado na Figura 5.8*b*. O campo em P pode agora ser obtido por superposição dos campos conhecidos das linhas de cargas. O vetor radial

+Q
−Q
+Q
Superfície equipotencial, $V = 0$
−Q
(*a*)

+Q
+Q
Plano condutor, $V = 0$
(*b*)

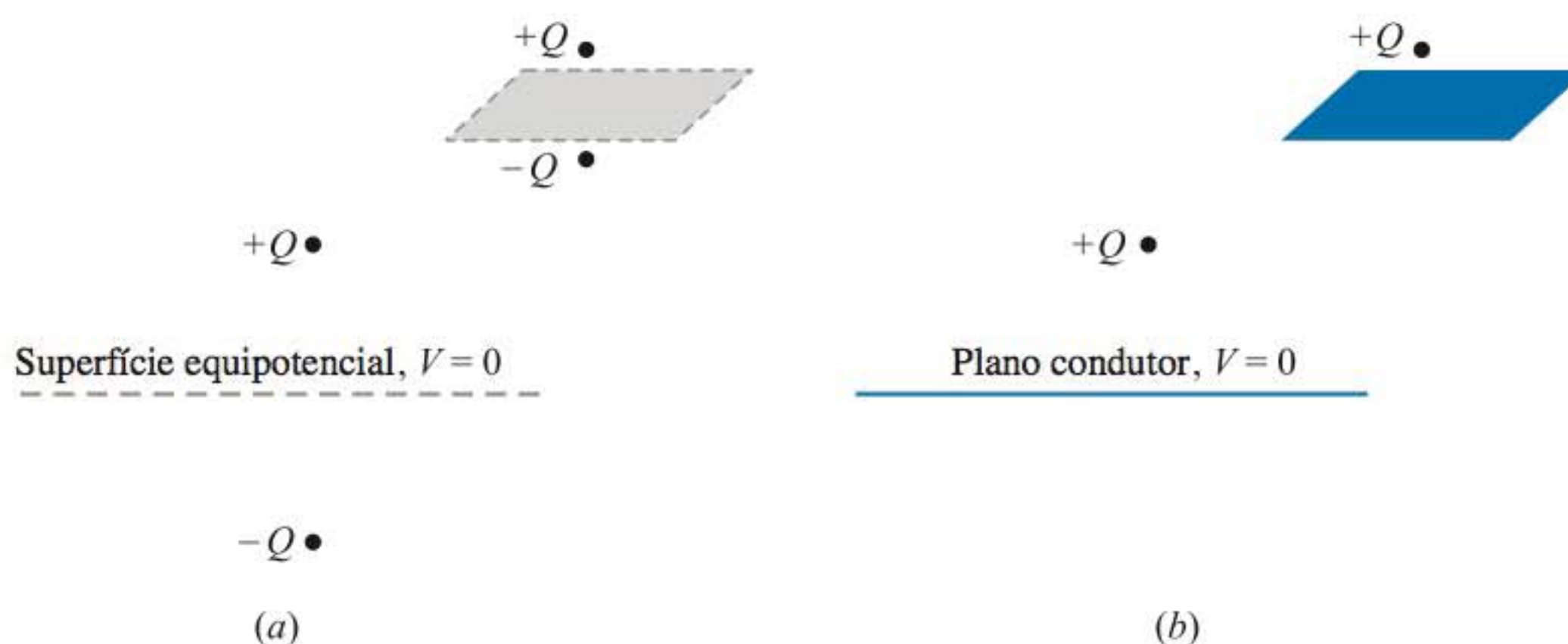



Figura 5.6 (*a*) Duas cargas iguais, mas de sinais opostos podem ser substituídas por (*b*) uma carga única e um plano condutor sem afetar os campos sobre a superfície $V = 0$.

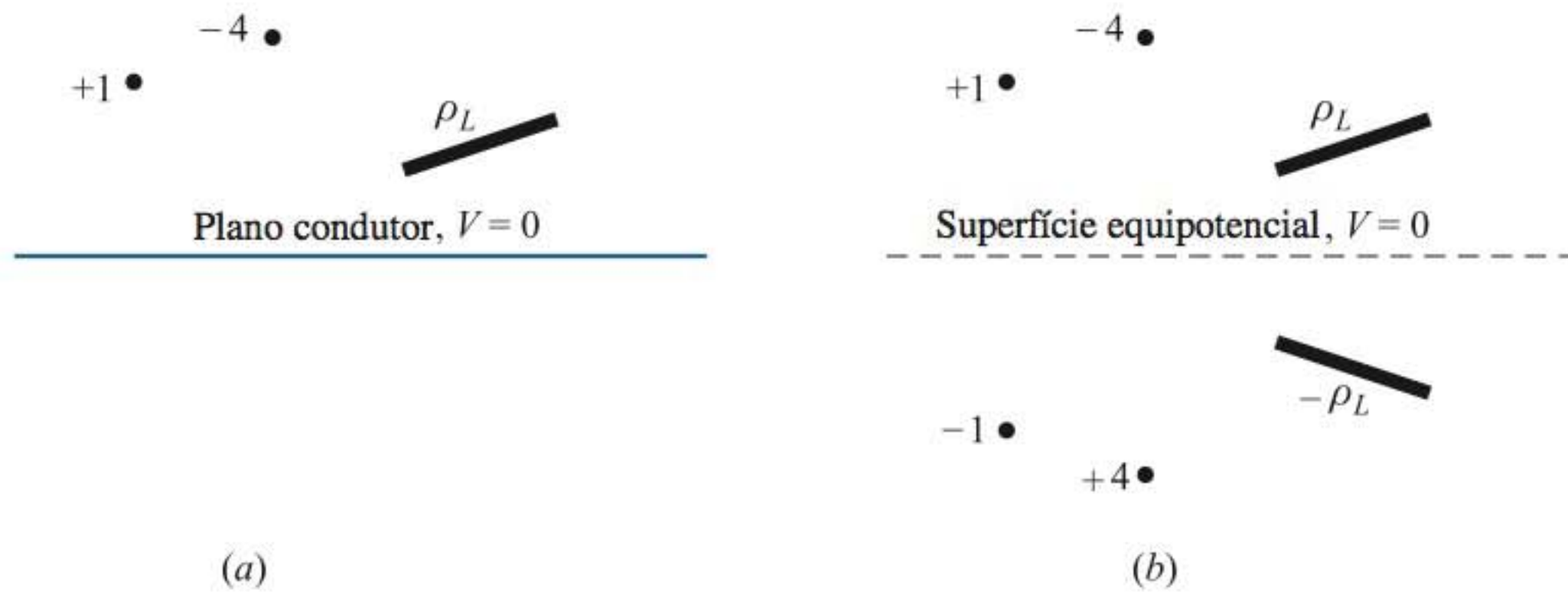



Figura 5.7 (*a*) Uma dada configuração de cargas sobre um plano condutor infinito pode ser substituída por (*b*) a configuração de cargas dada mais a configuração de sua imagem, sem o plano condutor.

que vai da linha positiva de cargas até P é $\mathbf{R}_+ = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_z$, enquanto $\mathbf{R}_- = 2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_z$. Logo, os campos individuais são

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 R_+}\mathbf{a}_{R+} = \frac{30 \times 10^{-9}}{2\pi\epsilon_0\sqrt{13}} \frac{2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_z}{\sqrt{13}}$$

e

$$\mathbf{E}_- = \frac{30 \times 10^{-9}}{2\pi\epsilon_0\sqrt{13}} \frac{2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_z}{\sqrt{13}}$$

Somando esses resultados, temos

$$\mathbf{E} = \frac{-180 \times 10^{-9}\mathbf{a}_z}{2\pi\epsilon_0(13)} = -249\mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

Este é, então, o campo em (ou exatamente sobre) P em ambas as configurações da Figura 5.8. Além disso, é muito interessante notar que o campo é normal ao plano condutor – como deve ser. Logo, $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} = -2{,}20\mathbf{a}_z$ nC/m^2, e uma vez que aponta *na direção* do plano condutor, ρ_S é negativo e tem um valor de $-2{,}20$ nC/m^2 em P.

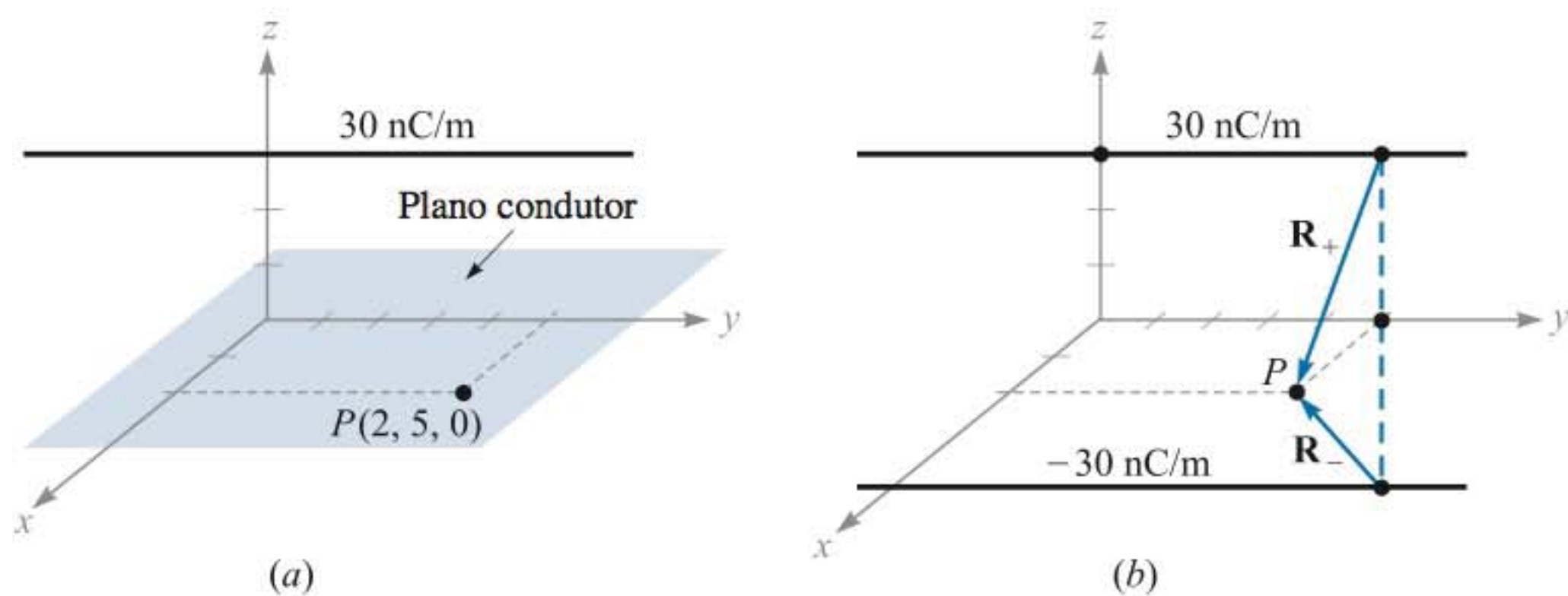



Figura 5.8 (*a*) Uma linha de cargas sobre um plano condutor. (*b*) O condutor é removido, e a imagem da linha de cargas é adicionada.

EP5.6. Um plano condutor perfeito está localizado no espaço livre em $x = 4$, e uma linha infinita e uniforme de cargas de 40 nC/m posiciona-se ao longo da reta $x = 6$, $y = 3$. Seja $V = 0$ no plano condutor. Em $P(7, -1, 5)$ calcule: (*a*) V; (*b*) $\mathbf{E}$.

Resp. 317 V; $-45{,}3\mathbf{a}_x - 99{,}2\mathbf{a}_y$ V/m

5.6 SEMICONDUTORES

Se voltarmos agora nossa atenção para um material semicondutor intrínseco, tal como germânio ou silício puro, veremos que dois tipos de portadores de carga estão presentes: elétrons e lacunas. Os elétrons são aqueles do topo da banda de valência preenchida que receberam energia suficiente (normalmente térmica) para atravessar a banda proibida (relativamente pequena) até a banda de condução. A energia da banda proibida em semicondutores típicos é da ordem de 1 elétron-volt. Os espaços deixados por esses elétrons representam estados de energia não preenchidos na banda de valência, os quais também podem se deslocar de átomo para átomo no cristal. Esse vazio é chamado de lacuna, e muitas das propriedades dos semicondutores podem ser descritas se tratarmos as lacunas como se tivessem carga positiva de e, uma mobilidade μ_h* e uma massa efetiva comparável à do elétron. Ambos os portadores se movem em um campo elétrico e em sentidos opostos. Com isso, cada um contribui com um componente da corrente total, que está na mesma direção e sentido do componente do outro. A condutividade é, portanto, uma função das concentrações e mobilidades dos elétrons e das lacunas,

$$\sigma = -\rho_e \mu_e + \rho_h \mu_h \tag{19}$$

Para o silício puro, ou *intrínseco*, as mobilidades dos elétrons e das lacunas são de 0,12 e 0,025, respectivamente, enquanto para o germânio, as mobilidades são, respectivamente, 0,36 e 0,17. Esses valores são dados em metro ao quadrado por volt-segundo e variam de 10 a 100 vezes em relação àqueles valores correspondentes ao alumínio, ao cobre, à prata e a outros condutores metálicos.[6] Essas mobilidades são dadas para uma temperatura de 300 K.

As concentrações de elétrons e lacunas dependem fortemente da temperatura. A 300 K, as densidades volumétricas de carga de elétrons e de lacunas possuem, ambas, intensidade de 0,0024 C/m^3 para o silício intrínseco e 3,0 C/m^3 para o germânio intrínseco. Esses valores levam a condutividades de 0,00035 S/m no silício e 1,6 S/m no germânio. À medida que a temperatura aumenta, as mobilidades decrescem, mas as densidades de carga aumentam muito rapidamente. Como resultado, a condutividade do silício aumenta de um fator de 10 quando a temperatura aumenta de 300 para aproximadamente 330 K, e decresce de um fator de 10 quando a temperatura cai de 300 para aproximadamente 275 K. Note que a condutividade do semicondutor intrínseco aumenta com a temperatura, enquanto a do condutor metálico decresce com a

* N. de T.: O subscrito "h" refere-se à palavra inglesa *hole*, que significa, neste contexto, "lacuna".

[6] Valores de mobilidade para semicondutores são dados nas Referências 2, 3 e 5, listadas no final deste capítulo.

temperatura. Essa é uma das diferenças características entre os condutores metálicos e os semicondutores intrínsecos.

Semicondutores intrínsecos também satisfazem a forma pontual da lei de Ohm, isto é, a condutividade é razoavelmente constante com a densidade de corrente e com a direção e sentido da densidade de corrente.

O número de portadores de carga e a condutividade podem ser aumentados dramaticamente pela adição de quantidades muito pequenas de impurezas. Materiais *doadores* propiciam elétrons adicionais e formam semicondutores do tipo n, enquanto *receptores* fornecem lacunas extras e formam materiais do tipo p. O processo é conhecido como *dopagem*, e uma concentração de doadores no silício tão baixa quanto uma parte em 10^7 provoca um aumento na condutividade de um fator de 10^5.

A faixa de valores da condutividade é extrema quando vamos dos melhores materiais isolantes até os semicondutores e daí aos melhores condutores. Em siemens por metro, σ varia de 10^{-17} para quartzo fundido, 10^{-7} para isolantes plásticos pobres e aproximadamente uma unidade para semicondutores, chegando a quase 10^8 para condutores metálicos em temperatura ambiente. Esses valores cobrem uma faixa acentuadamente ampla de 25 ordens de magnitude.

WWW Quizzes

EP5.7. Utilizando os valores dados nessa seção para as mobilidades de elétrons e lacunas no silício, a 300 K, e assumindo densidades de carga para lacunas e elétrons de 0,0029 $\mathrm{C/m^3}$ e $-0{,}0029\ \mathrm{C/m^3}$, respectivamente, calcule: (*a*) o componente da condutividade devido às lacunas; (*b*) o componente da condutividade devido aos elétrons; (*c*) a condutividade.

Resp. 7,25 μS/m; 348 μS/m; 421 μS/m

5.7 NATUREZA DOS MATERIAIS DIELÉTRICOS

WWW Interatividade

Um dielétrico em um campo elétrico pode ser visto como um arranjo de dipolos elétricos microscópicos no espaço livre, que são compostos de cargas positivas e negativas cujos centros não coincidem exatamente. Essas não são cargas livres e não podem contribuir para o processo de condução de corrente, mas antes são seguras em seus lugares por forças atômicas e moleculares, e podem apenas trocar de posição ligeiramente em resposta a campos externos. Elas são chamadas de cargas *ligadas**, em contraste com as cargas livres que determinam a condutividade. As cargas ligadas podem ser tratadas como quaisquer outras fontes de campo eletrostático. Portanto, não precisaríamos introduzir a constante dielétrica como um novo parâmetro ou lidar com permissividades diferentes da permissividade do espaço livre. Contudo, a alternativa seria considerar *todas as cargas em um pedaço de material dielétrico*. Esse é um preço muito alto a ser pago para se utilizar todas as nossas equações anteriores sem modificá-las, e nós vamos, portanto, gastar algum tempo teorizando sobre dielétricos de uma maneira qualitativa, introduzindo a polarização $\mathbf{P}$, a permissividade ϵ, a permissividade relativa** ϵ_r e desenvolvendo algumas relações quantitativas envolvendo essas novas grandezas.

* N. de T.: Denominadas, também, "cargas de polarização".

** N. de T.: Conhecida, também, como "constante dielétrica".

A característica que todos os materiais dielétricos possuem em comum – não importando se são sólidos, líquidos ou gasosos, e se são de natureza cristalina ou não – é a sua habilidade de armazenar energia elétrica. Esse armazenamento se dá por meio de um deslocamento nas posições relativas das cargas ligadas internas, positivas e negativas em relação às forças moleculares e atômicas normais.

Esse deslocamento contra uma força restringente é análogo a levantar um peso ou esticar uma mola, e representa energia potencial. A fonte da energia é o campo externo, e o movimento das cargas que se deslocam causa uma corrente transitória na bateria que produz o campo.

O mecanismo real de deslocamento de carga difere nos vários materiais dielétricos. Algumas moléculas, chamadas moléculas *polares*, possuem um deslocamento permanente existente entre os centros de "gravidade" das cargas positivas e negativas, e cada par de cargas age como um dipolo. Normalmente, os dipolos estão orientados de maneira aleatória no interior do material, e a ação do campo externo visa alinhar essas moléculas (até certo ponto) na mesma direção e sentido. Um campo suficientemente forte pode até produzir um deslocamento adicional entre as cargas positivas e negativas.

Uma molécula *apolar* não possui esse arranjo de dipolos até que um campo seja aplicado. As cargas positivas e negativas deslocam-se em sentidos opostos, contra a atração mútua existente, e produzem um dipolo alinhado com o campo elétrico.

Qualquer um dos dois tipos de dipolo pode ser descrito pelo seu momento de dipolo $\mathbf{p}$, conforme vimos na Seção 4.7, Equação (36),

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d} \tag{20}$$

onde Q é a carga positiva das duas cargas ligadas que compõem o dipolo, e $\mathbf{d}$ é o vetor* da carga negativa para a carga positiva. Notamos, novamente, que as unidades de $\mathbf{p}$ são coulomb-metros.

Se existem n dipolos por unidade de volume e consideramos um volume Δv, então existem $n\,\Delta v$ dipolos, e o momento total de dipolo é obtido pela soma vetorial,

$$\mathbf{p}_{\text{total}} = \sum_{i=1}^{n\,\Delta v} \mathbf{p}_i$$

Se os dipolos estão alinhados na mesma direção e sentido genéricos, $\mathbf{p}_{\text{total}}$ pode apresentar um valor significativo. Contudo, uma orientação aleatória pode fazer com que $\mathbf{p}_{\text{total}}$ seja essencialmente zero.

Agora, definiremos a polarização $\mathbf{P}$ como o *momento de dipolo por unidade de volume*,

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{n\,\Delta v} \mathbf{p}_i \tag{21}$$

com unidades de coulombs por metro quadrado. Devemos tratar $\mathbf{P}$ como um campo contínuo típico, apesar de ser óbvio que ele não é definido em pontos dentro de átomos ou moléculas. Antes disso, devemos pensar no seu valor em qualquer ponto como um valor médio tomado sobre uma amostra de volume Δv – grande o suficiente para

* N. de T.: **d** corresponde ao "vetor distância".

conter muitas moléculas ($n\,\Delta\nu$ em número), mas ainda suficientemente pequena para ser considerada incremental em conceito.

Nosso objetivo imediato é mostrar que a densidade volumétrica de cargas ligadas atua como a densidade volumétrica de cargas livres na geração de um campo externo. Obteremos um resultado similar à lei de Gauss.

Para sermos mais específicos, vamos considerar um dielétrico que contém moléculas apolares. Nenhuma molécula possui um momento de dipolo, e $\mathbf{P} = 0$ no material. Em algum lugar no interior do dielétrico, selecionamos um elemento de superfície incremental $\Delta\mathbf{S}$, conforme mostrado na Figura 5.9*a*, e aplicamos um campo elétrico $\mathbf{E}$. O campo elétrico produz um momento $\mathbf{p} = Q\mathbf{d}$ em cada molécula, de forma que $\mathbf{p}$ e $\mathbf{d}$ fazem um ângulo θ com $\Delta\mathbf{S}$, como indicado na Figura 5.9*b*.

Agora vamos investigar o movimento de cargas ligadas através da superfície $\Delta\mathbf{S}$. Cada uma das cargas associadas com a criação de um dipolo deve ter se movido de uma distância de $\frac{1}{2}d\cos\theta$ na direção perpendicular a $\Delta\mathbf{S}$. Com isso, quaisquer cargas positivas, inicialmente localizadas abaixo da superfície $\Delta\mathbf{S}$ e dentro da distância de $\frac{1}{2}d\cos\theta$ da superfície, devem ter atravessado $\Delta\mathbf{S}$ indo para cima. Além disso, quaisquer cargas negativas, inicialmente localizadas acima da superfície e dentro daquela distância ($\frac{1}{2}d\cos\theta$) de $\Delta\mathbf{S}$, devem ter atravessado $\Delta\mathbf{S}$ movimentando-se para baixo. Logo, como existem n moléculas/m^3, a carga líquida total que atravessa o elemento de superfície indo para cima é igual a $nQd\cos\theta\,\Delta S$, ou

$$\Delta Q_b = nQ\mathbf{d}\cdot\Delta\mathbf{S}$$

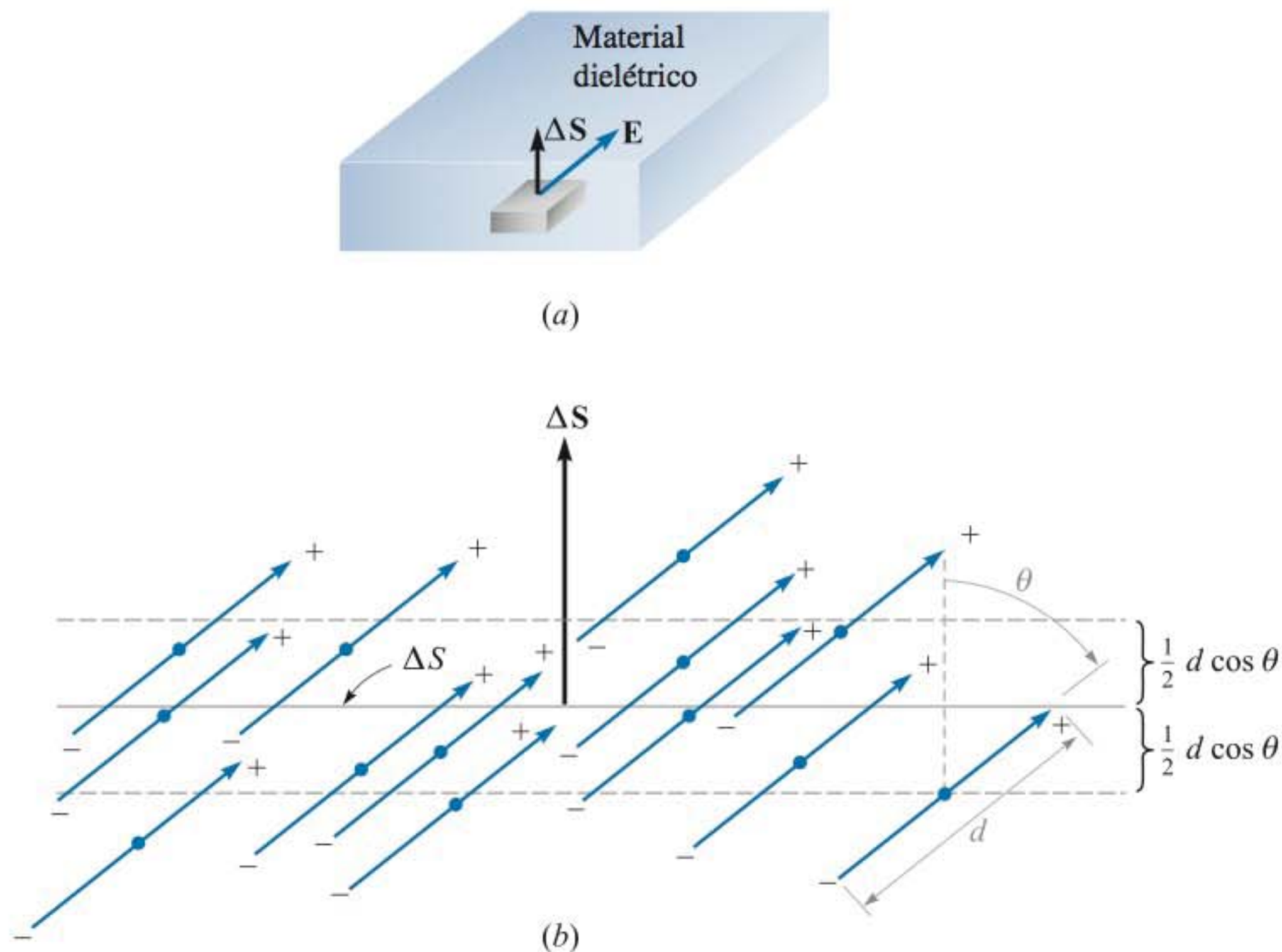



Figura 5.9 (*a*) Um elemento incremental de superfície ΔS é mostrado no interior de um dielétrico no qual um campo elétrico $\mathbf{E}$ está presente. (*b*) As moléculas apolares formam momentos de dipolo $\mathbf{p}$ e polarização $\mathbf{P}$. Existe uma transferência líquida de cargas ligadas através de ΔS.

onde o subscrito em Q_b* nos lembra que estamos lidando com uma carga ligada e não com uma carga livre. Considerando a polarização, temos

$$\Delta Q_b = \mathbf{P} \cdot \Delta \mathbf{S}$$

Se interpretarmos $\Delta\mathbf{S}$ como um elemento de uma superfície *fechada* dentro do material dielétrico, então a direção de $\Delta\mathbf{S}$ será para fora, e o aumento líquido de cargas ligadas *dentro* da superfície fechada será obtido pela integral

$$Q_b = -\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \tag{22}$$

Essa última relação tem alguma semelhança com a lei de Gauss, e podemos agora generalizar nossa definição de densidade de fluxo elétrico para que ela seja aplicável a outros meios, e não somente ao espaço livre. Primeiramente, escrevemos a lei de Gauss considerando $\epsilon_0\mathbf{E}$ e Q_T, a carga *total* envolvida (cargas ligadas mais cargas livres):

$$Q_T = \oint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \tag{23}$$

onde

$$Q_T = Q_b + Q$$

e Q é a carga *livre* total envolvida pela superfície S. Note que a carga livre aparece sem subscrito, uma vez que é o tipo mais importante de carga e aparecerá nas equações de Maxwell.

Combinando essas últimas três equações, obtemos uma expressão para a carga livre envolvida,

$$Q = Q_T - Q_b = \oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S} \tag{24}$$

Podemos agora definir $\mathbf{D}$ em termos mais genéricos do que aqueles usados no Capítulo 3,

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}} \tag{25}$$

Existe, portanto, um termo adicional em $\mathbf{D}$ que aparece quando materiais polarizáveis estão presentes. Logo,

$$Q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \tag{26}$$

onde Q é a carga livre envolvida.

Utilizando as várias densidades volumétricas de carga, temos

$$Q_b = \int_v \rho_b \, dv$$

$$Q = \int_v \rho_v \, dv$$

$$Q_T = \int_v \rho_T \, dv$$

* N. de T.: O subscrito *b* se refere à palavra inglesa *bound*, que significa, nesse contexto, "ligada".

Com a ajuda do teorema da divergência, podemos então transformar as Equações (22), (23) e (26) em relações de divergência equivalentes.

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_b$$

$$\nabla \cdot \epsilon_0 \mathbf{E} = \rho_T$$

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v} \qquad (27)$$

No trabalho que se segue, devemos enfatizar apenas as Equações (26) e (27), ou seja, as duas expressões que envolvem as cargas livres.

Para que se faça qualquer uso real desses novos conceitos, é necessário conhecer a relação entre a intensidade de campo elétrico **E** e a polarização **P** resultante. Essa relação será, é claro, uma função do tipo de material, e por isso limitaremos nossa discussão essencialmente àqueles materiais isotrópicos, para os quais **E** e **P** estão linearmente relacionados. Em um material isotrópico, os vetores **E** e **P** são sempre paralelos, independentemente da orientação do campo. Apesar de a maioria dos dielétricos na engenharia serem lineares para intensidades de campo moderadas a fortes, além de também serem isotrópicos, cristais únicos podem ser anisotrópicos. A natureza periódica dos materiais cristalinos faz com que os momentos de dipolo sejam formados de forma mais fácil ao longo dos eixos do cristal, e não necessariamente na direção do campo aplicado.

Em materiais *ferroelétricos* a relação entre **P** e **E** não apenas é não linear, mas também mostra efeitos de histerese*, isto é, a polarização produzida por uma dada intensidade de campo elétrico depende da história passada da amostra. Exemplos importantes desse tipo de dielétrico são o titanato de bário (normalmente utilizado em capacitores cerâmicos) e o sal de Rochelle.

A relação linear entre **P** e **E** é

$$\boxed{\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}} \qquad (28)$$

onde χ_e (chi) é uma grandeza adimensional chamada *suscetibilidade elétrica* do material.

Utilizando essa relação na Equação (25), temos

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} = (\chi_e + 1)\epsilon_0 \mathbf{E}$$

A expressão dentro dos parênteses é agora definida como

$$\epsilon_r = \chi_e + 1 \qquad (29)$$

Essa é outra grandeza adimensional, e é conhecida como *permissividade relativa*, ou *constante dielétrica* do material. Logo,

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \qquad (30)$$

onde

$$\boxed{\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r} \qquad (31)$$

* N. de T.: Neste caso, *histerese* refere-se ao fenômeno de histerese dielétrica.

e ϵ é a *permissividade*. As constantes dielétricas para alguns materiais representativos são dadas no Apêndice C.

Materiais dielétricos anisotrópicos não podem ser descritos com um parâmetro de suscetibilidade ou permissividade simples, pois cada componente de **D** pode ser uma função de cada componente de **E**, e $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ se torna uma equação matricial onde **D** e **E** são (cada um) matrizes coluna 3×1, e ϵ é uma matriz quadrada 3×3. Expandindo a equação matricial, tem-se

$$D_x = \epsilon_{xx}E_x + \epsilon_{xy}E_y + \epsilon_{xz}E_z$$
$$D_y = \epsilon_{yx}E_x + \epsilon_{yy}E_y + \epsilon_{yz}E_z$$
$$D_z = \epsilon_{zx}E_x + \epsilon_{zy}E_y + \epsilon_{zz}E_z$$

Note que os elementos da matriz dependem da escolha dos eixos coordenados no material anisotrópico. Certas escolhas de direções dos eixos levam a matrizes mais simples.[7]

D e **E** (e **P**) não são mais paralelos, e apesar de $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ permanecer uma equação válida para materiais anisotrópicos, deveremos continuar a usar $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ apenas interpretando-a como uma equação matricial. Concentraremos nossa atenção em materiais isotrópicos lineares e reservaremos o caso genérico para um texto mais avançado.

Resumindo, temos agora uma relação entre **D** e **E** que depende do material dielétrico presente,

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} \tag{30}$$

onde

$$\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r \tag{31}$$

Essa densidade de fluxo elétrico ainda está relacionada às cargas livres de acordo com a lei de Gauss, na forma pontual ou na forma integral:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \tag{27}$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \tag{26}$$

Para a utilização da permissividade relativa, conforme indicada pela Equação (31), tornam-se desnecessárias considerações sobre polarização, momentos de dipolo e cargas ligadas. Entretanto, quando materiais anisotrópicos ou não lineares devem ser considerados, a permissividade relativa, na forma escalar simples que discutimos, não é mais aplicável.

---

[7] Uma discussão mais completa dessa matriz pode ser encontrada na referência Ramo, Whinnery e Van Duzer, listada no final deste capítulo.

EXEMPLO 5.4

Posicionamos uma placa de Teflon na região $0 \leq x \leq a$, e consideramos espaço livre em $x < 0$ e $x > a$. Do lado de fora do Teflon existe um campo uniforme $\mathbf{E}_{\text{fora}} = E_0\mathbf{a}_x$ V/m. Procuramos valores para **D**, **E** e **P** em todos os pontos.

Solução. A constante dielétrica do Teflon é 2,1 e, com isso, a suscetibilidade elétrica vale 1,1.

Fora da placa temos $\mathbf{D}_{\text{fora}} = \epsilon_0 E_0 \mathbf{a}_x$. Além disso, uma vez que não existe material dielétrico na parte externa, $\mathbf{P}_{\text{fora}} = 0$. Agora, qualquer uma das últimas quatro ou cinco equações nos possibilitará relacionar entre si os vários campos dentro do material. Logo

$$\mathbf{D}_{\text{dentro}} = 2{,}1\epsilon_0\mathbf{E}_{\text{dentro}} \qquad (0 \leq x \leq a)$$
$$\mathbf{P}_{\text{dentro}} = 1{,}1\epsilon_0\mathbf{E}_{\text{dentro}} \qquad (0 \leq x \leq a)$$

Assim que estabelecermos um valor para qualquer um desses três campos dentro do dielétrico, os outros dois poderão ser encontrados imediatamente. A dificuldade reside em atravessar a barreira entre os campos conhecidos externos ao dielétrico e os desconhecidos dentro do mesmo. Para fazer isso precisamos de uma condição de fronteira, e isso será o assunto da próxima seção. Portanto, completaremos esse exemplo mais adiante.

No restante deste texto, descreveremos materiais polarizáveis considerando **D** e ϵ em vez de **P** e χ_e, e vamos limitar nossa discussão a materiais isotrópicos.

EP5.8. Uma placa de material dielétrico tem uma constante dielétrica relativa de 3,8 e contém uma densidade de fluxo elétrico uniforme de 8 nC/m^2. Se o material for sem perdas, calcule: (*a*) E; (*b*) P; (*c*) o número médio de dipolos por metro cúbico, se o momento de dipolo médio for 10^{-29} C · m.

Resp. 238 V/m; 5,89 nC/m^2; $5{,}89 \times 10^{20}$ m^{-3}

5.8 CONDIÇÕES DE FRONTEIRA PARA MATERIAIS DIELÉTRICOS PERFEITOS

WW Ilustração

Como devemos abordar um problema no qual existem dois dielétricos diferentes, ou um dielétrico e um condutor? Esse é outro exemplo de uma *condição de fronteira*, tal como a condição na superfície de um condutor, onde os campos tangenciais são zero e a densidade de fluxo elétrico normal é igual à densidade superficial de carga no condutor. Agora damos o primeiro passo para resolver um problema com dois dielétricos, ou um problema com um dielétrico e um condutor, determinando o comportamento dos campos na interface do dielétrico.

Primeiramente, vamos considerar a interface entre dois dielétricos que possuem permissividades ϵ_1 e ϵ_2 e que ocupam as regiões 1 e 2, conforme mostrado na Figura 5.10. Em primeiro lugar, examinamos os componentes tangenciais utilizando

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

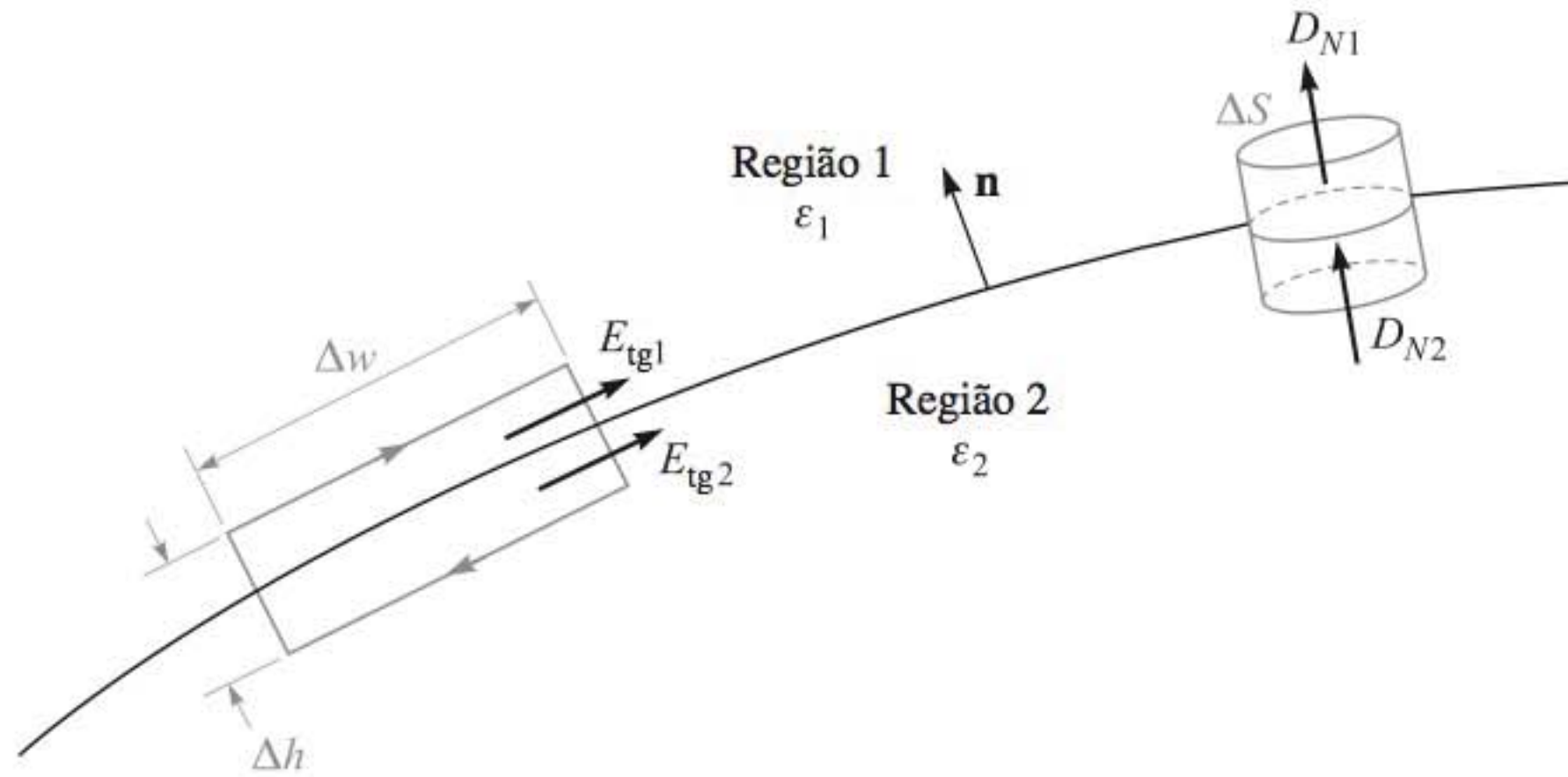



Figura 5.10 A fronteira entre dielétricos perfeitos de permissividades ϵ_1 e ϵ_2. A continuidade de D_N é mostrada pela superfície gaussiana à direita, e a continuidade de E_{tg} é mostrada pela integral de linha ao longo do caminho fechado à esquerda.

ao redor do pequeno caminho fechado à esquerda, obtendo

$$E_{tg\,1}\,\Delta w - E_{tg\,2}\,\Delta w = 0$$

A pequena contribuição para a integral de linha do componente normal de **E** ao longo das seções de comprimento Δh se torna desprezível à medida que Δh diminui e o caminho fechado se aproxima da superfície. De forma imediata, então,

$$E_{tg\,1} = E_{tg\,2} \tag{32}$$

Evidentemente, a lei das tensões de Kirchhoff ainda é aplicável a este caso. Certamente, mostramos que a diferença de potencial entre quaisquer dois pontos na fronteira que estejam separados por uma distância Δw é a mesma imediatamente acima ou abaixo da fronteira.

Se a intensidade de campo elétrico tangencial é contínua atravessando a fronteira, então **D** tangencial é descontínuo, pois

$$\frac{D_{tg\,1}}{\epsilon_1} = E_{tg\,1} = E_{tg\,2} = \frac{D_{tg\,2}}{\epsilon_2}$$

ou

$$\frac{D_{tg\,1}}{D_{tg\,2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \tag{33}$$

As condições de fronteira nos componentes normais são encontradas pela aplicação da lei de Gauss ao pequeno cilindro mostrado à direita na Figura 5.10. Os lados são novamente muito pequenos, e o fluxo que deixa as superfícies do topo e da base é a diferença

$$D_{N1}\Delta S - D_{N2}\Delta S = \Delta Q = \rho_S \Delta S$$

da qual

$$D_{N1} - D_{N2} = \rho_S \tag{34}$$

O que é essa densidade superficial de carga? Não pode ser uma densidade de cargas *ligadas*, pois estamos levando em conta a polarização do dielétrico pelo uso de uma constante dielétrica diferente da unidade, isto é, em vez de considerar cargas ligadas no espaço livre, estamos utilizando uma permissividade aumentada. Além disso, é extremamente improvável que qualquer carga *livre* esteja na interface, pois não existem cargas livres disponíveis nos dielétricos perfeitos que estamos considerando. Portanto, essa carga deve ter sido colocada lá deliberadamente, desbalanceando, desta forma, a carga total dentro e sobre esse corpo dielétrico. Exceto para esse caso especial, vamos considerar ρ_S igual a zero na interface e

$$\boxed{D_{N1} = D_{N2}} \tag{35}$$

ou o componente normal de **D** é contínuo. Segue então que

$$\epsilon_1 E_{N1} = \epsilon_2 E_{N2} \tag{36}$$

e **E** normal é descontínuo.

As Equações (32) e (34) podem ser escritas considerando-se os campos vetoriais em quaisquer direção e sentido, mediante o vetor unitário normal à superfície, como mostrado na Figura 5.10. As condições de fronteira formalmente estabelecidas para a densidade de fluxo elétrico e a intensidade de campo elétrico na superfície de um dielétrico perfeito são

$$(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n} = \rho_s \tag{37}$$

que corresponde à forma geral da Equação (34), e

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \mathbf{n} = 0 \tag{38}$$

forma genérica da Equação (32). Esta construção foi usada anteriormente nas Equações (17) e (18) para uma superfície condutora, na qual os componentes normais ou tangenciais dos campos são respectivamente obtidos por meio de produto escalar ou vetorial com o vetor unitário normal.

Essas condições podem ser combinadas para mostrar a mudança nos vetores **D** e **E** na superfície. Considere que $\mathbf{D}_1$ (e $\mathbf{E}_1$) faz um ângulo θ_1 com a normal à superfície (Figura 5.11). Uma vez que os componentes normais de **D** são contínuos,

$$D_{N1} = D_1 \cos\theta_1 = D_2 \cos\theta_2 = D_{N2} \tag{39}$$

A razão entre os componentes tangenciais é dada pela Equação (33) como

$$\frac{D_{\text{tg}\,1}}{D_{\text{tg}\,2}} = \frac{D_1 \operatorname{sen}\theta_1}{D_2 \operatorname{sen}\theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

ou

$$\epsilon_2 D_1 \operatorname{sen}\theta_1 = \epsilon_1 D_2 \operatorname{sen}\theta_2 \tag{40}$$

e a divisão dessa equação pela Equação (39) resulta em

$$\frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \tag{41}$$

Na Figura 5.11 consideramos $\epsilon_1 > \epsilon_2$ e, com isso, $\theta_1 > \theta_2$.

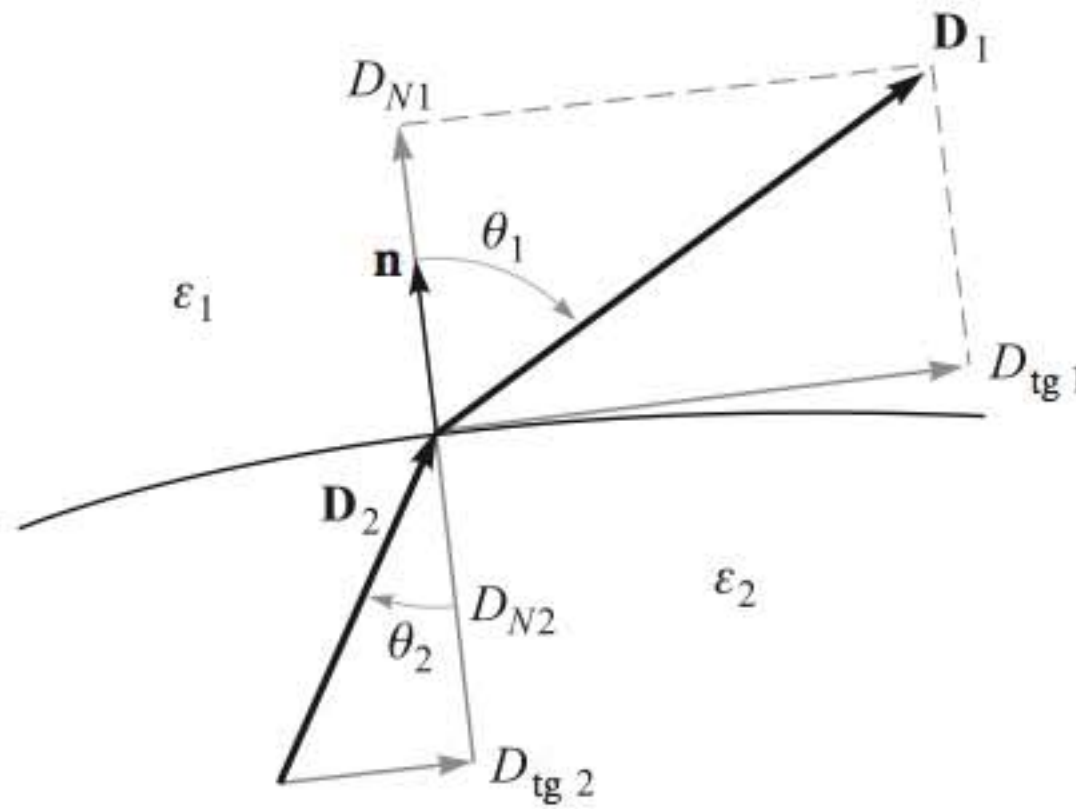



Figura 5.11 A refração de D em uma interface dielétrica. Para o caso mostrado, $\epsilon_1 > \epsilon_2$. E_1 e E_2 estão direcionados ao longo de D_1 e D_2, com $D_1 > D_2$ e $E_1 < E_2$.

A direção e sentido de **E** em cada lado da fronteira são idênticas às de **D**, porque $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$.

A intensidade de **D** na região 2 pode ser encontrada a partir das Equações (39) e (40),

$$D_2 = D_1 \sqrt{\cos^2 \theta_1 + \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2 \operatorname{sen}^2 \theta_1} \tag{42}$$

e a intensidade de $\mathbf{E}_2$ é

$$E_2 = E_1 \sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta_1 + \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^2 \cos^2 \theta_1} \tag{43}$$

Uma inspeção dessas equações mostra que D é maior na região de maior permissividade (a não ser que $\theta_1 = \theta_2 = 0°$, onde a intensidade não muda) e que E é maior na região de menor permissividade (a não ser que $\theta_1 = \theta_2 = 90°$, onde a intensidade não é alterada).

EXEMPLO 5.5

Complete o Exemplo 5.4 determinando os campos dentro do Teflon ($\epsilon_r = 2{,}1$), dado o campo externo uniforme $\mathbf{E}_{\text{fora}} = E_0 \mathbf{a}_x$, no espaço livre.

Solução. Relembramos que a placa de Teflon se estendia de $x = 0$ até $x = a$, como mostrado na Figura 5.12, com espaço livre em ambos os lados e um campo externo $\mathbf{E}_{\text{fora}} = E_0 \mathbf{a}_x$. Também temos que $\mathbf{D}_{\text{fora}} = \epsilon_0 E_0 \mathbf{a}_x$ e $\mathbf{P}_{\text{fora}} = 0$.

Na parte de dentro, a continuidade de D_N na fronteira nos permite encontrar que $\mathbf{D}_{\text{dentro}} = \mathbf{D}_{\text{fora}} = \epsilon_0 E_0 \mathbf{a}_x$. Isso nos dá $\mathbf{E}_{\text{dentro}} = \mathbf{D}_{\text{dentro}}/\epsilon = \epsilon_0 E_0 \mathbf{a}_x/(\epsilon_r \epsilon_0) = 0{,}476\, E_0 \mathbf{a}_x$. Para obter o campo de polarização no dielétrico, usamos $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ e obtemos

$$\mathbf{P}_{\text{dentro}} = \mathbf{D}_{\text{dentro}} - \epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{dentro}} = \epsilon_0\, E_0 \mathbf{a}_x - 0{,}476 \epsilon_0 E_0 \mathbf{a}_x = 0{,}524 \epsilon_0 E_0 \mathbf{a}_x$$

Resumindo, temos

Teflon

$\varepsilon_r = 2{,}1$
$\chi_e = 1{,}1$

$E = E_0$ $E = 0{,}476E_0$ $E = E_0$

$D = \varepsilon_0 E_0$ $D = \varepsilon_0 E_0$ $D = \varepsilon_0 E_0$

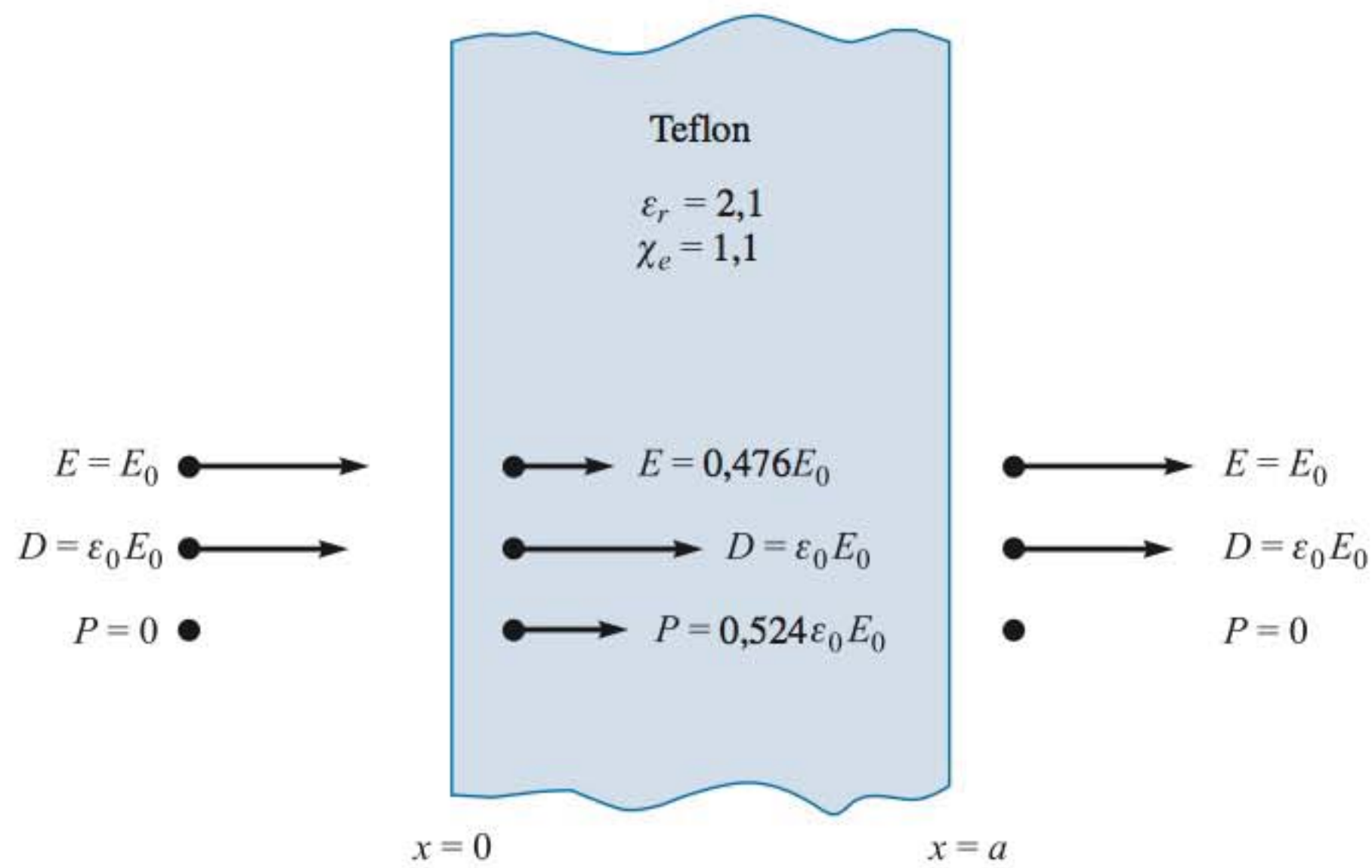
$P = 0$ $P = 0{,}524\varepsilon_0 E_0$ $P = 0$

$x = 0$ $x = a$

Figura 5.12 Conhecer o campo elétrico externo ao dielétrico nos permite calcular os campos externos restantes primeiramente e, então, utilizar a continuidade do D normal para começar a calcular os campos internos.

$$\mathbf{D}_{\text{dentro}} = \epsilon_0 E_0 \mathbf{a}_x \qquad (0 \le x \le a)$$
$$\mathbf{E}_{\text{dentro}} = 0{,}476 E_0 \mathbf{a}_x \qquad (0 \le x \le a)$$
$$\mathbf{P}_{\text{dentro}} = 0{,}524 \epsilon_0 E_0 \mathbf{a}_x \qquad (0 \le x \le a)$$

Um problema prático, muito frequentemente, não nos fornece um conhecimento direto do campo em nenhum dos lados da fronteira. As condições de fronteira devem ser utilizadas para nos ajudar a determinar os campos em ambos os lados da fronteira mediante outras informações que nos são dadas.

EP5.9. Seja a Região 1 ($z < 0$) composta de material dielétrico uniforme para o qual $\epsilon_r = 3{,}2$, enquanto a Região 2 ($z > 0$) é caracterizada por $\epsilon_r = 2$. Seja $\mathbf{D}_1 = -30\mathbf{a}_x + 50\mathbf{a}_y + 70\mathbf{a}_z$ nC/m^2 e calcule: (*a*) D_{N1}; (*b*) $\mathbf{D}_{tg1}$; (*c*) D_{tg1}; (*d*) D_1; (*e*) θ_1; (*f*) $\mathbf{P}_1$.

Resp. 70 nC/m^2; $-30\mathbf{a}_x + 50\mathbf{a}_y$ nC/m^2; 58,3 nC/m^2; 91,1 nC/m^2; 39,8°; $-20{,}6\mathbf{a}_x + 34{,}4\mathbf{a}_y + 48{,}1\mathbf{a}_z$ nC/m^2

EP5.10. Continue o Exercício Proposto 5.9 calculando: (*a*) $\mathbf{D}_{N2}$; (*b*)$\mathbf{D}_{tg2}$; (*c*) $\mathbf{D}_2$; (*d*) $\mathbf{P}_2$; (e) θ_2

Resp. $70\mathbf{a}_z$ nC/m^2; $-18{,}75\mathbf{a}_x + 31{,}25\mathbf{a}_y$ nC/m^2; $-18{,}75\mathbf{a}_x + 31{,}25\mathbf{a}_y + 70\mathbf{a}_z$ nC/m^2; $-9{,}38\mathbf{a}_x + 15{,}63\mathbf{a}_y + 35\mathbf{a}_z$ nC/m^2; 27,5°

REFERÊNCIAS

1. Fano, R. M., L. J. Chu, and R. B. Adler. *Electromagnetic Fields, Energy, and Forces*. Cambridge, MA: MIT Press, 1968. A polarização em dielétricos é discutida no Capítulo 5. Este

texto pressupõe um curso completo de física em eletricidade e magnetismo e é, portanto, de um nível um pouco mais avançado. A introdução que começa na página 1 deve ser lida.

2. Dekker, A. J. *Electrical Engineering Materials*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1959. Este admirável pequeno livro cobre materiais dielétricos, condutores, semicondutores e magnéticos.
3. Fink, D. G., and H. W. Beaty. *Standard Handbook for Electrical Engineers*. 15. ed. New York: McGraw-Hill, 2006.
4. Maxwell, J. C. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. New York: Cambridge University Press, 2010.
5. Wert, C. A., and R. M. Thomson. *Physics of Solids*. 2. ed. New York: McGraw-Hill, 1970. Este é um texto avançado, para nível de graduação, que aborda metais, semicondutores e dielétricos.

PROBLEMAS

5.1 Dada a densidade de corrente $\mathbf{J} = -10^4[\text{sen}(2x)e^{-2y}\mathbf{a}_x + \cos(2x)e^{-2y}\mathbf{a}_y]$ kA/m^2: (*a*) Calcule a corrente total que atravessa o plano $y = 1$ na direção $\mathbf{a}_y$ na região $0 < x < 1$, $0 < z < 2$. (*b*) Calcule a corrente total que deixa a região $0 < x, y < 1$, $2 < z < 3$ pela integração de $\mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$ sobre a superfície do cubo. (*c*) Repita a etapa (*b*), mas utilizando o teorema da divergência.

5.2 Dado $\mathbf{J} = -10^4(y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y)$ A/m^2, calcule a corrente que atravessa o plano $y = 0$ na direção e sentido $-\mathbf{a}_y$, entre $z = 0$ e 1, e $x = 0$ e 2.

5.3 Seja $\mathbf{J} = 400 \text{ sen } \theta/(r^2 + 4)\mathbf{a}_r$ A/m^2. (*a*) Calcule a corrente total que flui pela porção da superfície esférica $r = 0{,}8$, limitada por $0{,}1\pi < \theta < 0{,}3\pi$, $0 < \phi < 2\pi$. (*b*) Calcule o valor médio de $\mathbf{J}$ sobre a área definida.

5.4 Se a densidade volumétrica de carga é dada por $\rho_v = (\cos \omega t)/r^2$ C/m^3, em coordenadas esféricas, determine $\mathbf{J}$. É razoável considerar que $\mathbf{J}$ não é uma função de θ ou ϕ.

5.5 Seja $\mathbf{J} = 25/\rho\mathbf{a}_\rho - 20/(\rho^2 + 0{,}01)\mathbf{a}_z$ A/m^2. (*a*) Calcule a corrente que atravessa o plano $z = 0{,}2$ na direção $\mathbf{a}_z$ para $\rho < 0{,}4$. (*b*) Calcule $\partial\rho_v/\partial t$. (*c*) Calcule a corrente que atravessa a superfície fechada (e sai dela), definida por $\rho = 0{,}01$, $\rho = 0{,}4$, $z = 0$ e $z = 0{,}2$. (*d*) Mostre que o teorema da divergência é satisfeito para $\mathbf{J}$ e para a superfície especificada em (*c*).

5.6 Em coordenadas esféricas, uma densidade de corrente $\mathbf{J} = -k/(r \text{ sen } \theta)\,\mathbf{a}_\theta$ A/m^2 existe em um meio condutor, onde k é uma constante. Determine a corrente total, na direção $\mathbf{a}_z$, que atravessa um disco circular de raio R, centrado no eixo z e localizado em (*a*) $z = 0$; (*b*) $z = h$.

5.7 Considerando que não há transformação de massa para energia ou vice-versa, é possível escrever uma equação da continuidade para a massa. (*a*) Se utilizarmos a equação da continuidade para carga como nosso modelo, quais quantidades correspondem a $\mathbf{J}$ e ρ_v? (*b*) Dado um cubo de 1 cm de lado, dados experimentais mostram que as taxas nas quais a massa deixa cada uma das seis faces são 10,25, −9,85, 1,75, −2,00, −4,05 e 4,55 mg/s. Se considerarmos o cubo um elemento incremental de volume,

determine um valor aproximado para a taxa temporal de variação da densidade no seu centro.

5.8 Um cone cortado tem uma altura de 16 cm. As faces circulares do topo e da base têm raios de 2 mm e 0,1 mm, respectivamente. Se o material do qual este cone sólido é construído tiver uma condutividade de 2×10^6 S/m, utilize algumas boas aproximações para determinar a resistência entre as duas faces circulares.

5.9 (*a*) Usando dados tabulados no Apêndice C, calcule o diâmetro necessário para um fio de nicromo de 2 m de comprimento dissipar uma potência média de 450 W quando 120 V rms a 60 Hz forem a ele aplicados. (*b*) Calcule o valor rms da densidade de corrente no fio.

5.10 Uma arruela de latão tem diâmetro interno de 2 cm, diâmetro externo de 5 cm e espessura igual a 0,5 cm. Sua condutividade é $\sigma = 1{,}5 \times 10^7$ S/m. A arruela é cortada ao meio, ao longo do diâmetro, e uma tensão é aplicada entre as duas faces retangulares de uma das partes cortadas. O campo elétrico resultante, no interior da arruela cortada ao meio, é $\mathbf{E} = (0{,}5/\rho)\,\mathbf{a}_\phi$ V/m, em coordenadas cilíndricas, onde o eixo z corresponde ao eixo da arruela. (*a*) Qual diferença de potencial existe entre as duas faces retangulares? (*b*) Qual corrente total está fluindo na arruela? (*c*) Qual é a resistência entre as duas faces?

5.11 Duas superfícies cilíndricas perfeitamente condutoras de comprimento ℓ estão posicionadas em $\rho = 3$ e $\rho = 5$ cm. A corrente total que passa radialmente se dirigindo para fora, pelo meio existente entre os cilindros é de 3 A c.c. (*a*) Calcule a tensão e a resistência entre os cilindros, e $\mathbf{E}$ na região entre os cilindros, se um material condutor com $\sigma = 0{,}05$ S/m estiver presente em $3 < \rho < 5$ cm. (*b*) Mostre que integrando, no volume, a potência dissipada por unidade de volume, o resultado é a potência total dissipada.

5.12 Duas placas condutoras idênticas, cada uma tendo área A, estão posicionadas em $z = 0$ e $z = d$. A região entre as placas está preenchida com um material que possui uma condutividade dependente de z, $\sigma(z) = \sigma_0 e^{-z/d}$, onde σ_0 é uma constante. Uma tensão V_0 é aplicada à placa em $z = d$. A placa em $z = 0$ está no potencial zero. Calcule, considerando os parâmetros dados: (*a*) a resistência do material; (*b*) a corrente total que flui entre as placas; (*c*) a intensidade de campo elétrico $\mathbf{E}$ dentro do material.

5.13 Um tubo cilíndrico oco com uma seção reta retangular tem dimensões externas de 1,27 cm por 2,54 cm e uma espessura da parede de 1,27 mm. Considere que o material seja o latão, para o qual $\sigma = 1{,}5 \times 10^7$ S/m. Uma corrente contínua de 200 A c.c. está circulando no tubo para baixo. (*a*) Qual é a queda de tensão presente ao longo de um comprimento de 1 m do tubo? (*b*) Calcule a queda de tensão se o interior do tubo estiver preenchido com um material condutor para o qual $\sigma = 1{,}5 \times 10^5$ S/m.

5.14 Uma placa condutora retangular está posicionada no plano xy, ocupando a região $0 < x < a$, $0 < y < b$. Uma placa condutora idêntica é posicionada

de forma paralela diretamente sobre a primeira, em $z = d$. A região entre as placas está preenchida com material que possui condutividade $\sigma(x) = \sigma_0 e^{-x/a}$, onde σ_0 é uma constante. Uma tensão V_0 é aplicada à placa em $z = d$. A placa em $z = 0$ está no potencial zero. Encontre, considerando os parâmetros dados: (*a*) a intensidade de campo elétrico **E** dentro do material; (*b*) a corrente total que circula entre as placas; (*c*) a resistência do material.

5.15 Seja $V = 10(\rho + 1)z^2 \cos \phi$ V no espaço livre. (*a*) Uma superfície equipotencial $V = 20$ V define uma superfície condutora. Encontre a equação da superfície do condutor. (*b*) Calcule ρ e **E** no ponto na superfície do condutor onde $\phi = 0{,}2\pi$ e $z = 1{,}5$. (*c*) Calcule $|\rho_S|$ neste ponto.

5.16 Uma linha de transmissão coaxial tem condutores interno e externo de raios a e b, respectivamente. Entre os condutores ($a < \rho < b$) existe um meio condutivo cuja condutividade é $\sigma(\rho) = \sigma_0 / \rho$, onde σ_0 é uma constante. O condutor interno está carregado com potencial V_0, e o condutor externo está aterrado. (*a*) Considerando uma corrente radial c.c. I por unidade de comprimento em z, determine o campo densidade de corrente radial **J** em A/m^2. (*b*) Determine a intensidade de campo elétrico **E** considerando I e os outros parâmetros fornecidos ou conhecidos. (*c*) Tomando uma integral de linha apropriada de **E**, como a encontrada em (*b*), determine uma expressão que relaciona V_0 e I. (*d*) Determine uma expressão para a condutância da linha por unidade de comprimento, G.

5.17 Dado o campo de potencial $V = 100xz / (x^2 + 4)$ V no espaço livre: (*a*) Calcule **D** na superfície $z = 0$. (*b*) Mostre que a superfície $z = 0$ é uma superfície equipotencial. (*c*) Considere que a superfície $z = 0$ seja um condutor e calcule a carga total naquela porção do condutor definida por $0 < x < 2$, $-3 < y < 0$.

5.18 Duas placas circulares e paralelas, de raio a, estão localizadas em $z = 0$ e $z = d$. A placa superior ($z = d$) está no potencial V_0, enquanto a placa inferior está aterrada. Entre as placas existe um material condutor que possui condutividade dependente da variável radial, $\sigma(\rho) = \sigma_0 \rho$, onde σ_0 é uma constante. (*a*) Encontre a intensidade de campo elétrico **E** *independente* de ρ, entre as placas. (*b*) Determine a densidade de corrente **J** entre as placas. (*c*) Determine a corrente total I entre as placas. (*d*) Determine a resistência entre as placas.

5.19 Seja $V = 20x^2yz - 10z^2$ V no espaço livre. (*a*) Determine as equações das superfícies equipotenciais nas quais $V = 0$ e 60 V. (*b*) Considere que essas são superfícies condutoras e calcule as densidades superficiais de carga naquele ponto na superfície $V = 60$ V onde $x = 2$ e $z = 1$. Sabe-se que $0 \leq V \leq 60$ V é a região que contém o campo. (*c*) Forneça o vetor unitário neste ponto, que é normal à superfície condutora e aponta na direção da superfície $V = 0$.

5.20 Duas cargas pontuais de $-100\pi\ \mu C$ estão posicionadas em $(2, -1, 0)$ e $(2, 1, 0)$. A superfície $x = 0$ é um plano condutor. (*a*) Determine a densidade superficial de carga na origem. (*b*) Determine ρ_S em $P(0, h, 0)$.

5.21 Seja a superfície $y = 0$ um condutor perfeito no espaço livre. Duas linhas infinitas e uniformes de cargas de 30 nC/m cada estão posicionadas em $x = 0, y = 1$ e $x = 0, y = 2$. (*a*) Considere que $V = 0$ no plano $y = 0$, e calcule V em $P(1, 2, 0)$. (*b*) Calcule $\mathbf{E}$ em P.

5.22 O segmento de reta $x = 0, -1 \leq y \leq 1, z = 1$, contém uma densidade linear de carga $\rho_L = \pi|y|\ \mu$C/m. Considere que $z = 0$ é um plano condutor, e determine a densidade superficial de carga em: (*a*) (0, 0, 0); (*b*) (0, 1, 0).

5.23 Um dipolo com $\mathbf{p} = 0{,}1\mathbf{a}_z\ \mu\text{C} \cdot \text{m}$ está posicionado em $A(1, 0, 0)$ no espaço livre, e o plano $x = 0$ é perfeitamente condutor. (*a*) Calcule V em $P(2, 0, 1)$. (*b*) Encontre a equação da superfície equipotencial de 200 V em coordenadas cartesianas.

5.24 A certa temperatura, as mobilidades dos elétrons e dos buracos no germânio intrínseco são dadas como 0,43 e 0,21 $\text{m}^2/\text{V} \cdot \text{s}$, respectivamente. Se as concentrações de elétrons e de buracos são ambas de $2{,}3 \times 10^{19}\ \text{m}^{-3}$, calcule a condutividade a essa temperatura.

5.25 As concentrações de elétrons e buracos aumentam com a temperatura. Para silício puro, expressões adequadas são $\rho_h = -\rho_e = 6.200T^{1{,}5}e^{-7.000/T}\ \text{C/m}^3$. A dependência funcional das mobilidades com a temperatura é dada por $\mu_h = 2{,}3 \times 10^5 T^{-2{,}7}\ \text{m}^2/\text{V} \cdot \text{s}$ e $\mu_e = 2{,}1 \times 10^5 T^{-2{,}5}\ \text{m}^2/\text{V} \cdot \text{s}$, onde a temperatura T está em graus kelvin. Encontre σ em: (*a*) 0 °C; (*b*) 40 °C; (*c*) 80 °C.

5.26 Uma amostra de semicondutor tem uma seção reta retangular de 1,5 por 2,0 mm, e um comprimento de 11,0 mm. O material tem densidades de elétrons e buracos de $1{,}8 \times 10^{18}$ e $3{,}0 \times 10^{15}\ \text{m}^{-3}$, respectivamente. Se $\mu_e = 0{,}082\ \text{m}^2/\text{V} \cdot \text{s}$ e $\mu_h = 0{,}0021\ \text{m}^2/\text{V} \cdot \text{s}$, calcule a resistência oferecida entre as faces extremas da amostra.

5.27 Hidrogênio atômico contém $5{,}5 \times 10^{25}$ átomos/m^3 em certa temperatura e pressão. Quando um campo dielétrico de 4 kV/m é aplicado, cada dipolo formado pelo elétron e núcleo positivo possui um comprimento efetivo de $7{,}1 \times 10^{-19}$ m. (*a*) Calcule P. (*b*) Calcule ϵ_r.

5.28 Calcule a constante dielétrica de um material no qual a densidade de fluxo elétrico seja quatro vezes a polarização.

5.29 Um condutor coaxial tem raios $a = 0{,}8$ mm e $b = 3$ mm e um dielétrico de poliestireno para o qual $\epsilon_r = 2{,}56$. Se $\mathbf{P} = (2/\rho)\mathbf{a}_\rho\ \text{nC/m}^2$ no dielétrico, calcule: (*a*) $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ como funções de ρ; (*b*) V_{ab} e χ_e. (*c*) Se existirem 4×10^{19} moléculas por metro cúbico no dielétrico, calcule $\mathbf{p}(\rho)$.

5.30 Considere um material composto feito de dois elementos, os quais possuem densidades N_1 e N_2 moléculas/m^3, respectivamente. Os dois materiais estão uniformemente misturados, levando a uma densidade total de $N = N_1 + N_2$. A presença de um campo elétrico $\mathbf{E}$ induz momentos de dipolos moleculares $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ dentro dos elementos individualmente, estejam eles misturados ou não. Mostre que a constante dielétrica do material composto é dada por $\epsilon_r = f\epsilon_{r1} + (1 - f)\,\epsilon_{r2}$, onde f é a fração numérica

dos dipolos do elemento 1 no composto, e onde ϵ_{r1} e $_{r2}$ são as constantes dielétricas que os elementos não misturados teriam se cada um tivesse densidade N.

5.31 A superfície $x = 0$ separa dois dielétricos perfeitos. Para $x > 0$, seja $\epsilon_r = \epsilon_{r1} = 3$, enquanto $\epsilon_{r2} = 5$ onde $x < 0$. Se $\mathbf{E}_1 = 80\mathbf{a}_x - 60\mathbf{a}_y - 30\mathbf{a}_z$ V/m, calcule: (*a*) E_{N1}; (*b*) $\mathbf{E}_{tg1}$; (*c*) $\mathbf{E}_1$; (*d*) o ângulo θ_1 entre $\mathbf{E}_1$ e uma normal à superfície; (*e*) D_{N2}; (*f*) D_{tg2}; (*g*) $\mathbf{D}_2$; (*h*) $\mathbf{P}_2$; (*i*) o ângulo θ_2 entre $\mathbf{E}_2$ e uma normal à superfície.

5.32 Duas cargas pontuais de 3 μC com sinais opostos são mantidas a uma distância de x metros por uma mola, que fornece uma força repulsiva dada por $F_{sp} = 12(0{,}5 - x)$ N. Sem qualquer força de atração, a mola estaria totalmente estendida de 0,5 m. (*a*) Determine a separação entre as cargas. (*b*) Qual é o momento de dipolo?

5.33 Dois dielétricos perfeitos possuem permissividades relativas $\epsilon_{r1} = 2$ e $\epsilon_{r2} = 8$. A superfície plana entre eles é a superfície $x - y + 2z = 5$. A origem situa-se na região 1. Se $\mathbf{E}_1 = 100\mathbf{a}_x + 200\mathbf{a}_y - 50\mathbf{a}_z$ V/m, calcule $\mathbf{E}_2$.

5.34 A região 1 ($x \geq 0$) é um dielétrico com $\epsilon_{r1} = 2$, enquanto a região 2 ($x < 0$) tem $\epsilon_{r2} = 5$. Seja $\mathbf{E}_1 = 20\mathbf{a}_x - 10\mathbf{a}_y + 50\mathbf{a}_z$ V/m. (*a*) Calcule $\mathbf{D}_2$. (*b*) Calcule a densidade de energia em ambas as regiões.

5.35 Sejam as superfícies cilíndricas $\rho = 4$ cm e $\rho = 9$ cm, que envolvem dois dielétricos perfeitos em forma de cunha, $\epsilon_{r1} = 2$ para $0 < \phi < \pi/2$ e $\epsilon_{r2} = 5$ para $\pi/2 < \phi < 2\pi$. Se $\mathbf{E}_1 = (2.000/\rho)\mathbf{a}_\rho$ V/m, calcule: (*a*) $\mathbf{E}_2$; (*b*) a energia eletrostática total armazenada em 1 m de comprimento em cada região.

6

Capacitância

A capacitância mede a capacidade de armazenamento de energia em equipamentos e dispositivos elétricos. Ela pode ser deliberadamente projetada para um propósito específico ou pode existir como um subproduto inevitável da estrutura do equipamento que, naturalmente, deve operar com esta capacidade de armazenar energia. A compreensão da capacitância e de seu impacto na operação do equipamento ou sistema são fundamentais em todos os aspectos da engenharia elétrica.

Um capacitor é um dispositivo que armazena energia, e a energia assim armazenada pode ser associada a uma carga acumulada ou relacionada ao campo elétrico, como discutido na Seção 4.8. De fato, pode-se imaginar um capacitor como um dispositivo que armazena *fluxo* elétrico, de forma similar ao indutor – um dispositivo análogo – que armazena fluxo magnético (ou, em última análise, energia na forma de campo magnético). Vamos explorar o armazenamento de energia magnética no Capítulo 8. Um dos objetivos principais deste capítulo é apresentar os métodos de cálculo de capacitâncias para um determinado número de casos, incluindo geometrias de linhas de transmissão, e desenvolver a habilidade de analisar criticamente a maneira como a capacitância de determinado dispositivo será alterado se forem feitas mudanças nos materiais ou em suas configurações geométricas. ■

6.1 DEFINIÇÃO DE CAPACITÂNCIA

Considere dois condutores imersos em um dielétrico homogêneo (Figura 6.1). O condutor M_2 está carregado com uma carga positiva total Q, e M_1 está carregado com uma carga igual negativa. Não existem outras cargas presentes, e a carga *total* do sistema é zero.

Agora sabemos que a carga se posiciona na superfície como uma densidade superficial de carga e, também, que o campo elétrico é normal à superfície do condutor. Além disso, cada condutor é uma superfície equipotencial. Uma vez que M_2 está carregado positivamente, o fluxo elétrico está direcionado de M_2 para M_1, e M_2 está no potencial mais positivo. Em outras palavras, trabalho deve ser realizado para levar uma carga positiva de M_1 até M_2.

Vamos designar a diferença de potencial entre M_2 e M_1 por V_0. Podemos, agora, definir a *capacitância* desse sistema de dois condutores como a razão entre o valor

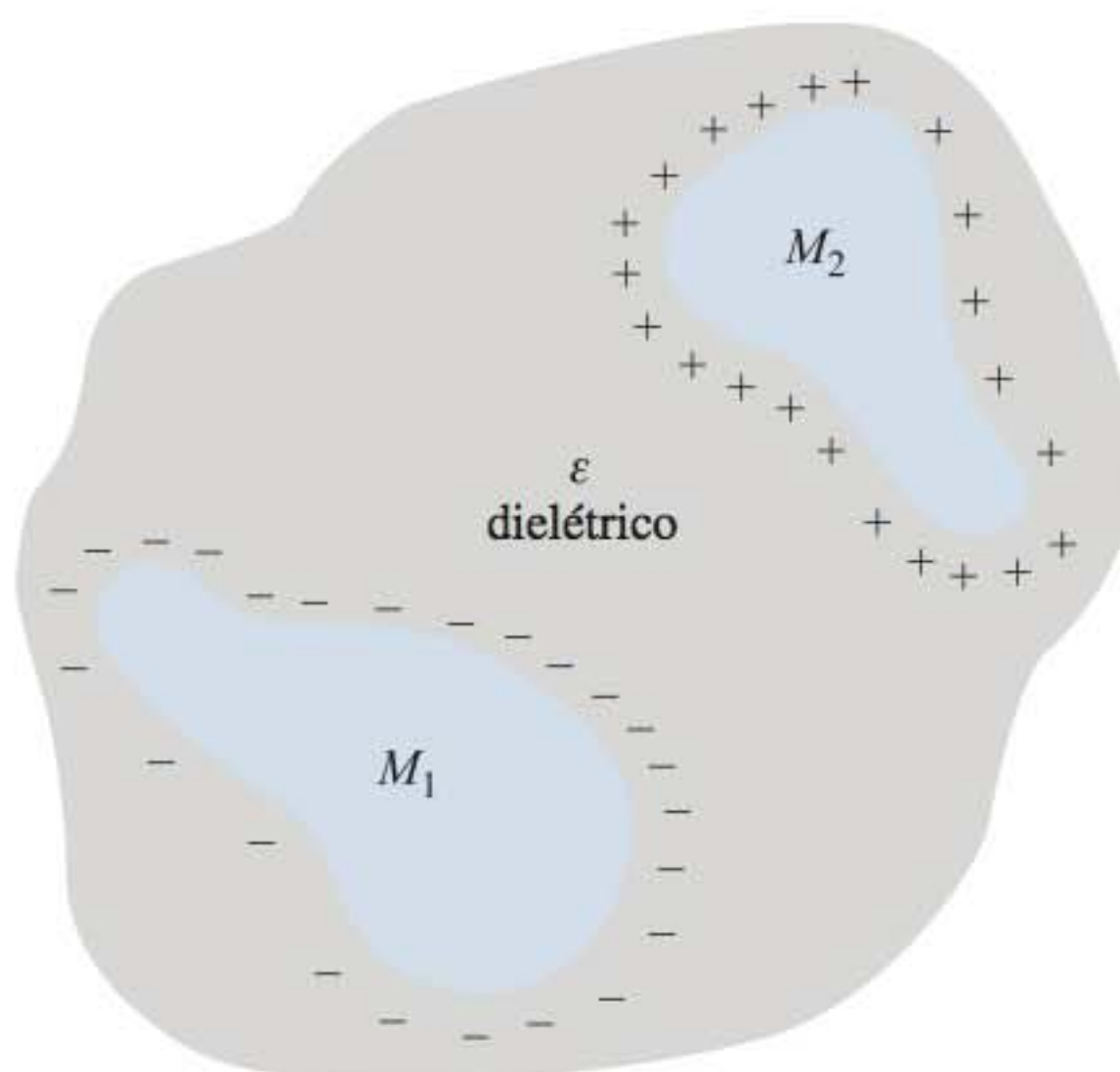



Figura 6.1 Dois condutores com cargas opostas M_1 e M_2 imersos em um dielétrico uniforme. A razão entre o valor absoluto da carga em um dos condutores e o valor absoluto da diferença de potencial entre eles é a capacitância C.

absoluto da carga total em um dos condutores e o valor absoluto da diferença de potencial entre os condutores,

$$C = \frac{Q}{V_0} \tag{1}$$

Em termos gerais, determinamos Q por uma integral de superfície sobre condutores positivos, e calculamos V_0 deslocando uma carga positiva unitária da superfície negativa até a positiva,

$$C = \frac{\oint_S \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{-\int_-^+ \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}} \tag{2}$$

A capacitância é independente do potencial e da carga total, pois a razão entre eles é constante*. Se a densidade de carga for aumentada por um fator de N, a lei de Gauss indica que a densidade de fluxo elétrico ou a intensidade de campo elétrico também aumentam por N, assim como a diferença de potencial. A capacitância é uma função apenas das dimensões físicas do sistema de condutores e da permissividade do dielétrico homogêneo.

A capacitância é medida em *farads* (F), e um farad é definido como um coulomb por volt. Valores usuais de capacitância são frações muito pequenas de um farad, e por isso é mais prático utilizar unidades como o microfarad (μF), o nanofarad (nF) e o picofarad (pF).

* N. de T.: Isto é válido para sistemas lineares (como é o caso aqui estudado).

6.2 CAPACITOR DE PLACAS PARALELAS

Podemos aplicar a definição de capacitância a um sistema simples de dois condutores idênticos cujos planos são paralelos e infinitos, com separação d (Figura 6.2). Escolhendo o plano condutor inferior em $z = 0$ e o superior em $z = d$, uma lâmina uniforme de carga superficial $\pm\rho_S$ em cada condutor leva ao campo uniforme [de acordo com a Seção 2.5, Equação (18)]

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{\epsilon}\mathbf{a}_z$$

onde a permissividade do dielétrico homogêneo é ϵ, e

$$\mathbf{D} = \rho_S \mathbf{a}_z$$

Note que esse resultado poderia ter sido obtido pela aplicação da condição de fronteira em uma superfície condutora [Equação (18) do Capítulo 5] em *uma* das superfícies das placas. Referindo-se às superfícies e seus vetores unitários normais na Figura 6.2, onde $\mathbf{n}_{\text{inferior}} = \mathbf{a}_z$ e $\mathbf{n}_{\text{superior}} = -\mathbf{a}_z$, encontramos no plano inferior:

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_{\text{inferior}}\Big|_{z=0} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{a}_z = \rho_s \;\Rightarrow\; \mathbf{D} = \rho_s\, \mathbf{a}_z$$

No plano superior, encontramos o mesmo resultado

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_{\text{superior}}\Big|_{z=d} = \mathbf{D} \cdot (-\mathbf{a}_z) = -\rho_s \;\Rightarrow\; \mathbf{D} = \rho_s\, \mathbf{a}_z$$

Essa é uma das principais vantagens da condição de fronteira em condutor, uma vez que necessitamos aplicá-la somente a uma única fronteira para obter o campo *total* na mesma (decorrente de todas as outras fontes).

A diferença de potencial entre os planos inferior e superior é

$$V_0 = -\int_{\text{superior}}^{\text{inferior}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\int_d^0 \frac{\rho_S}{\epsilon} dz = \frac{\rho_S}{\epsilon} d$$

Uma vez que a carga total em cada plano é infinita, a capacitância será também infinita. Uma resposta mais prática é obtida considerando planos, cada um de área S, cujas dimensões lineares são muito maiores que a separação d entre os mesmos. Assim, podemos afirmar que o campo elétrico e a distribuição de cargas são quase uniformes em todos os pontos não adjacentes às bordas, acrescentando que essa última região

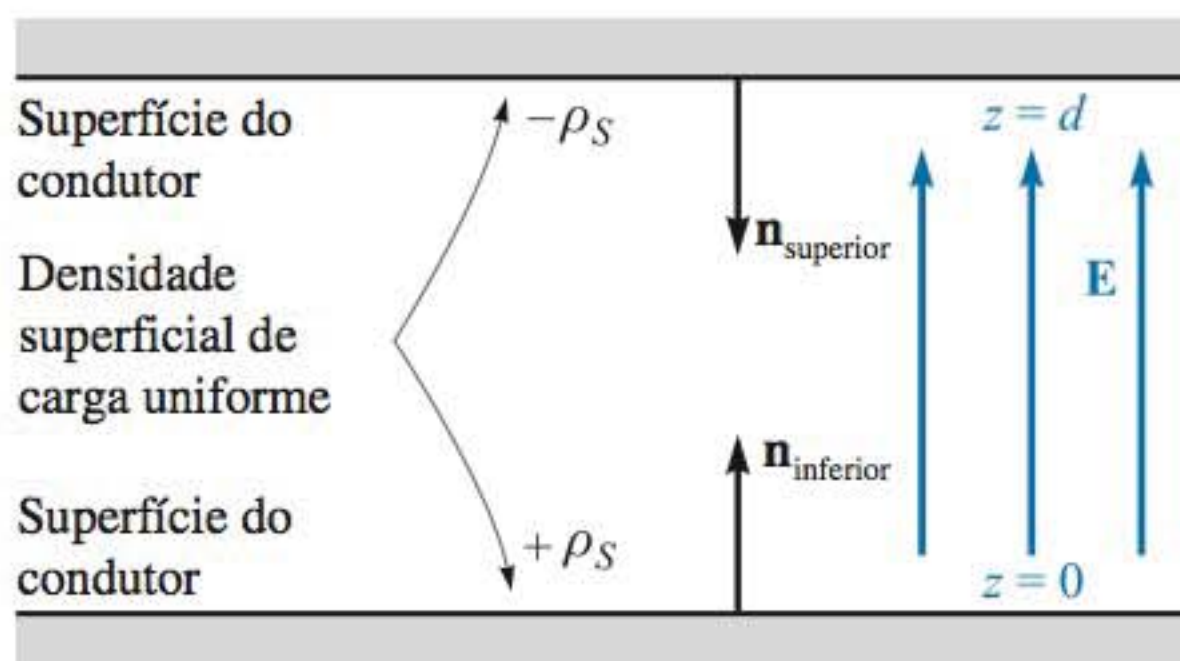



Figura 6.2 O problema do capacitor de placas paralelas. A capacitância por metro quadrado de área de superfície é ϵ/d.

contribui apenas com uma pequena porcentagem para a capacitância total, permitindo-nos escrever um resultado familiar

$$Q = \rho_S S$$

$$V_0 = \frac{\rho_S}{\epsilon} d$$

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\epsilon S}{d}} \qquad (3)$$

De forma mais rigorosa, deveríamos considerar a Equação (3) como a capacitância de uma porção, de área *S*, do arranjo de planos infinitos. Métodos de cálculo dos efeitos das distribuições desconhecidas e não uniformes, perto das bordas, deverão esperar até que sejamos capazes de resolver problemas mais complicados que envolvam potencial.

EXEMPLO 6.1

Calcule a capacitância de um capacitor de placas paralelas que tem um dielétrico composto de mica, $\epsilon_r = 6$, uma área para a placa de 64,5 cm^2 e uma separação de 0,254 mm.

Solução. Temos que

$$S = 10 \times 0{,}0254^2 = 6{,}45 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$$
$$d = 0{,}01 \times 0{,}0254 = 2{,}54 \times 10^{-4}\ \text{m}$$

e assim

$$C = \frac{6 \times 8{,}854 \times 10^{-12} \times 6{,}45 \times 10^{-3}}{2{,}54 \times 10^{-4}} = 1{,}349\ \text{nF}$$

Uma grande área das placas é obtida em capacitores de dimensões físicas pequenas ao montarmos placas menores em *sanduíches* de 50 a 100 pilhas ou enrolarmos placas finas separadas por dielétricos flexíveis.

A Tabela C.1, no Apêndice C, também indica que existem materiais que possuem constantes dielétricas maiores que 1.000.

Finalmente, a energia total armazenada no capacitor é

$$W_E = \tfrac{1}{2}\int_{\text{vol}} \epsilon E^2\, dv = \tfrac{1}{2}\int_0^S \int_0^d \tfrac{\epsilon \rho_S^2}{\epsilon^2} dz\, dS = \tfrac{1}{2}\frac{\rho_S^2}{\epsilon} Sd = \tfrac{1}{2}\frac{\epsilon S}{d}\frac{\rho_S^2 d^2}{\epsilon^2}$$

ou

$$\boxed{W_E = \tfrac{1}{2} C V_0^2 = \tfrac{1}{2} Q V_0 = \tfrac{1}{2}\frac{Q^2}{C}} \qquad (4)$$

que são todas expressões familiares. A Equação (4) também indica que a energia armazenada em um capacitor, com uma diferença de potencial fixa em seus terminais, aumenta à medida que a constante dielétrica do meio aumenta.

EP6.1. Calcule a permissividade relativa do material dielétrico presente em um capacitor de placas paralelas se: (*a*) $S = 0{,}12\ \text{m}^2$, $d = 80\ \mu\text{m}$, $V_0 = 12$ V e o capacitor contém 1 μJ de energia; (*b*) a densidade de energia armazenada é $100\ \text{J/m}^3$, $V_0 = 200$ V e $d = 45\ \mu\text{m}$; (*c*) $E = 200$ kV/m e $\rho_S = 20\ \mu\text{C/m}^2$.

Resp. 1,05; 1,14; 11,3

6.3 DIVERSOS EXEMPLOS DE CAPACITÂNCIA

Como um primeiro exemplo breve, escolhemos um cabo coaxial ou um capacitor coaxial de raio interno a, raio externo b e comprimento L. Não é necessário grande esforço de dedução, pois a diferença de potencial é dada pela Equação (11) na Seção 4.3, e encontramos a capacitância de forma muito simples, dividindo essa diferença de potencial pela carga total $\rho_L L$ no comprimento L. Logo,

$$C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln(b/a)} \tag{5}$$

A seguir consideramos um capacitor esférico formado por duas cascas condutoras esféricas concêntricas de raios a e b, $b > a$. A expressão para o campo elétrico foi obtida previamente pela lei de Gauss,

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$$

onde a região entre as esferas é um dielétrico com permissividade ϵ. A expressão para a diferença de potencial foi encontrada por meio dessa equação pela integral de linha [Seção 4.3, Equação (12)]. Logo,

$$V_{ab} = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

Na equação anterior, Q representa a carga total na esfera interna, e a capacitância é dada por

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{4\pi\epsilon}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}} \tag{6}$$

Se permitirmos que a esfera externa seja infinitamente grande, obtemos a capacitância de um condutor esférico isolado,

$$C = 4\pi\epsilon a \tag{7}$$

Para um diâmetro de 1 cm, ou uma esfera do tamanho de uma bolinha de gude,

$$C = 0{,}556 \text{ pF}$$

no espaço livre.

Revestindo essa esfera com uma camada de dielétrico diferente, para a qual $\epsilon = \epsilon_1$, estendendo-se de $r = a$ até $r = r_1$,

$$D_r = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_1 r^2} \qquad (a < r < r_1)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad (r_1 < r)$$

e a diferença de potencial é

$$V_a - V_\infty = -\int_{r_1}^{a} \frac{Q\,dr}{4\pi\epsilon_1 r^2} - \int_{\infty}^{r_1} \frac{Q\,dr}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi}\left[\frac{1}{\epsilon_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r_1}\right) + \frac{1}{\epsilon_0 r_1}\right]$$

Logo,

$$C = \frac{4\pi}{\dfrac{1}{\epsilon_1}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{r_1}\right) + \dfrac{1}{\epsilon_0 r_1}} \tag{8}$$

Com o objetivo de olhar para o problema dos múltiplos dielétricos de uma maneira um pouco mais aprofundada, vamos considerar um capacitor de placas paralelas de área S e espaçamento d, assumindo, como é usual, que d é pequeno se comparado com as dimensões lineares das placas. Sua capacitância é $\epsilon_1 S/d$, quando se utiliza um dielétrico de permissividade ϵ_1. Agora, vamos substituir uma parte deste dielétrico por outro de permissividade ϵ_2, posicionando a fronteira entre os dois dielétricos de forma paralela às placas (Figura 6.3).

Podemos imediatamente suspeitar que essa combinação efetivamente se trata de dois capacitores em série, levando a uma capacitância total de

$$C = \frac{1}{\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}}$$

onde $C_1 = \epsilon_1 S/d_1$ e $C_2 = \epsilon_2 S/d_2$. Esse é realmente o resultado correto, mas também podemos obtê-lo por meio de uma abordagem mais básica, sem necessariamente recorrer à intuição.

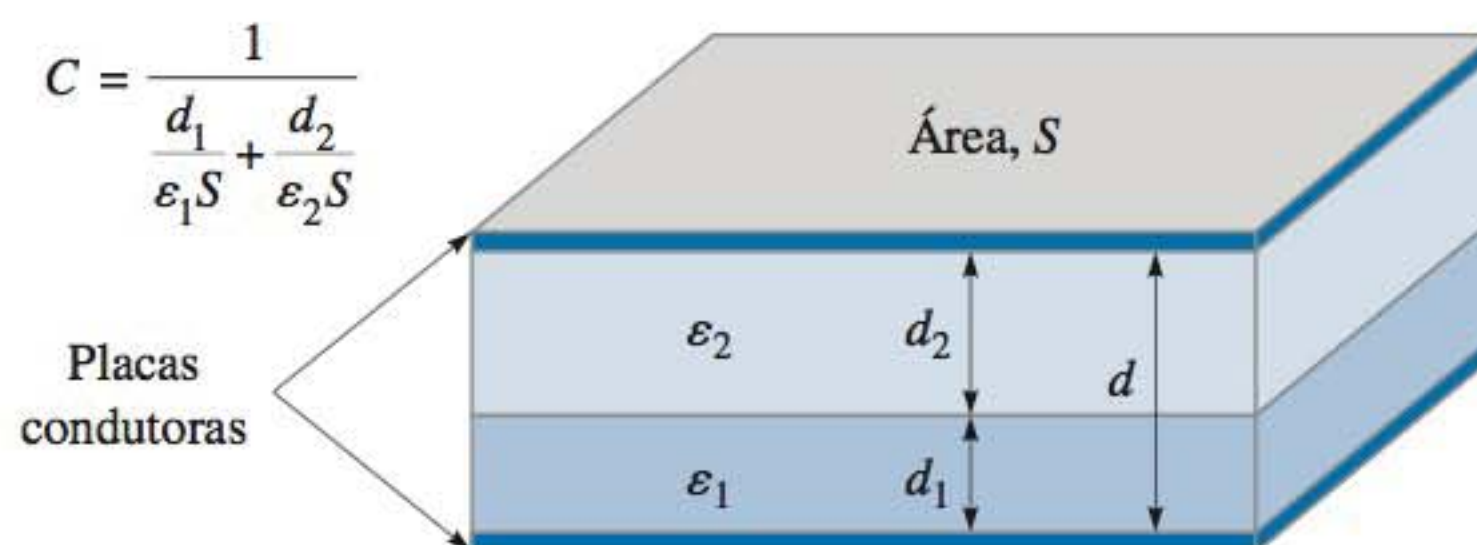



Figura 6.3 Um capacitor de placas paralelas contendo dois dielétricos. A interface entre os dielétricos é paralela às placas condutoras.

Uma vez que nossa definição de capacitância, $C = Q/V$, envolve uma carga e uma tensão, devemos considerar uma carga e em função dela encontrar a tensão. A capacitância não é uma função de nenhum desses dois elementos, mas apenas dos dielétricos e da geometria. Suponha que estamos considerando uma diferença de potencial V_0 entre as placas. As intensidades de campo elétrico nas duas regiões, E_2 e E_1, são ambas uniformes, e $V_0 = E_1 d_1 + E_2 d_2$. Na interface entre os dois dielétricos, E é normal, e nossa condição de fronteira, Equação (35) do Capítulo 5, informa que $D_{N1} = D_{N2}$ ou $\epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2$. Tal condição pressupõe (corretamente) que não existe carga superficial na interface. Eliminando E_2 na nossa relação de V_0, temos

$$E_1 = \frac{V_0}{d_1 + d_2(\epsilon_1/\epsilon_2)}$$

Portanto, a densidade superficial de carga na placa inferior terá a magnitude

$$\rho_{S1} = D_1 = \epsilon_1 E_1 = \frac{V_0}{\dfrac{d_1}{\epsilon_1} + \dfrac{d_2}{\epsilon_2}}$$

Uma vez que $D_1 = D_2$, a magnitude da carga superficial é a mesma em cada placa. Assim, a capacitância será:

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\rho_S S}{V_0} = \frac{1}{\dfrac{d_1}{\epsilon_1 S} + \dfrac{d_2}{\epsilon_2 S}} = \frac{1}{\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}}$$

Como uma solução alternativa (e ligeiramente mais simples), poderíamos considerar uma carga Q em uma placa, o que leva a uma densidade de carga Q/S e um valor de D que é, também, Q/S. Isso é verdade em ambas as regiões, visto que $D_{N1} = D_{N2}$ e D é normal. Então, $E_1 = D/\epsilon_1 = Q/(\epsilon_1 S)$, $E_2 = D/\epsilon_2 = Q/(\epsilon_2 S)$, e as diferenças de potencial ao longo das regiões são $V_1 = E_1 d_1 = Qd_1/(\epsilon_1 S)$ e $V_2 = E_2 d_2 = Qd_2/(\epsilon_2 S)$. A capacitância é

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_1 + V_2} = \frac{1}{\dfrac{d_1}{\epsilon_1 S} + \dfrac{d_2}{\epsilon_2 S}} \tag{9}$$

Como mudariam o método de solução ou a resposta se houvesse um terceiro plano condutor ao longo da interface? Nesse caso, deveríamos esperar encontrar carga superficial em cada lado desse condutor, e as magnitudes dessas cargas deveriam ser iguais. Em outras palavras, não consideraríamos as linhas elétricas passando diretamente de uma placa externa até a outra, mas sim terminando em um lado desse plano interno e depois continuando no outro lado. A capacitância ainda permanecerá inalterada, desde que a espessura do condutor acrescentado seja desprezível. Já a adição de uma placa condutora espessa aumentará a capacitância se a separação entre as placas externas permanecer constante, e isso é um exemplo de um teorema mais geral, segundo o qual a substituição de qualquer porção do dielétrico por um corpo condutor causará um aumento na capacitância.

Se a fronteira entre os dois dielétricos fosse posicionada na direção *normal* às duas placas condutoras e os dielétricos ocupassem áreas S_1 e S_2, então uma diferença de potencial V_0 produziria intensidades de campo $E_1 = E_2 = V_0/d$. Esses são campos

tangenciais na interface, e devem ser iguais. Portanto, podemos determinar, sucessivamente, D_1, D_2, ρ_{S1}, ρ_{S2} e Q, obtendo a capacitância

$$C = \frac{\epsilon_1 S_1 + \epsilon_2 S_2}{d} = C_1 + C_2 \tag{10}$$

como deveríamos esperar.

Neste momento, podemos fazer muito pouco com um capacitor no qual dois dielétricos são de tal forma utilizados que fazem com que a interface não seja, em todos os pontos, normal ou paralela aos campos. Certamente, conhecemos as condições de fronteira em cada condutor e na interface do dielétrico. Contudo, não conhecemos os campos aos quais aplicar as condições de fronteira. Tal problema deve ser colocado de lado até que nosso conhecimento de teoria de campo tenha crescido e estejamos dispostos e capazes de utilizar técnicas matemáticas mais avançadas.

EP6.2. Determine a capacitância de: (*a*) um cabo coaxial 35B/U de 30,4 cm de comprimento, que possui um condutor interno de 2,654 mm de diâmetro, um dielétrico de polietileno ($\epsilon_r = 2{,}26$ da Tabela C.1), e um condutor externo que possui um diâmetro interno de 1,73 cm; (*b*) uma esfera condutora de raio de 2,5 mm, coberta por uma camada de polietileno de 2 mm de espessura, envolvida por uma esfera condutora de raio 4,5 mm; (*c*) duas placas condutoras retangulares, de 1 cm por 4 cm, com espessura desprezível, entre as quais estão três camadas de dielétrico, cada uma de 1 cm por 4 cm e de 0,1 mm de espessura, possuindo constantes dielétricas de 1,5, 2,5 e 6.

Resp. 20,5 pF; 1,41 pF; 28,7 pF

6.4 CAPACITÂNCIA DE UMA LINHA DE DOIS FIOS

Em seguida, investigaremos o problema da linha de dois fios. A configuração consiste em dois cilindros condutores paralelos, cada um com seção reta circular, e deveremos ser capazes de encontrar informação completa sobre a intensidade de campo elétrico, o campo potencial, a distribuição da densidade superficial de carga e a capacitância. Esse arranjo é um tipo importante de linha de transmissão – assim como o cabo coaxial.

Começamos investigando o campo potencial de duas linhas infinitas de cargas. A Figura 6.4 mostra uma linha de cargas positiva no plano xz em $x = a$ e uma linha de cargas negativa em $x = -a$. O potencial de uma única linha de cargas com zero de referência em um raio R_0 é

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R_0}{R}$$

Agora, escrevemos a expressão para o campo potencial combinado utilizando as distâncias radiais em relação às linhas positiva e negativa R_1 e R_2, respectivamente,

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon}\left(\ln\frac{R_{10}}{R_1} - \ln\frac{R_{20}}{R_2}\right) = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon}\ln\frac{R_{10}R_2}{R_{20}R_1}$$

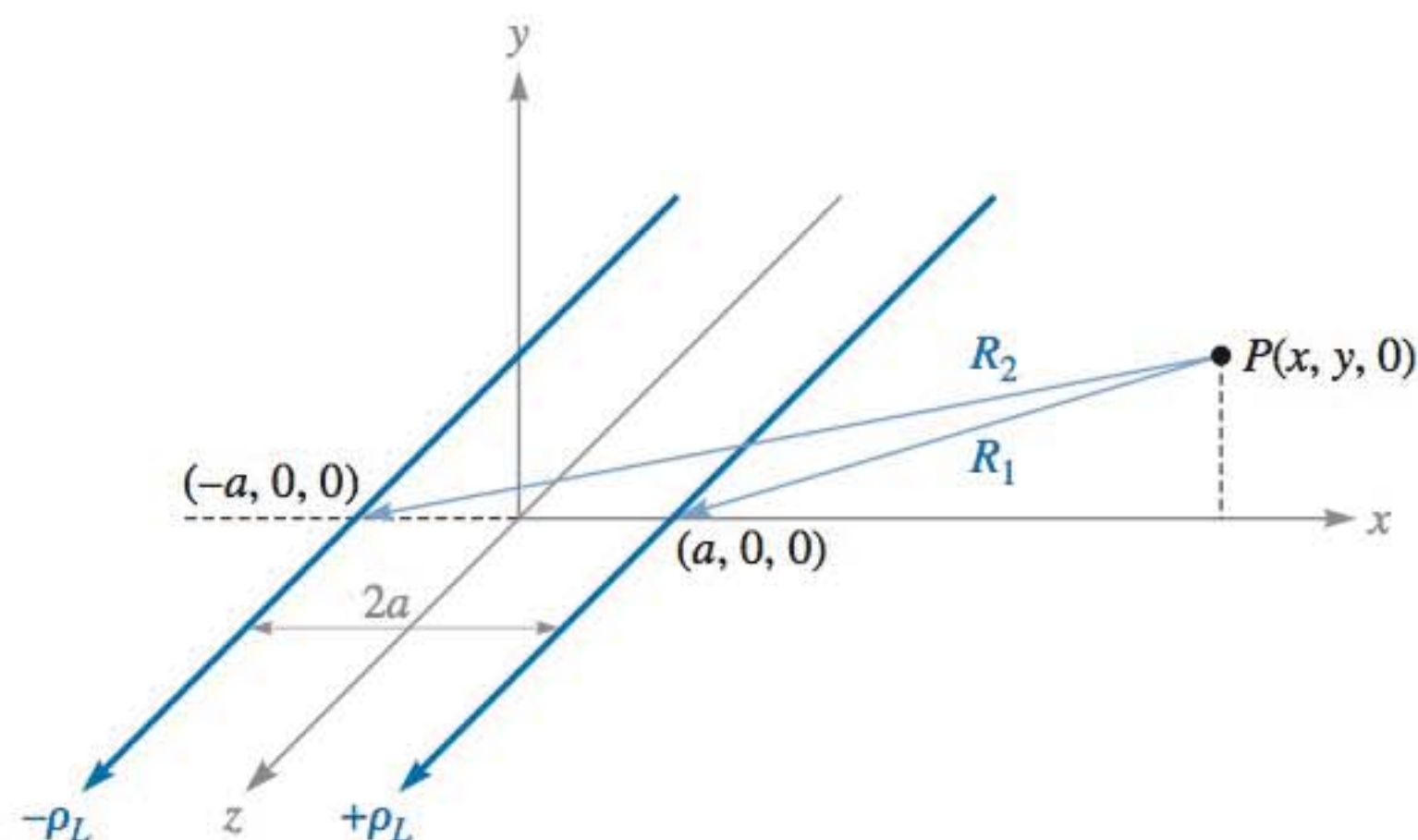



Figura 6.4 Duas linhas infinitas e paralelas de cargas que estão carregadas com cargas opostas. A linha positiva está em $x = a$, $y = 0$, e a negativa está em $x = -a$, $y = 0$. Um ponto genérico $P(x, y, 0)$ no plano xy mantém distâncias radiais correspondentes a R_1 e R_2 em relação às linhas positiva e negativa, respectivamente. As superfícies equipotenciais são cilindros circulares.

Escolhemos $R_{10} = R_{20}$, e assim posicionamos o zero de referência a distâncias iguais em relação a cada linha. Essa superfície é o plano $x = 0$. Expressando R_1 e R_2 por x e y

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon}\ln\sqrt{\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon}\ln\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2} \tag{11}$$

Com o objetivo de reconhecer as superfícies potenciais e entender adequadamente o problema que vamos resolver, alguma manipulação algébrica será necessária. Escolhendo uma superfície equipotencial $V = V_1$, definimos K_1 como um parâmetro adimensional que é uma função do potencial V_1,

$$K_1 = e^{4\pi\epsilon V_1/\rho_L} \tag{12}$$

de forma que

$$K_1 = \frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}$$

Após multiplicar e agrupar potências semelhantes, obtemos

$$x^2 - 2ax\frac{K_1+1}{K_1-1} + y^2 + a^2 = 0$$

Em seguida, gastamos algumas linhas de álgebra e completamos o quadrado,

$$\left(x - a\frac{K_1+1}{K_1-1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1-1}\right)^2$$

Isso mostra que a superfície equipotencial $V = V_1$ é independente de z (ou é um cilindro) e intercepta o plano xy em um círculo de raio b,

$$b = \frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1-1}$$

o qual está centrado em $x = h$, $y = 0$, onde

$$h = a\frac{K_1 + 1}{K_1 - 1}$$

Agora, vamos abordar um problema físico considerando um plano condutor de potencial zero posicionado em $x = 0$, e um condutor cilíndrico de raio b e potencial V_0 com seu eixo posicionado a uma distância h do plano. Resolvemos as duas últimas equações para a e K_1 considerando as dimensões b e h,

$$a = \sqrt{h^2 - b^2} \tag{13}$$

e

$$\sqrt{K_1} = \frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b} \tag{14}$$

Porém, o potencial do cilindro é V_0, e a Equação (12) levará a

$$\sqrt{K_1} = e^{2\pi\epsilon V_0/\rho_L}$$

Logo,

$$\rho_L = \frac{4\pi\epsilon V_0}{\ln K_1} \tag{15}$$

Com isso, dados h, b e V_0, podemos determinar a, ρ_L e o parâmetro K_1. A capacitância entre o cilindro e o plano está agora disponível. Para um comprimento L na direção z, temos

$$C = \frac{\rho_L L}{V_0} = \frac{4\pi\epsilon L}{\ln K_1} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln\sqrt{K_1}}$$

ou

$$C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln[(h + \sqrt{h^2 - b^2})/b]} = \frac{2\pi\epsilon L}{\cosh^{-1}(h/b)} \tag{16}$$

O círculo em negrito (linha contínua) na Figura 6.5 mostra a seção reta de um cilindro de 5 m de raio em um potencial de 100 V no espaço livre, com seu eixo a 13 m de distância de um plano que está no potencial zero. Logo, $b = 5$, $h = 13$ e $V_0 = 100$. Com isso, podemos rapidamente encontrar a localização da linha equivalente de cargas por meio da Equação (13),

$$a = \sqrt{h^2 - b^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ m}$$

o valor do parâmetro potencial K_1 mediante a Equação (14),

$$\sqrt{K_1} = \frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b} = \frac{13 + 12}{5} = 5 \qquad K_1 = 25$$

a magnitude da linha equivalente de cargas da Equação (15),

$$\rho_L = \frac{4\pi\epsilon V_0}{\ln K_1} = \frac{4\pi \times 8{,}854 \times 10^{-12} \times 100}{\ln 25} = 3{,}46 \text{ nC/m}$$

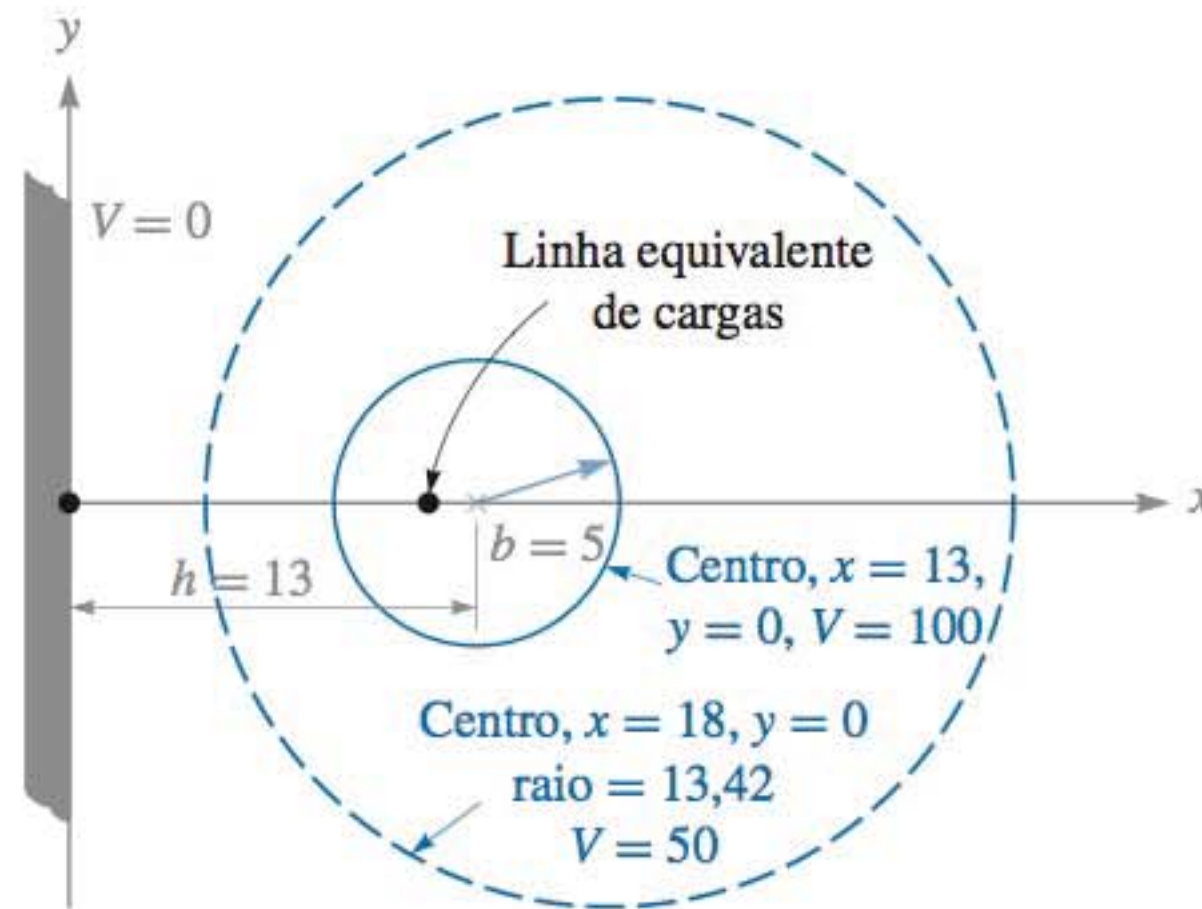



Figura 6.5 Um exemplo numérico de capacitância, densidade linear de cargas, posição de uma linha equivalente de cargas e características de superfícies equipotenciais para um condutor cilíndrico de 5 m de raio em um potencial de 100 V, que está a 13 m e é paralelo a um plano condutor que está no potencial zero.

e a capacitância entre o cilindro e o plano da Equação (16),

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\cosh^{-1}(h/b)} = \frac{2\pi \times 8{,}854 \times 10^{-12}}{\cosh^{-1}(13/5)} = 34{,}6 \text{ pF/m}$$

Podemos também identificar o cilindro que representa a superfície equipotencial de 50 V achando novos valores para K_1, h e b. Primeiramente, utilizamos a Equação (12) para obter

$$K_1 = e^{4\pi\epsilon V_1/\rho_L} = e^{4\pi \times 8{,}854 \times 10^{-12} \times 50/3{,}46 \times 10^{-9}} = 5{,}00$$

Assim, o novo raio será

$$b = \frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1 - 1} = \frac{2 \times 12\sqrt{5}}{5-1} = 13{,}42 \text{ m}$$

e o valor correspondente de h, por sua vez, será

$$h = a\frac{K_1 + 1}{K_1 - 1} = 12\frac{5+1}{5-1} = 18 \text{ m}$$

O cilindro (seção reta) é mostrado em linha pontilhada na Figura 6.5.

A intensidade de campo elétrico pode ser encontrada tomando o negativo do gradiente do campo potencial, conforme dado pela Equação (11),

$$\mathbf{E} = -\nabla\left[\frac{\rho_L}{4\pi\epsilon}\ln\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}\right]$$

Logo,

$$\mathbf{E} = -\frac{\rho_L}{4\pi\epsilon}\left[\frac{2(x+a)\mathbf{a}_x + 2y\mathbf{a}_y}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{2(x-a)\mathbf{a}_x + 2y\mathbf{a}_y}{(x-a)^2 + y^2}\right]$$

e

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} = -\frac{\rho_L}{2\pi}\left[\frac{(x+a)\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{(x-a)\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y}{(x-a)^2 + y^2}\right]$$

Se calcularmos D_x em $x = h - b$, $y = 0$ podemos obter $\rho_{S,\,\max}$

$$\rho_{S,\,\max} = -D_{x,x=h-b,y=0} = \frac{\rho_L}{2\pi}\left[\frac{h-b+a}{(h-b+a)^2} - \frac{h-b-a}{(h-b-a)^2}\right]$$

Para nosso exemplo,

$$\rho_{S,\,\max} = \frac{3{,}46 \times 10^{-9}}{2\pi}\left[\frac{13-5+12}{(13-5+12)^2} - \frac{13-5-12}{(13-5-12)^2}\right] = 0{,}165 \text{ nC/m}^2$$

Similarmente, $\rho_{S,\,\min} = D_{x,\,x=h+b,\,y=0}$ e

$$\rho_{S,\,\min} = \frac{3{,}46 \times 10^{-9}}{2\pi}\left[\frac{13+5+12}{30^2} - \frac{13+5-12}{6^2}\right] = 0{,}073 \text{ nC/m}^2$$

Logo,

$$\rho_{S,\,\max} = 2{,}25\rho_{S,\,\min}$$

Se aplicarmos a Equação (16) considerando um condutor para o qual $b \ll h$, então

$$\ln\left[\left(h + \sqrt{h^2 - b^2}\right)/b\right] \doteq \ln[(h+h)/b] \doteq \ln(2h/b)$$

e

$$C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln(2h/b)} \qquad (b \ll h) \tag{17}$$

A capacitância entre os dois condutores circulares separados por uma distância $2h$ é a metade da capacitância dada pelas Equações (16) ou (17). Essa última resposta é interessante para nós, porque dá uma expressão para a capacitância de uma seção de linha de transmissão de dois fios, que será um dos tipos de linhas de transmissão estudados por último no Capítulo 13.

EP6.3. Um condutor cilíndrico de raio de 1 cm e em um potencial de 20 V é paralelo a um plano condutor que está no potencial zero. O plano está distante 5 cm do eixo do cilindro. Se os condutores estiverem imersos em um dielétrico perfeito para o qual $\epsilon_r = 4{,}5$, calcule: (*a*) a capacitância por unidade de comprimento entre o cilindro e o plano; (*b*) $\rho_{S,\,\max}$ no cilindro.

Resp. 109,2 pF/m; 42,6 nC/m^2

6.5 UTILIZANDO ESBOÇOS DE CAMPOS PARA ESTIMAR A CAPACITÂNCIA EM PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS

Em problemas de capacitância nos quais as configurações de condutores não podem ser facilmente descritas usando um sistema de coordenadas único, são aplicadas normalmente outras técnicas de análise. Tais métodos envolvem uma determinação numérica de valores de campo ou de potencial em uma grade dentro da região de interesse. Nesta seção, outra abordagem é descrita, a qual envolve o desenho de esboços de linhas de campo e superfícies equipotenciais que seguem algumas poucas regras simples. Essa abordagem, apesar de não ter a exatidão de métodos mais elegantes,

permite estimativas bastante rápidas da capacitância, enquanto disponibiliza um retrato físico útil da configuração de campo.

O método requer apenas lápis e papel. Além de ser econômico, é também capaz de proporcionar boa exatidão se utilizado com habilidade e paciência. Uma boa exatidão (5 a 10% na determinação da capacitância) pode ser obtida por um iniciante, seguindo as poucas regras e dicas dessa arte. O método a ser descrito é aplicável apenas a campos nos quais não haja variação na direção normal ao plano de esboço. O procedimento é baseado em diversos fatos, que já demonstramos:

1. A fronteira de um condutor é uma superfície equipotencial.
2. A intensidade de campo elétrico e a densidade de fluxo elétrico são ambas perpendiculares às superfícies equipotenciais.
3. **E** e **D** são, com isso, perpendiculares às fronteiras do condutor e possuem valores tangenciais iguais a zero.
4. As linhas de fluxo elétrico, ou linhas de força, começam e terminam em cargas, e por isso, em um dielétrico homogêneo livre de cargas, começam e terminam apenas nas fronteiras dos condutores.

Vamos considerar as implicações dessas afirmações desenhando as linhas de força em um esboço que já mostra as superfícies equipotenciais. Na Figura 6.6*a*, duas fronteiras de condutores são mostradas, e equipotenciais são desenhadas com uma diferença de potencial constante entre linhas. Devemos lembrar que essas linhas são apenas as seções retas das superfícies equipotenciais, que são cilindros (apesar de não circulares), uma vez que não é permitida variação na direção normal à superfície do papel. Arbitrariamente escolhemos começar uma linha de força, ou linha de fluxo, em A na superfície do condutor mais positivo. Ela deixa a superfície de modo normal e deve atravessar em ângulos retos as superfícies equipotenciais (que não estão desenhadas, mas são muito reais) entre o condutor e a primeira superfície mostrada. A linha continua até o outro condutor, obedecendo à regra única de que a interseção com cada equipotencial deve formar um ângulo reto.

De uma maneira similar, podemos começar em B e esboçar outra linha de força terminando em B'. Antes de continuar, vamos interpretar o significado desse par de linhas de força. A linha de força, por definição, é em todos os pontos tangente à intensidade

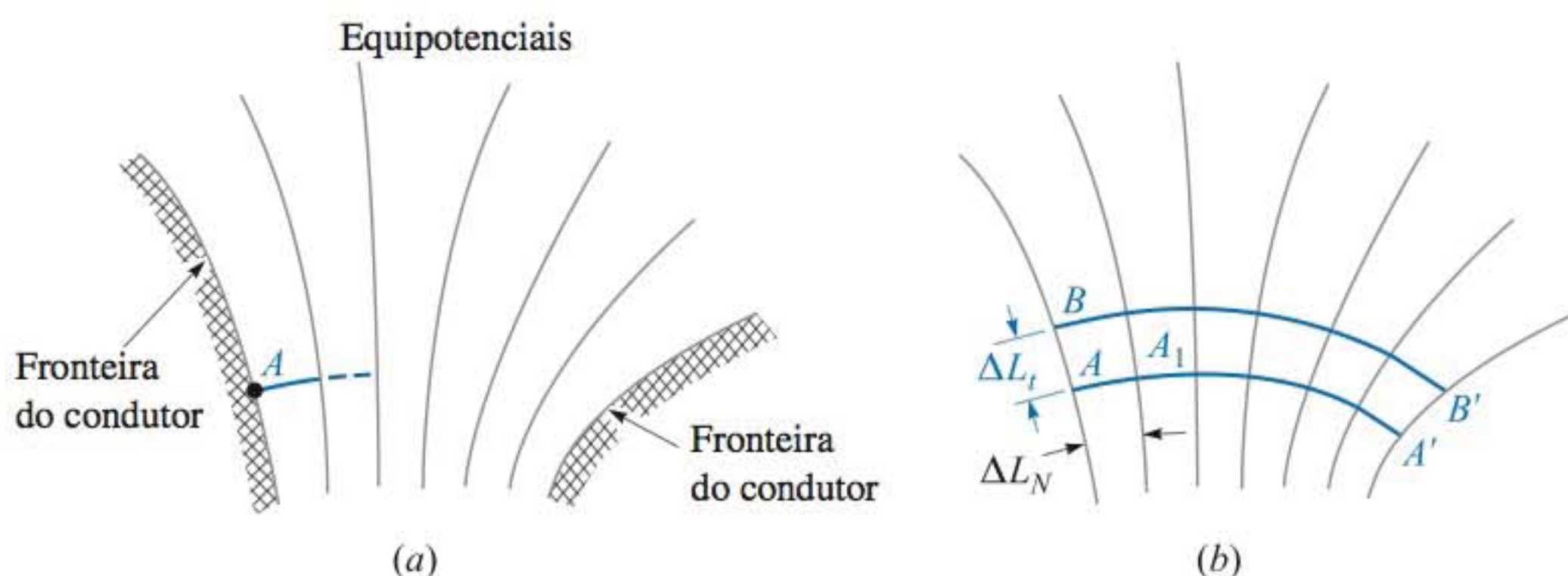



Figura 6.6 (*a*) Esboço das superfícies equipotenciais entre os dois condutores. O incremento de potencial entre cada duas equipotenciais adjacentes é o mesmo. (*b*) Uma linha de fluxo foi desenhada de A até A', e uma segunda de B até B'.

de campo elétrico ou à densidade de fluxo elétrico. Uma vez que a linha de força é tangente à densidade de fluxo elétrico, a densidade de fluxo é tangente à linha de força, e nenhum fluxo elétrico pode atravessar nenhuma linha de força. Em outras palavras, se existe uma carga de 5 μC na superfície entre A e B (e que se estende 1 m para dentro do papel), então 5 μC de fluxo começam nessa região, e tudo deve terminar entre A' e B'. Tal par de linhas, algumas vezes, é chamado de *tubo* de fluxo, porque fisicamente parece carregar fluxo de um condutor para o outro sem perder nada.

Agora desejamos construir uma terceira linha de força, e ambas as interpretações (matemática e visual) que podemos fazer a partir do esboço serão grandemente simplificadas se desenharmos essa linha começando de algum ponto C, escolhido de forma que a mesma quantidade de fluxo seja deslocada no tubo BC em comparação ao que foi deslocado em AB. Como escolhemos essa posição de C?

A intensidade de campo elétrico no ponto a meia distância da linha que une A até B pode ser encontrada, aproximadamente, admitindo um valor para o fluxo no tubo AB, digamos $\Delta\Psi$, o qual permite expressar a densidade de fluxo elétrico como $\Delta\Psi/\Delta L_t$, considerando ainda que a profundidade do tubo no papel é de 1 m e ΔL_t é o comprimento da linha que une A a B. O valor absoluto de E é, portanto,

$$E = \frac{1}{\epsilon}\frac{\Delta\Psi}{\Delta L_t}$$

Entretanto, podemos também encontrar o valor absoluto da intensidade de campo elétrico dividindo a diferença de potencial entre os pontos A e A_1, que pertencem a duas superfícies equipotenciais adjacentes, pela distância de A a A_1. Se essa distância é designada por ΔL_N e um incremento de potencial ΔV entre as equipotenciais for considerado, então

$$E = \frac{\Delta V}{\Delta L_N}$$

Esse valor se aplica mais exatamente ao ponto médio do segmento de reta de A para A_1, enquanto o valor anterior era mais exato para o ponto médio do segmento de linha de A para B. Contudo, se as equipotenciais estão bem próximas (ΔV pequeno) e as duas linhas de forças também ($\Delta\Psi$ pequeno), os dois valores encontrados para a intensidade de campo elétrico devem ser aproximadamente iguais,

$$\frac{1}{\epsilon}\frac{\Delta\Psi}{\Delta L_t} = \frac{\Delta V}{\Delta L_N} \tag{18}$$

Ao longo de nosso esboço consideramos um meio homogêneo (ϵ constante), um incremento de potencial constante entre equipotenciais (ΔV constante) e uma quantidade constante de fluxo por tubo ($\Delta\Psi$ constante). Para satisfazer a todas essas condições, a Equação (18) mostra que

$$\frac{\Delta L_t}{\Delta L_N} = \text{constante} = \frac{1}{\epsilon}\frac{\Delta\Psi}{\Delta V} \tag{19}$$

Um argumento similar poderia ser feito para qualquer ponto em nosso esboço, e por isso somos levados a concluir que uma relação constante deve ser mantida entre a distância entre as linhas de força, medidas ao longo de uma equipotencial, e a distância

entre equipotenciais, medida ao longo de uma linha de força. É essa *relação* que deve ter o mesmo valor em todos os pontos, e não as distâncias individuais. Cada comprimento deve diminuir nas regiões de maior intensidade do campo, porque ΔV é constante.

A relação mais simples que podemos utilizar é a unidade, e a linha de força entre B e B' mostrada na Figura 6.6*b* começou em um ponto para o qual $\Delta L_t = \Delta L_N$. Uma vez que a razão entre essas distâncias é mantida igual à unidade, as linhas de força e as equipotenciais dividem a região que contém o campo em quadrados curvilíneos – um termo que implica uma figura geométrica plana que difere de um quadrado verdadeiro por ter lados ligeiramente curvados e desiguais, mas que se aproxima de um quadrado à medida que suas dimensões diminuem. Aqueles elementos incrementais de superfície nos três sistemas de coordenadas*, que são planos, também podem ser desenhados como quadrados curvilíneos.

Agora, vamos rapidamente esboçar as linhas de força restantes, mantendo cada pequena caixa o mais próximo possível de um quadrado. Uma linha de força é iniciada, uma linha equipotencial é esboçada e outra linha de força é adicionada, formando um quadrado curvilíneo; o mapa gradualmente se estende pela região desejada. O esboço completo é mostrado na Figura 6.7.

A construção de um mapa de campo útil é uma arte. A ciência apenas fornece as regras, e a proficiência em qualquer arte requer prática. Um bom problema para principiantes é o cabo coaxial ou capacitor coaxial, uma vez que todas as equipotenciais são círculos, enquanto as linhas de fluxo são linhas retas. Um esboço de dois condutores circulares paralelos cujas equipotencias são novamente círculos (mas com centros diferentes) será apresentado depois; cada um deles consistirá em um problema no final do capítulo.

A Figura 6.8 mostra um mapa completo para um cabo que contém um condutor interno quadrado envolvido por um condutor circular. A capacitância é encontrada de $C = Q/V_0$, substituindo Q por $N_Q \Delta Q = N_Q \Delta \Psi$, onde N_Q é o número de tubos de fluxo que unem os dois condutores, e fazendo $V_0 = N_V \Delta V$, onde N_V é o número de incrementos de potencial entre os condutores,

$$C = \frac{N_Q \Delta Q}{N_V \Delta V}$$

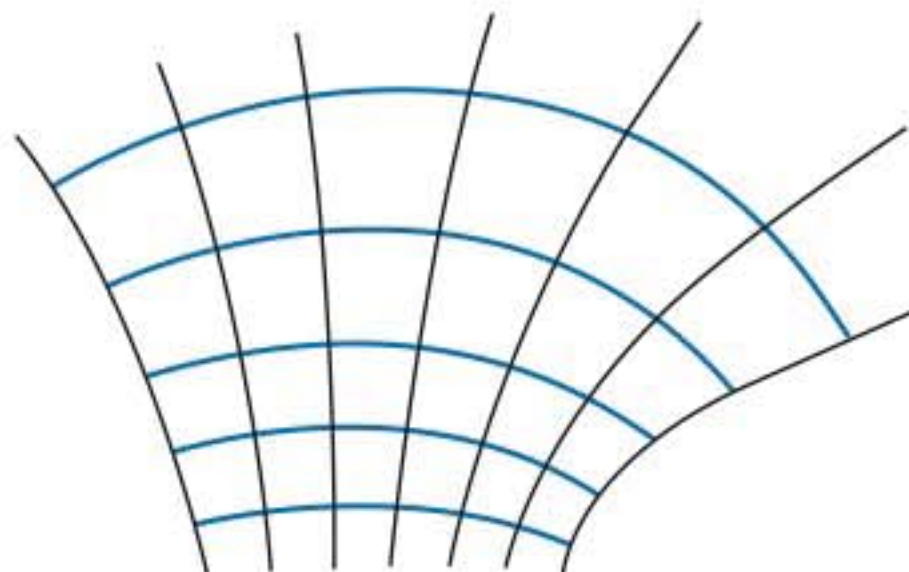



Figura 6.7 O resto das linhas de força foram adicionadas à Figura 6.6*b*, começando cada nova linha com direção normal ao condutor e mantendo quadrados curvilíneos ao longo do esboço.

* N. de T.: Sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndricas circulares e esféricas.

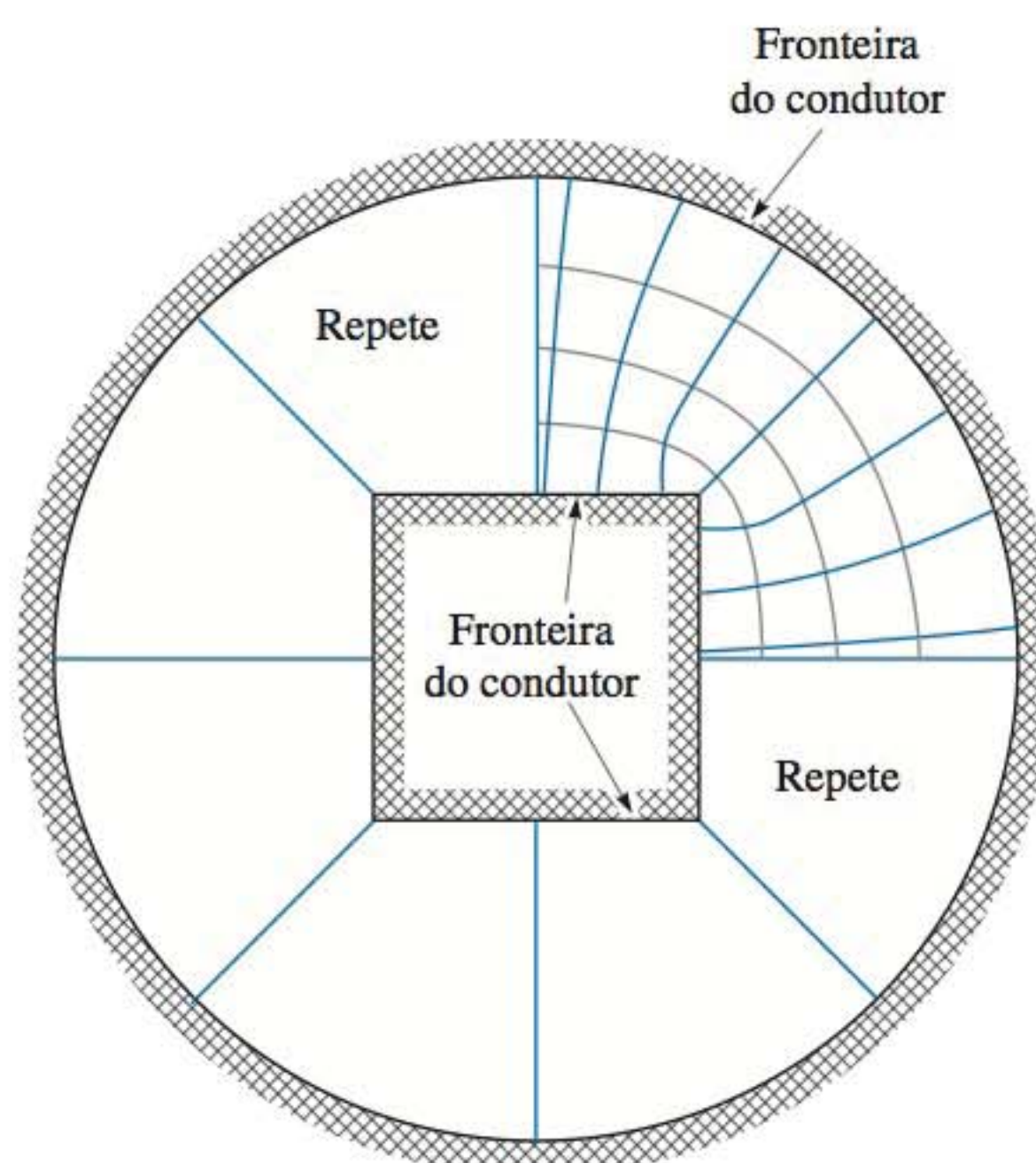



Figura 6.8 Um exemplo de um mapa de campo por quadrados curvilíneos. O lado do quadrado é dois terços do raio do círculo. $N_V = 4$ e $N_Q = 8 \times 3{,}25 = 26$ e, com isso, $C = \epsilon_0 N_Q / N_V = 57{,}6$ pF/m.

e então utilizando a Equação (19),

$$C = \frac{N_Q}{N_V} \epsilon \frac{\Delta L_t}{\Delta L_N} = \epsilon \frac{N_Q}{N_V} \tag{20}$$

uma vez que $\Delta L_t / \Delta L_N = 1$. A determinação da capacitância pelo desenho do fluxo consiste meramente em contar os quadrados em duas direções, entre os condutores e em volta de cada condutor. Pela Figura 6.8, obtemos

$$C = \epsilon_0 \frac{8 \times 3{,}25}{4} = 57{,}6 \text{ pF/m}$$

Ramo, Whinnery e Van Duzer apresentam uma discussão excelente com exemplos de construção de mapas de campo por quadrados curvilíneos. Eles oferecem as seguintes sugestões:[1]

1. Planeje fazer alguns esboços grosseiros, levando apenas um minuto ou mais por desenho, antes de começar qualquer desenho mais cuidadoso. A utilização de papel transparente sobre o desenho com a fronteira básica acelerará esses esboços preliminares.
2. Divida as diferenças conhecidas de potencial entre eletrodos em um número igual de divisões – digamos quatro ou oito, para começar.
3. Comece o esboço das equipotenciais pela região onde os campos são mais bem conhecidos, como, por exemplo, alguma região onde se aproximam de um campo

[1] Com permissão de S. Ramo, J. R. Whinnery e T. Van Duzer, pp. 51-52. Ver Referências no final deste capítulo. Mapas curvilíneos serão discutidos nas páginas 50-52.

uniforme. Estenda as equipotenciais pelo desenho de acordo com o seu bom senso. Note que elas tendem a se concentrar nos ângulos agudos da fronteira condutora e a se espalhar na vizinhança de ângulos obtusos da fronteira.

4. Desenhe o conjunto de linhas de campo ortogonais. Assim que elas forem iniciadas, devem formar quadrados curvilíneos, mas, à medida que eles se estenderem, a condição de ortogonalidade deve ser mantida evidente, mesmo que isso resulte em alguns retângulos com razões diferentes da unidade.
5. Olhe para as regiões com proporções laterais ruins e tente ver o que estava errado com a primeira tentativa de equipotenciais. Corrija-as e repita o procedimento até que quadrados curvilíneos razoáveis apareçam no desenho.
6. Em regiões de baixa intensidade de campo, haverá figuras grandes, frequentemente de cinco ou seis lados. Para analisar a correção do desenho nessa região, essas grandes unidades devem ser subdivididas. As subdivisões devem ser iniciadas na região que precisa de subdivisão, e cada vez que um tubo de fluxo é dividido ao meio, as divisões de potencial nessa região devem ser divididas pelo mesmo fator.

EP6.4. A Figura 6.9 mostra a seção reta de dois cilindros circulares nos potenciais de 0 e 60 V. Os eixos são paralelos e a região entre os cilindros é preenchida por ar. As equipotenciais de 20 V e 40 V também são mostradas. Prepare um mapa de quadrados-curvilíneos na figura e use-o para estabelecer valores adequados para: (*a*) a capacitância por metro de comprimento; (*b*) E no lado esquerdo do condutor de 60 V se seu raio verdadeiro for 2 mm; (*c*) ρ_S neste ponto.

Resp. 69 pF/m; 60 kV/m; 550 nC/m^2

$V = 0$

$V = 60$ V

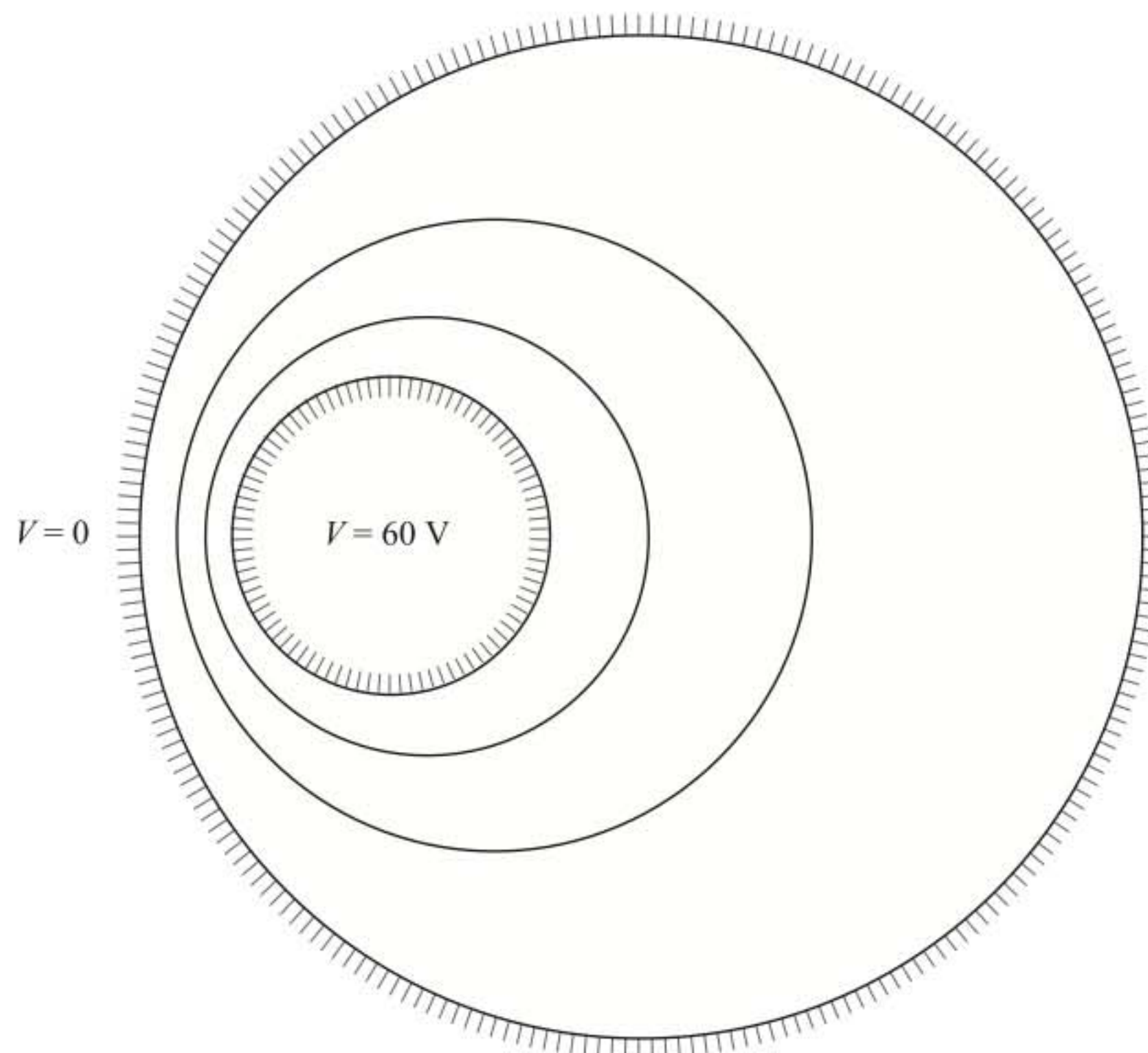



Figura 6.9 Ver Exercício Proposto 6.4.

6.6 EQUAÇÕES DE POISSON E DE LAPLACE

Nas seções anteriores, determinamos a capacitância ao inicialmente considerarmos uma distribuição de carga conhecida nos condutores para depois encontrarmos a diferença de potencial expressa pela carga considerada. Uma abordagem alternativa seria iniciar com potenciais conhecidos em cada condutor e, em seguida, calcular a carga considerando a diferença de potencial conhecida. A capacitância é, em cada caso, encontrada pela razão Q/V.

Assim, o primeiro objetivo na última abordagem é determinar a função potencial entre condutores considerando os valores de potenciais fornecidos nas fronteiras juntamente com possíveis densidades volumétricas de carga na região de interesse. As ferramentas matemáticas que permitem a determinação da função potencial são as equações de Poisson e de Laplace, a serem exploradas no restante deste capítulo. Problemas envolvendo de uma a três dimensões podem ser resolvidos analítica ou numericamente. As equações de Laplace e de Poisson, quando comparadas aos outros métodos, são provavelmente as mais úteis, porque muitos problemas em engenharia prática envolvem dispositivos cujas diferenças de potencial aplicadas são conhecidas, e cujas fronteiras estão submetidas a potenciais constantes.

Obter a equação de Poisson é extremamente simples, pois, da forma pontual da lei de Gauss,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \tag{21}$$

da definição de $\mathbf{D}$,

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \tag{22}$$

e da relação do gradiente,

$$\mathbf{E} = -\nabla V \tag{23}$$

por substituição temos

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = -\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = \rho_v$$

ou

$$\nabla \cdot \nabla V = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \tag{24}$$

para uma região homogênea na qual ϵ é constante.

A Equação (24) é a *equação de Poisson*, mas a operação de "duplo ∇" deve ser interpretada e expandida, pelo menos em coordenadas cartesianas, antes que a equação se torne útil. Em coordenadas retangulares,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

e, assim

$$\nabla \cdot \nabla V = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \qquad (25)$$

Normalmente, a operação $\nabla \cdot \nabla$ é abreviada por ∇^2 (e pronunciada como "nabla dois"), uma boa lembrança da derivada parcial de segunda ordem que aparece na Equação (25), e temos

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \qquad (26)$$

em coordenadas cartesianas.

Se $\rho_v = 0$, indicando uma densidade *volumétrica* de carga nula, mas permitindo que cargas pontuais, linhas de cargas e densidades superficiais de cargas existam em localizações singulares como fontes de campo, então

$$\nabla^2 V = 0 \qquad (27)$$

essa é a *equação de Laplace*. A operação ∇^2 é denominada de *Laplaciano de V*.

Em coordenadas cartesianas, a equação de Laplace é

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{(cartesianas)} \qquad (28)$$

e as formas de $\nabla^2 V$ em coordenadas cilíndricas e esféricas podem ser obtidas utilizando-se as expressões para divergência e gradiente já obtidas naqueles sistemas de coordenadas. Para referência, o Laplaciano em coordenadas cilíndricas é

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \qquad \text{(cilíndricas)} \qquad (29)$$

e em coordenadas esféricas é

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \qquad \text{(esféricas)} \qquad (30)$$

Essas equações podem ser expandidas tomando-se as derivadas parciais indicadas, porém normalmente é mais útil deixá-las exatamente nas formas dadas. Além disso, expandi-las (se for necessário) mais tarde é mais fácil do que ter de juntar novamente os pedaços quebrados.

A equação de Laplace é bastante abrangente, pois quando é aplicada a qualquer local onde a densidade volumétrica de carga seja zero, ela determina que toda configuração imaginável de eletrodos ou condutores produz um campo para o qual $\nabla^2 V = 0$. Todos esses campos são diferentes, com diversos valores de potenciais e de taxas de variação espacial, ainda que para cada um deles $\nabla^2 V = 0$. Uma vez que *todos* os campos (se $\rho_v = 0$) satisfazem a equação de Laplace, como podemos esperar reverter o procedimento e utilizá-la para encontrar um campo específico no qual tenhamos interesse? Obviamente, mais informação é necessária, e perceberemos que devemos resolver a equação de Laplace sujeita a algumas *condições de fronteira*.

Todo problema físico deve conter pelo menos uma fronteira condutora – e normalmente ele contém duas ou mais. Os potenciais nessas fronteiras são valores determinados, talvez V_0, V_1, ..., ou talvez valores numéricos. Essas superfícies equipotenciais definidas fornecerão as condições de fronteira para o tipo de problema a ser resolvido. Em outros tipos de problemas, as condições de fronteira tomam a forma de valores especificados para E (alternativamente, uma densidade superficial de cargas, ρ_S) em uma superfície envolvente, ou uma mistura de valores conhecidos de V e E.

Antes de utilizarmos a equação de Laplace ou a equação de Poisson em vários exemplos, devemos parar para mostrar que, se nossa resposta satisfaz a equação de Laplace e também satisfaz as condições de fronteira, ela será a única resposta possível. Essa é uma afirmação do Teorema da Unicidade, cuja demonstração é apresentada no Apêndice D.

EP6.5. Calcule os valores numéricos de V e ρ_v no ponto P, no espaço livre, se: (*a*) $V = \dfrac{4yz}{x^2+1}$, em $P(1, 2, 3)$; (*b*) $V = 5\rho^2 \cos 2\phi$, em $P(\rho = 3, \phi = \dfrac{\pi}{3}, z = 2)$; (*c*) $V = \dfrac{2\cos\phi}{r^2}$, em $P(r = 0{,}5, \theta = 45°, \phi = 60°)$.

Resp. 12 V, $-106{,}2$ pC/m^3; $-22{,}5$ V, 0; 4 V, 0

6.7 EXEMPLOS DA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE

Diversos métodos foram desenvolvidos para resolver a equação de Laplace. O método mais simples é a integração direta. Nesta seção, usaremos essa técnica para trabalhar em diversos exemplos que envolvem a variação de potencial em uma dimensão, em vários sistemas de coordenadas.

O método da integração direta é aplicável apenas a problemas "unidimensionais", ou nos quais o campo potencial é função apenas de uma das três coordenadas. Como estamos trabalhando apenas com três sistemas de coordenadas, pode parecer que existem nove problemas a serem resolvidos. Contudo, um pouco de reflexão mostrará que um campo que varia apenas com x é fundamentalmente o mesmo que aquele que varia apenas com y. Rotacionar o problema físico um quarto de volta (ou 90°) não provoca mudança. Na verdade, existem apenas cinco problemas a serem resolvidos, um em coordenadas cartesianas, dois em cilíndricas e dois em esféricas. Resolveremos todos esses problemas a seguir.

Primeiramente, vamos considerar V uma função apenas de x e nos preocuparmos com o tipo de problema físico que estamos resolvendo apenas quando precisarmos de condições de fronteira. A equação de Laplace se reduz a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

e a derivada parcial pode ser substituída por uma derivada ordinária, uma vez que V não é função de y ou z,

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = 0$$

Integramos duas vezes, obtendo

$$\frac{dV}{dx} = A$$

e

$$V = Ax + B \tag{31}$$

onde A e B são constantes de integração. A Equação (31) contém duas constantes desse tipo, conforme deveríamos esperar de uma equação diferencial de segunda ordem. Essas constantes podem ser determinadas apenas pelas condições de fronteira.

Uma vez que o campo varia apenas com x e não é função de y e z, V será uma constante se x for uma constante ou, em outras palavras, se as superfícies equipotenciais forem planos paralelos, normais ao eixo x. O campo é, portanto, aquele de um capacitor de placas paralelas, e assim que especificarmos o potencial em quaisquer dois planos, poderemos calcular nossas constantes de integração.

EXEMPLO 6.2

Comece com a função potencial, Equação (31), e determine a capacitância de um capacitor de placas paralelas de área S, separação entre as placas igual a d, e diferença de potencial V_0 entre as placas.

Solução. Considere $V = 0$ em $x = 0$ e $V = V_0$ em $x = d$. Logo, da Equação (31),

$$A = \frac{V_0}{d} \qquad B = 0$$

e

$$V = \frac{V_0 x}{d} \tag{32}$$

Precisamos, ainda, da carga total em uma das placas, antes que a capacitância possa ser calculada. Devemos lembrar que, quando primeiramente resolvemos esse problema do capacitor, a lâmina de cargas foi o nosso ponto de partida. Não tivemos que trabalhar de forma muito árdua para encontrar a carga, uma vez que todos os campos estavam expressos em função dela. Porém, foi trabalhoso encontrar a diferença de potencial, e agora o problema é inverso (e simplificado).

Após a escolha das condições de fronteira ter sido feita, os passos necessários são estes:

1. Dado V, use $\mathbf{E} = -\nabla V$ para encontrar $\mathbf{E}$.
2. Use $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ para encontrar $\mathbf{D}$.
3. Calcule $\mathbf{D}$ em uma das placas do capacitor, $\mathbf{D} = \mathbf{D}_S = D_N \mathbf{a}_N$.
4. Reconheça que $\rho_S = D_N$.
5. Encontre Q por meio de uma integração de superfície sobre a placa do capacitor, $Q = \int_S \rho_S \, dS$.

Assim, teremos:

$$V = V_0 \frac{x}{d}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{V_0}{d}\mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{D} = -\epsilon \frac{V_0}{d}\mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{D}_S = \mathbf{D}\Big|_{x=0} = -\epsilon \frac{V_0}{d}\mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{a}_N = \mathbf{a}_x$$

$$D_N = -\epsilon \frac{V_0}{d} = \rho_S$$

$$Q = \int_S \frac{-\epsilon V_0}{d} dS = -\epsilon \frac{V_0 S}{d}$$

e a capacitância é

$$C = \frac{|Q|}{V_0} = \frac{\epsilon S}{d} \tag{33}$$

Utilizaremos esse procedimento diversas vezes nos exemplos que se seguem.

EXEMPLO 6.3

Como nenhum problema novo é resolvido quando escolhemos campos que variam apenas com y ou z em coordenadas cartesianas, consideremos coordenadas cilíndricas no nosso próximo exemplo. Variações com relação a z novamente não são novidade, e por isso passaremos a considerar apenas a variação com relação a ρ.

Solução. A equação de Laplace assume a seguinte forma:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) = 0$$

Notando o ρ no denominador, excluímos $\rho = 0$ da nossa solução, multiplicamos por ρ e integramos,

$$\rho \frac{dV}{d\rho} = A$$

onde a derivada total substitui a parcial, pois V varia somente com ρ. Em seguida, rearranjamos e integramos novamente,

$$V = A \ln \rho + B \tag{34}$$

As superfícies equipotenciais são cilindros e são dadas por $\rho =$ constante; o problema aqui diz respeito a um capacitor coaxial ou linha de transmissão coaxial. Escolhemos uma diferença de potencial de V_0 considerando $V = V_0$ para $\rho = a$, $V = 0$ para $\rho = b$, $b > a$, e obtemos

$$\boxed{V = V_0 \frac{\ln(b/\rho)}{\ln(b/a)}} \tag{35}$$

da qual

$$\mathbf{E} = \frac{V_0}{\rho} \frac{1}{\ln(b/a)} \mathbf{a}_\rho$$

$$D_{N(\rho=a)} = \frac{\epsilon V_0}{a \ln(b/a)}$$

$$Q = \frac{\epsilon V_0 2\pi a L}{a \ln(b/a)}$$

$$\boxed{C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln(b/a)}} \tag{36}$$

Isso está de acordo com nossos resultados da Seção 6.3 [Equação (5)].

EXEMPLO 6.4

Agora vamos considerar V uma função apenas de ϕ em coordenadas cilíndricas. Devemos considerar o problema físico primeiramente, e ver que superfícies equipotenciais são dadas por $\phi =$ constante; elas são planos radiais. As condições de fronteira devem ser $V = 0$ em $\phi = 0$ e $V = V_0$ em $\phi = \alpha$, levando ao problema físico detalhado na Figura 6.10.

Solução. A equação de Laplace é agora

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

Excluímos $\rho = 0$ e temos

$$\frac{d^2 V}{d\phi^2} = 0$$

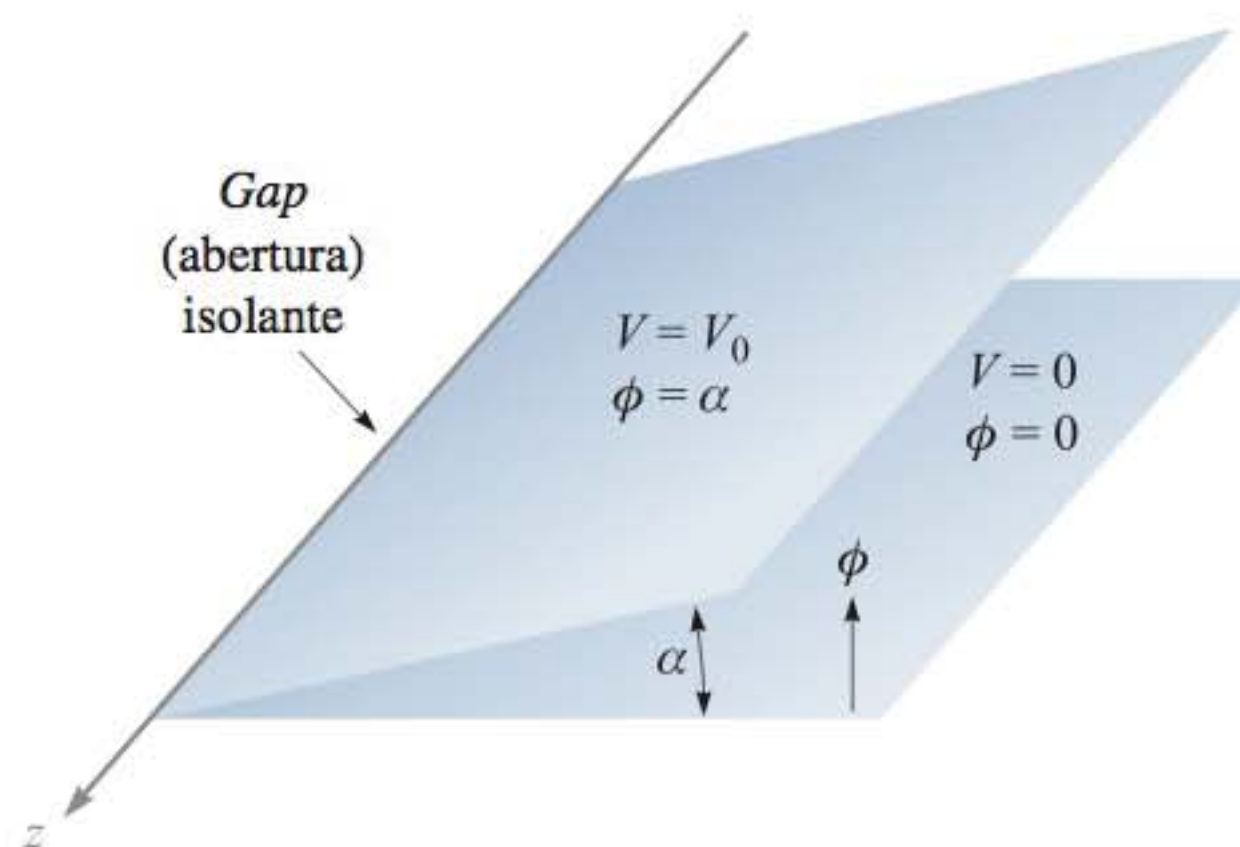



Figura 6.10 Dois planos radiais infinitos com um ângulo interior α. Um *gap* isolante infinitesimal existe em $\rho = 0$. O campo potencial pode ser encontrado pela aplicação da equação de Laplace em coordenadas cilíndricas.

A solução é

$$V = A\phi + B$$

As condições de fronteira determinam A e B, e

$$\boxed{V = V_0 \frac{\phi}{\alpha}} \tag{37}$$

Tomando o gradiente da Equação (37), temos a intensidade de campo elétrico

$$\boxed{\mathbf{E} = -\frac{V_0 \mathbf{a}_\phi}{\alpha \rho}} \tag{38}$$

e é interessante notar que E é uma função de ρ e não de ϕ. Isso não contradiz nossas suposições iniciais, que eram restrições apenas ao campo potencial. Note, entretanto, que o campo *vetorial* **E** é na direção de ϕ.

Um problema envolvendo a capacitância desses dois planos radiais está incluído no final do capítulo.

EXEMPLO 6.5

Mudaremos agora para coordenadas esféricas, considerando desde já que variações apenas com relação a ϕ já foram solucionadas; trataremos primeiramente $V = V(r)$.

Solução. Os detalhes são deixados para um problema posterior, mas o campo potencial final é dado por

$$\boxed{V = V_0 \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}} \tag{39}$$

onde as condições de fronteira são, evidentemente, $V = 0$ em $r = b$ e $V = V_0$ em $r = a$, $b > a$. O problema aqui envolve esferas concêntricas. A capacitância foi encontrada previamente na Seção 6.3 (por um método relativamente diferente) e é

$$C = \frac{4\pi\epsilon}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}} \tag{40}$$

EXEMPLO 6.6

Em coordenadas esféricas, restringiremos agora a função potencial a $V = V(\theta)$.

Solução. Obtemos,

$$\frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta} \frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{dV}{d\theta}\right) = 0$$

Excluímos $r = 0$ e $\theta = 0$ ou π e temos

$$\operatorname{sen}\theta \frac{dV}{d\theta} = A$$

A segunda integral é, então,

$$V = \int \frac{A\, d\theta}{\operatorname{sen}\theta} + B$$

que não é tão óbvia quanto as anteriores. Utilizando as tabelas de integração (ou recorrendo a uma boa memória) temos

$$V = A \ln\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right) + B \tag{41}$$

As superfícies equipotenciais da Equação (41) são cones. A Figura 6.11 ilustra o caso para o qual $V = 0$ em $\theta = \pi/2$ e $V = V_0$ em $\theta = \alpha$, $\alpha < \pi/2$. Obtemos

$$V = V_0 \frac{\ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}\right)}{\ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\right)} \tag{42}$$

Para encontrar a capacitância entre um cone condutor (com seu vértice separado de um plano condutor por um *gap* isolante infinitesimal) e seu eixo normal ao plano, vamos primeiramente encontrar a intensidade do campo:

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \frac{-1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{a}_\theta = -\frac{V_0}{r \operatorname{sen}\theta \ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\right)}\mathbf{a}_\theta$$

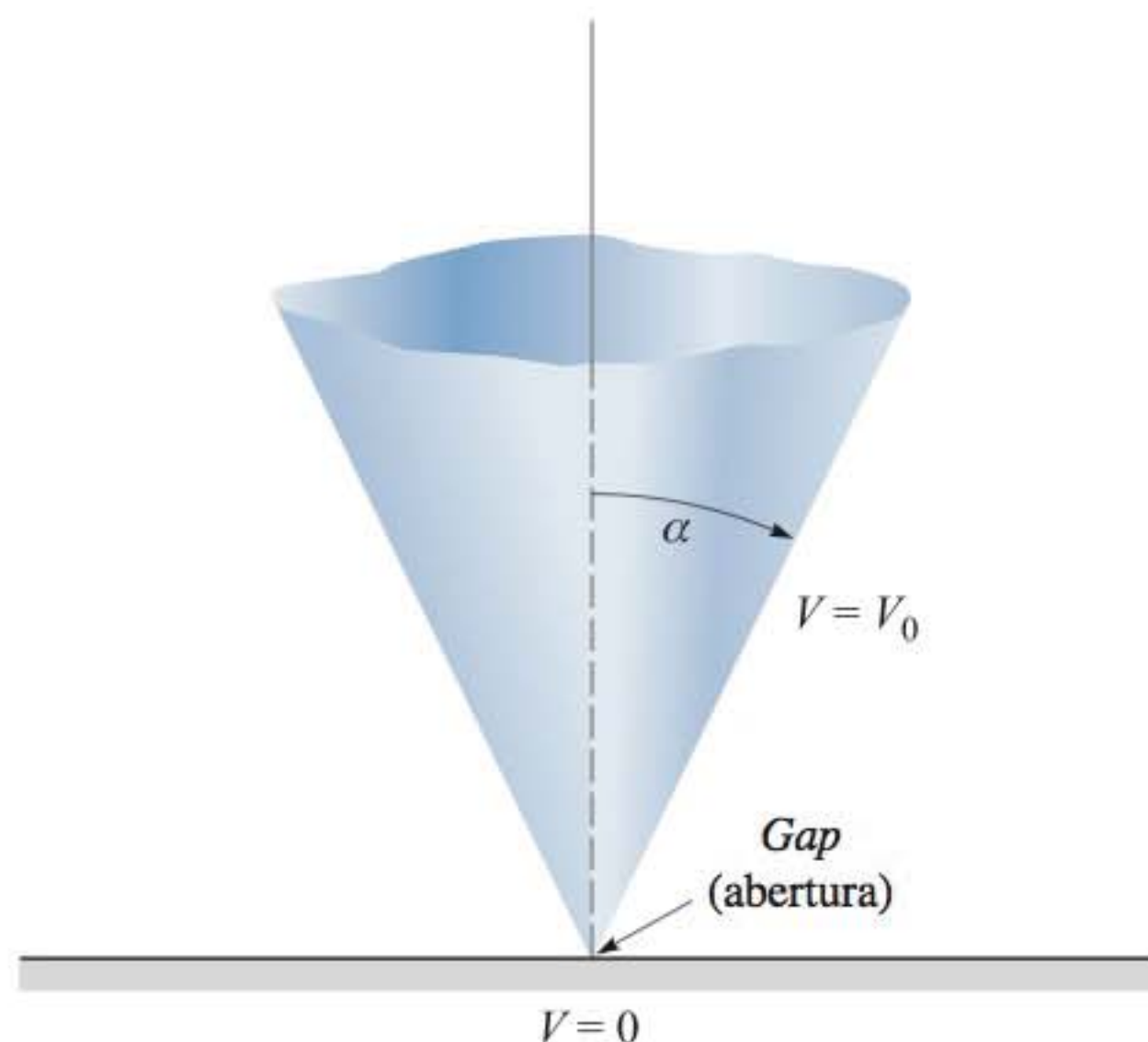



Figura 6.11 Para o cone $\theta = \alpha$ em V_0 e o plano $\theta = \pi/2$ em $V = 0$, o campo potencial é dado por $V = V_0[\ln(\text{tg}\,\theta/2)]/[\ln(\text{tg}\,\alpha/2)]$.

Assim, a densidade superficial de carga no cone é

$$\rho_S = \frac{-\epsilon V_0}{r \,\text{sen}\,\alpha \ln\left(\text{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}\right)}$$

produzindo uma carga total Q

$$Q = \frac{-\epsilon V_0}{\text{sen}\,\alpha \ln\left(\text{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r\,\text{sen}\,\alpha\, d\phi\, dr}{r}$$

$$= \frac{-2\pi\epsilon_0 V_0}{\ln\left(\text{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty dr$$

Isso leva a um valor infinito de carga e capacitância, e torna-se necessário considerar um cone de tamanho finito. Assim, nossa resposta será somente uma aproximação, porque a superfície equipotencial teórica é $\theta = \alpha$, uma superfície cônica que se estende de $r = 0$ até $r = \infty$, enquanto nossa superfície cônica física se estende de $r = 0$ até, digamos, $r = r_1$. A capacitância aproximada é

$$C \doteq \frac{2\pi\epsilon r_1}{\ln\left(\text{cotg}\,\dfrac{\alpha}{2}\right)} \tag{43}$$

Se desejarmos uma resposta mais exata, podemos fazer uma estimativa da capacitância da base do cone em relação ao plano de potencial zero e adicionar essa quan-

tidade à nossa resposta. Campos não uniformes* nessa região foram desprezados, o que introduz uma fonte adicional de erro.

EP6.6. Calcule $|\mathbf{E}|$ em $P(3, 1, 2)$ para o campo de: (*a*) dois cilindros condutores coaxiais, $V = 50$ V em $\rho = 2$ m e $V = 20$ V em $\rho = 3$ m; (*b*) dois planos condutores radiais, $V = 50$ V em $\phi = 10°$ e $V = 20$ V em $\phi = 30°$.

Resp. 23,4 V/m; 27,2 V/m

6.8 EXEMPLO DA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE POISSON: CAPACITÂNCIA DA JUNÇÃO P-N

Para selecionar um problema razoavelmente simples que possa ilustrar a aplicação da equação de Poisson, a densidade volumétrica de carga deve ser anteriormente especificada. Contudo, esse normalmente não é o caso. De fato, essa é frequentemente a grandeza sobre a qual estamos procurando mais informação. O tipo de problema que encontraremos mais tarde começa com um conhecimento apenas dos valores de potencial nas fronteiras, da intensidade de campo elétrico e da densidade de corrente. Com eles, aplicaríamos a equação de Poisson, a equação da continuidade e alguma relação expressando as forças nas partículas carregadas, tal como a equação de força de Lorentz ou a equação da difusão, e resolveríamos o sistema de equações inteiro simultaneamente. Tal esforço está além do escopo deste livro, e portanto vamos considerar uma quantidade razoavelmente grande de informações.

Como exemplo, vamos selecionar uma junção *pn* entre duas metades de uma barra semicondutora que se estende na direção x. Consideraremos que a região para $x < 0$ está com dopagem do tipo p e que a região para $x > 0$ é do tipo n. O grau de dopagem é idêntico em cada lado da junção. Para rever qualitativamente alguns fatos sobre a junção entre semicondutores, notamos que inicialmente há excesso de lacunas à esquerda da junção e excesso de elétrons à direita. Cada um, por difusão, atravessa a junção até que um campo elétrico seja estabelecido em uma direção tal que a corrente de difusão caia a zero. Com isso, para evitar que mais lacunas se movam para a direita, o campo elétrico na vizinhança da junção deve estar direcionado para a esquerda, onde E_x é negativo; assim, esse campo deve ser produzido por um conjunto de cargas positivas à direita da junção e um conjunto de cargas negativas à esquerda. Note que a camada de cargas positivas consiste em duas partes – as lacunas que atravessaram a junção e os íons doadores positivos dos quais os elétrons saíram. A camada de cargas negativas é constituída, de maneira oposta, por elétrons e íons receptores negativos.

O tipo de distribuição de carga resultante é mostrado na Figura 6.12*a*, e o campo negativo que ela produz é mostrado na Figura 6.12*b*. Após olhar para essas duas figuras, uma nova leitura do parágrafo anterior seria bastante proveitosa.

Uma distribuição de carga dessa forma pode ser aproximada por muitas expressões diferentes. Uma das expressões mais simples é

$$\rho_\nu = 2\rho_{\nu 0}\,\text{sech}\,\frac{x}{a}\,\text{tgh}\,\frac{x}{a} \tag{44}$$

* N. de T.: Associados aos campos nas bordas (efeito das bordas).

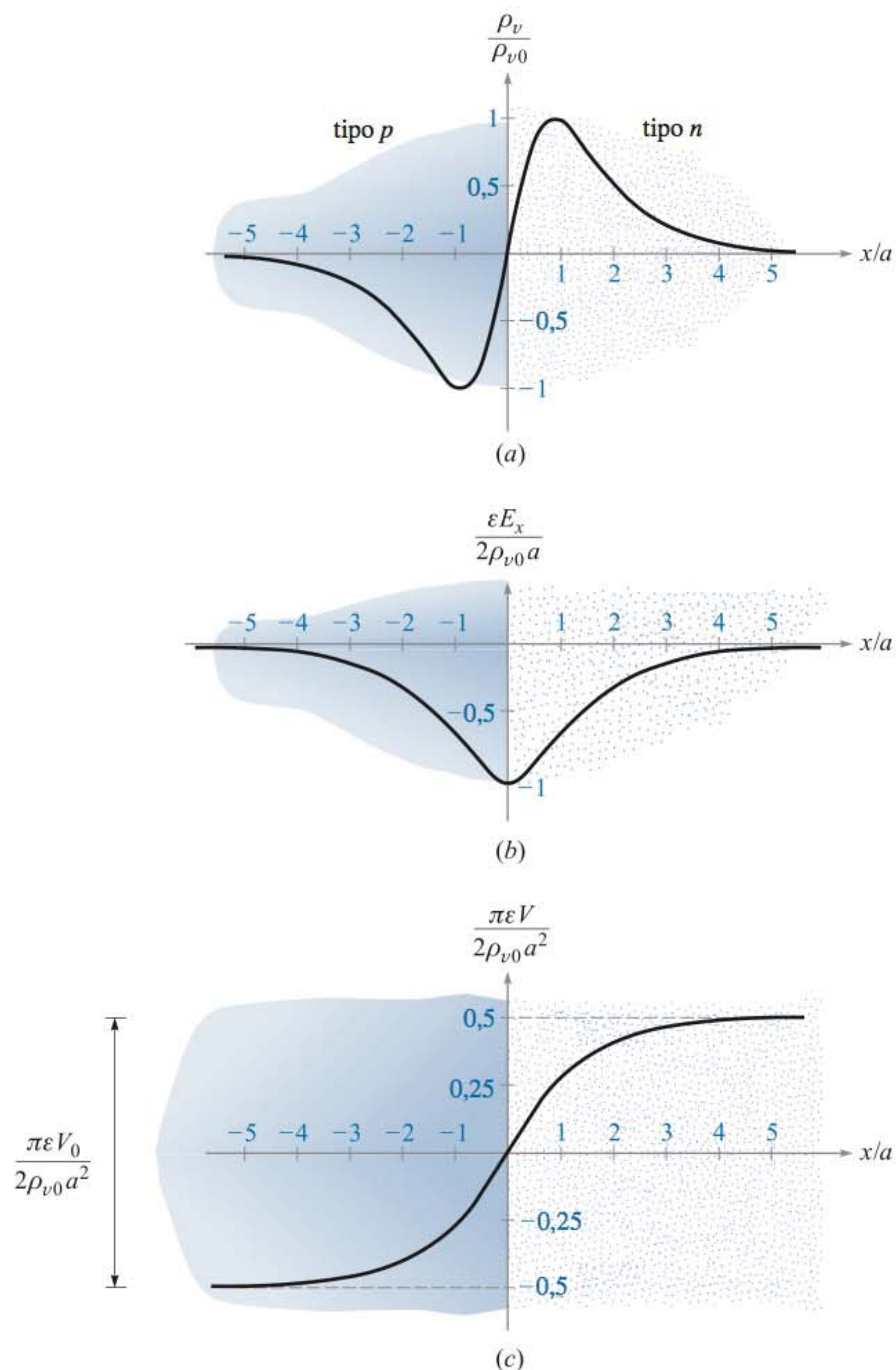



Figura 6.12 (*a*) A densidade de carga, (*b*) a intensidade de campo elétrico, e (*c*) o potencial são mostrados para uma junção *pn* como funções da distância ao centro da junção. O material do tipo *p* está na esquerda, e o do tipo *n* está na direita.

cuja densidade de carga máxima é $\rho_{v,\max} = \rho_{v0}$ em $x = 0{,}881a$. A máxima densidade de carga ρ_{v0} está relacionada com as concentrações de receptores e doadores representados por N_a e N_d*, respectivamente; note que de todos os íons doadores e receptores nessa região (a camada de depleção) foram arrancados um elétron ou uma lacuna; assim,

$$\rho_{v0} = eN_a = eN_d$$

* N. de T.: O subscrito "a" refere-se ao termo *acceptor,* e o "d" refere-se a *donor*.

Vamos agora resolver a equação de Poisson,

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$$

sujeita à distribuição de cargas considerada anteriormente,

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{2\rho_{v0}}{\epsilon}\text{sech}\,\frac{x}{a}\,\text{tgh}\,\frac{x}{a}$$

nesse problema unidimensional no qual variações com y e z não estão presentes. Integramos uma vez,

$$\frac{dV}{dx} = \frac{2\rho_{v0}a}{\epsilon}\,\text{sech}\,\frac{x}{a} + C_1$$

e obtemos a intensidade de campo elétrico,

$$E_x = -\frac{2\rho_{v0}a}{\epsilon}\,\text{sech}\,\frac{x}{a} - C_1$$

Para calcular a constante de integração C_1, notamos que nenhuma densidade líquida de carga e nenhum campo podem existir *longe* da junção. Logo, à medida que $x \to \pm\infty$, E_x deve se aproximar de zero. Logo, $C_1 = 0$, e

$$E_x = -\frac{2\rho_{v0}a}{\epsilon}\,\text{sech}\,\frac{x}{a} \tag{45}$$

Integrando novamente,

$$V = \frac{4\rho_{v0}a^2}{\epsilon}\,\text{tg}^{-1}\,e^{x/a} + C_2$$

Vamos, arbitrariamente, selecionar nossa referência de potencial zero no centro da junção, $x = 0$,

$$0 = \frac{4\rho_{v0}a^2}{\epsilon}\,\frac{\pi}{4} + C_2$$

e, finalmente

$$V = \frac{4\rho_{v0}a^2}{\epsilon}\left(\text{tg}^{-1}\,e^{x/a} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{46}$$

A Figura 6.12 mostra a distribuição de carga (*a*), a intensidade de campo elétrico (*b*), e o potencial (*c*), conforme dados pelas Equações (44), (45) e (46), respectivamente.

O potencial é constante se estivermos a uma distância de aproximadamente $4a$ ou $5a$ da junção. A diferença de potencial total V_0 através da junção é obtida da Equação (46),

$$V_0 = V_{x\to\infty} - V_{x\to-\infty} = \frac{2\pi\rho_{v0}a^2}{\epsilon} \tag{47}$$

Essa expressão sugere a possibilidade de determinar a carga total em um lado da junção e depois utilizar a Equação (47) para achar a capacitância da junção. A carga positiva total é

$$Q = S\int_0^{\infty} 2\rho_{v0}\text{sech}\,\frac{x}{a}\,\text{tgh}\,\frac{x}{a}\,dx = 2\rho_{v0}aS$$

onde S é a área da seção reta da junção. Se utilizarmos a Equação (47) para eliminar o parâmetro de distância a, a carga se torna

$$Q = S\sqrt{\frac{2\rho_{v0}\epsilon V_0}{\pi}} \tag{48}$$

Uma vez que a carga total é função da diferença de potencial, temos que ser cuidadosos na definição da capacitância. Considerando livremente a noção de "circuito",

$$I = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dV_0}{dt}$$

e, logo,

$$C = \frac{dQ}{dV_0}$$

Diferenciando a Equação (48) temos, portanto, a capacitância

$$C = \sqrt{\frac{\rho_{v0}\epsilon}{2\pi V_0}}S = \frac{\epsilon S}{2\pi a} \tag{49}$$

A primeira forma da Equação (49) mostra que a capacitância varia inversamente com a raiz quadrada da tensão. Isto é, uma tensão mais alta causa uma maior separação entre as camadas de cargas e uma menor capacitância. A segunda forma é interessante na medida em que indica que devemos pensar na junção como um capacitor de placas paralelas com separação entre as "placas" de $2\pi a$. Em vista das dimensões da região na qual a carga está concentrada, esse é um resultado lógico.

A equação de Poisson se aplica a qualquer problema que envolve densidade volumétrica de carga. Além de modelos de diodos semicondutores e transistores, observamos que tubos de vácuos, conversão de energia magnetoidrodinâmica e propulsão iônica requerem seu uso para a construção de teorias satisfatórias.

EP6.7. Na vizinhança de certa junção semicondutora, a densidade volumétrica de carga é dada por $\rho_v = 750 \text{ sech } 10^6\pi x \text{ tgh } 10^6\pi x \text{ C/m}^3$. A constante dielétrica do material semicondutor é 10 e a área da junção é 2×10^{-7} m^2. Encontre: (*a*) V_0; (*b*) C; (*c*) E na junção.

Resp. 2,70 V; 8,85 pF; 2,70 MV/m

EP6.8. Dada a densidade volumétrica de carga $\rho_v = -2 \times 10^7\epsilon_0\sqrt{x}$ C/m^3 no espaço livre, seja $V = 0$ em $x = 0$ e $V = 2$ V em $x = 2{,}5$ mm. Em $x = 1$ mm, calcule: (*a*) V; (*b*) E_x.

Resp. 0,302 V; −555 V/m.

REFERÊNCIAS

1. Matsch, L. W. *Capacitors, Magnetic Circuits, and Transformers*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1964. Muitos dos aspectos práticos sobre capacitores são discutidos no Capítulo 2.
2. Ramo, S., J. R. Whinnery, and T. Van Duzer. *Fields and Waves in Communications Electronics*. 3. ed. New York: John Wiley & Sons, 1994. Este texto clássico é principalmente direcionado a estudantes que estão iniciando a pós-graduação, mas a sua leitura pode ser de interesse para qualquer um que tenha familiaridade com conceitos básicos de eletromagnetismo. Desenhos por quadrados curvilíneos são discutidos nas páginas 50-52. Uma discussão mais avançada de métodos de solução da equação de Laplace é fornecida no Capítulo 7.
3. Dekker, A. J. Ver Referências do Capítulo 5.
4. Hayt, W. H., Jr., and J. E. Kemmerly. *Engineering Circuit Analysis*. 5. ed. New York: McGraw-Hill, 1993.
5. Collin, R. E. and R. E. Plonsey. *Principles and Applications of Electromagnetic Fields*. New York: McGraw-Hill, 1961. Fornece um excelente tratamento de métodos de solução das equações de Laplace e de Poisson.
6. Smythe, W. R. *Static and Dynamic Electricity*. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 1968. Um tratamento avançado da teoria de potencial é dado no Capítulo 4.

WWW Quizzes

PROBLEMAS

6.1 Considere um cabo coaxial com raio interno a, raio externo b, comprimento unitário e preenchido com um material de constante dielétrica ϵ_r. Compare este dispositivo a um capacitor de placas paralelas, onde cada placa tem largura w e separação entre as placas igual a d, além de ser preenchido com o mesmo dielétrico e possuir comprimento unitário. Expresse a razão b/a considerando a razão d/w, de tal modo que as duas estruturas armazenem a mesma energia para uma dada tensão aplicada.

6.2 Seja $S = 100\ \text{mm}^2$, $d = 3$ mm e $\epsilon_r = 12$ para um capacitor de placas paralelas. (*a*) Calcule a capacitância. (*b*) Após conectar uma bateria de 6V no capacitor, calcule E, D, Q e a energia eletrostática total armazenada. (*c*) Com a fonte ainda conectada, o dielétrico é cuidadosamente retirado da região entre as placas. Sem dielétrico, recalcule E, D, Q e a energia armazenada no capacitor. (*d*) A carga e a energia encontradas na parte (*c*) são menores que os respectivos valores encontrados na parte (*b*), como você já deve ter descoberto; então, o que foi feito da carga e da energia perdidas?

6.3 Os capacitores tendem a ser mais caros à medida que suas capacitâncias e tensões máximas, V_{max}, aumentam. A tensão V_{max} é limitada pela intensidade do campo na qual o dielétrico se rompe*, E_{BD}**. Determine qual desses dielétricos proporcionará o maior produto CV_{max}, considerando que as placas possuem áreas iguais: (*a*) ar: $\epsilon_r = 1$, $E_{BD} = 3$ MV/m; (*b*) titanato

---

* N. de T.: Isso significa dizer que o dielétrico, mesmo que localmente, sofre o processo de ionização, ou seja, perde suas características isolantes e começa a conduzir.

** N. de T.: O subscrito "BD" corresponde ao termo *dieletric break*, ou seja, a ruptura dielétrica.

de bário: $\epsilon_r = 1.200$, $E_{BD} = 3$ MV/m; (*c*) dióxido de silício: $\epsilon_r = 3{,}78$, $E_{BD} = 16$ MV/m; (*d*) polietileno: $\epsilon_r = 2{,}26$, $E_{BD} = 4{,}7$ MV/m.

6.4 Um capacitor de placas paralelas preenchido com ar, com separação d entre as placas, está conectado a uma bateria que aplica uma tensão V_0 entre as placas. Cada placa tem área A. Ainda com a bateria conectada, as placas são separadas a uma distância de $10d$. Determine por qual fator cada uma das seguintes grandezas muda: (*a*) V_0; (*b*) C; (*c*) E; (*d*) D; (*e*) Q; (*f*) ρ_S; (*g*) W_E.

6.5 Um capacitor de placas paralelas está preenchido com um dielétrico não uniforme caracterizado por $\epsilon_r = 2 + 2 \times 10^6 x^2$, onde x é a distância em relação a um placa em metros. Se $S = 0{,}02$ m^2 e $d = 1$ mm, calcule C.

6.6 Repita o Problema 6.4, considerando que a bateria é desconectada antes que a separação entre as placas seja aumentada.

6.7 Seja $\epsilon_{r1} = 2{,}5$ para $0 < y < 1$ mm, $\epsilon_{r2} = 4$ para $1 < y < 3$ mm e ϵ_{r3} para $3 < y < 5$ mm (região 3). Superfícies condutoras estão presentes em $y = 0$ e $y = 5$ mm. Calcule a capacitância por metro quadrado de área da superfície se: (*a*) a região 3 for constituído de ar; (*b*) $\epsilon_{r3} = \epsilon_{r1}$; (*c*) $\epsilon_{r3} = \epsilon_{r2}$; (*d*) a região 3 for constituído de prata.

6.8 Um capacitor de placas paralelas é feito utilizando-se duas placas circulares de raio a, com a placa inferior no plano xy, centrada na origem. A placa superior está posicionada em $z = d$, com seu centro no eixo z. A placa superior está em um potencial V_0 e a placa inferior está aterrada. Um dielétrico que tem permissividade que *varia radialmente* preenche a região entre as placas. A permissividade é dada por $\epsilon(\rho) = \epsilon_0(1 + \rho^2/a^2)$. Calcule: (*a*) **E**; (*b*) **D**; (*c*) Q; (*d*) C.

6.9 Dois cilindros condutores coaxiais de raios 2 cm e 4 cm possuem um comprimento de 1 m. A região entre os cilindros contém uma camada de dielétrico de $\rho = c$ até $\rho = d$ com $\epsilon_r = 4$. Calcule a capacitância se (*a*) $c = 2$ cm, $d = 3$ cm; (*b*) $d = 4$ cm e o volume do dielétrico for o mesmo que na parte (*a*).

6.10 Um cabo coaxial tem condutores de dimensões $a = 1{,}0$ mm e $b = 2{,}7$ mm. O condutor interno é sustentado por espaçadores dielétricos ($\epsilon_r = 5$) na forma de arruelas. As dimensões dessas arruelas são as seguintes: furo de raio 1mm, raio externo de 2,7 mm e uma espessura de 3,0 mm. Os espaçadores estão localizados a cada 2 cm na parte de baixo do cabo. (*a*) Por qual fator os espaçadores aumentam a capacitância por unidade de comprimento? (*b*) Se 100 V for mantido no cabo, determine **E** em todos os pontos.

6.11 Duas cascas condutoras esféricas possuem raios $a = 3$ cm e $b = 6$ cm. O interior é um dielétrico perfeito para o qual $\epsilon_r = 8$. (*a*) Calcule C. (*b*) Remove-se uma porção do dielétrico de forma que $\epsilon_r = 1{,}0$, $0 < \phi < \pi/2$ e $\epsilon_r = 8$, $\pi/2 < \phi < 2\pi$. Calcule C novamente.

6.12 (*a*) Determine a capacitância de uma esfera condutora isolada de raio a no espaço livre (considere a existência de um condutor externo em $r \to \infty$). (*b*) A esfera é coberta com uma camada dielétrica de espessura d e constante dielétrica ϵ_r. Se $\epsilon_r = 3$, determine d considerando a, tal que a capacitância seja o dobro daquela da parte (*a*).

6.13 Considere a Figura 6.5. Seja $b = 6$ m, $h = 15$ m e o potencial do condutor equivalente a 250 V. Considere também $\epsilon = \epsilon_0$. Calcule os valores para K_1, ρ_L, a e C.

6.14 Dois condutores de cobre #16 (1,29 mm de diâmetro) são paralelos com uma separação d entre eixos. Determine d de forma que a capacitância entre fios no ar seja 30 pF/m.

6.15 Um condutor de 2 cm de diâmetro está suspenso no ar com seu eixo a 5 cm de um plano condutor. Seja o potencial do cilindro 100 V e o do plano 0 V. (*a*) Calcule a densidade superficial de carga no cilindro, no ponto mais próximo do plano. (*b*) Calcule a densidade superficial de carga no plano, no ponto mais próximo do cilindro. (*c*) Calcule a capacitância por unidade de comprimento.

6.16 Considere um arranjo de duas superfícies condutoras isoladas, de qualquer formato, que formam um capacitor. Use as definições de capacitância [Equação (2) neste capítulo] e resistência [Equação (14) no Capítulo 5] para mostrar que, quando a região entre os condutores é preenchida com material condutivo (condutividade σ) e com um dielétrico perfeito (permissividade ϵ), a resistência e a capacitância resultantes da estrutura são relacionadas por meio da fórmula simples $RC = \epsilon/\sigma$. Quais propriedades básicas relativas ao meio dielétrico e condutor devem ser verdadeiras para que esta fórmula permaneça válida?

6.17 Construa um mapa de quadrados curvilíneos para um capacitor coaxial de 3 cm de raio interno e 8 cm de raio externo. Essas dimensões estão adequadas para o desenho. (*a*) Use o seu esboço para calcular a capacitância por unidade de comprimento, considerando $\epsilon_r = 1$. (*b*) Calcule um valor exato para a capacitância por unidade de comprimento.

6.18 Construa um mapa de quadrados curvilíneos do campo potencial de dois cilindros circulares paralelos, cada um com 2,5 cm de raio, separados de centro a centro por uma distância de 13 cm. Essas dimensões estão razoáveis para o desenho real se simetria for considerada. Para checar, calcule a capacitância por metro, tanto pelo seu desenho quanto pela fórmula exata. Considere $\epsilon_r = 1$.

6.19 Construa um mapa de quadrados curvilíneos do campo potencial entre dois cilindros circulares paralelos, um com 4 cm de raio dentro de outro com 8 cm de raio. Os dois eixos estão separados por 2,5 cm. Essas dimensões estão adequadas para o desenho. Para checar, calcule a capacitância por metro, tanto pelo seu desenho quanto pela fórmula exata:

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\cosh^{-1}\left[(a^2 + b^2 - D^2)/(2ab)\right]}$$

onde a e b são os raios dos condutores e D é a separação dos eixos.

6.20 Um cilindro condutor sólido de 4 cm de raio está centrado dentro de um cilindro condutor retangular de seção reta de 12 cm por 20 cm. (*a*) Faça um esboço em tamanho real de um quadrante dessa configuração e construa um mapa de quadrados curvilíneos para seu interior. (*b*) Considere $\epsilon = \epsilon_0$ e estime C por unidade de comprimento.

6.21 O condutor interno da linha de transmissão mostrada na Figura 6.13 possui uma seção reta quadrada de $2a \times 2a$, enquanto o quadrado externo é $4a \times 5a$. Os eixos estão deslocados, conforme mostrado. (*a*) Construa um desenho de bom tamanho dessa linha de transmissão, digamos com $a = 2{,}5$ cm, e depois prepare um esboço de quadrados curvilíneos do campo eletrostático entre os condutores. (*b*) Use o mapa para calcular a capacitância por metro de comprimento se $\epsilon = 1{,}6\epsilon_0$. (*c*) Como seu resultado para a parte (*b*) mudaria se $a = 0{,}6$ cm?

6.22 Duas placas condutoras, cada uma de 3×6 cm, e três chapas de dielétrico, cada uma de $1 \times 3 \times 6$ cm, de constantes dielétricas 1, 2 e 3, são montadas em um capacitor de $d = 3$ cm. Determine os dois valores de capacitância obtidos pelos dois métodos possíveis de montagem do capacitor.

6.23 Uma linha de transmissão de dois fios consiste em dois cilindros paralelos, condutores perfeitos, cada um com um raio de 0,2 mm, separados de centro a centro de uma distância de 2 mm. O meio que envolve os fios tem $\epsilon_r = 3$ e $\sigma = 1{,}5$ mS/m. Uma bateria de 100 V é conectada entre os fios. (*a*) Calcule a magnitude da carga por metro de comprimento em cada fio; (*b*) Usando o resultado do Problema 6.16, encontre a corrente da bateria.

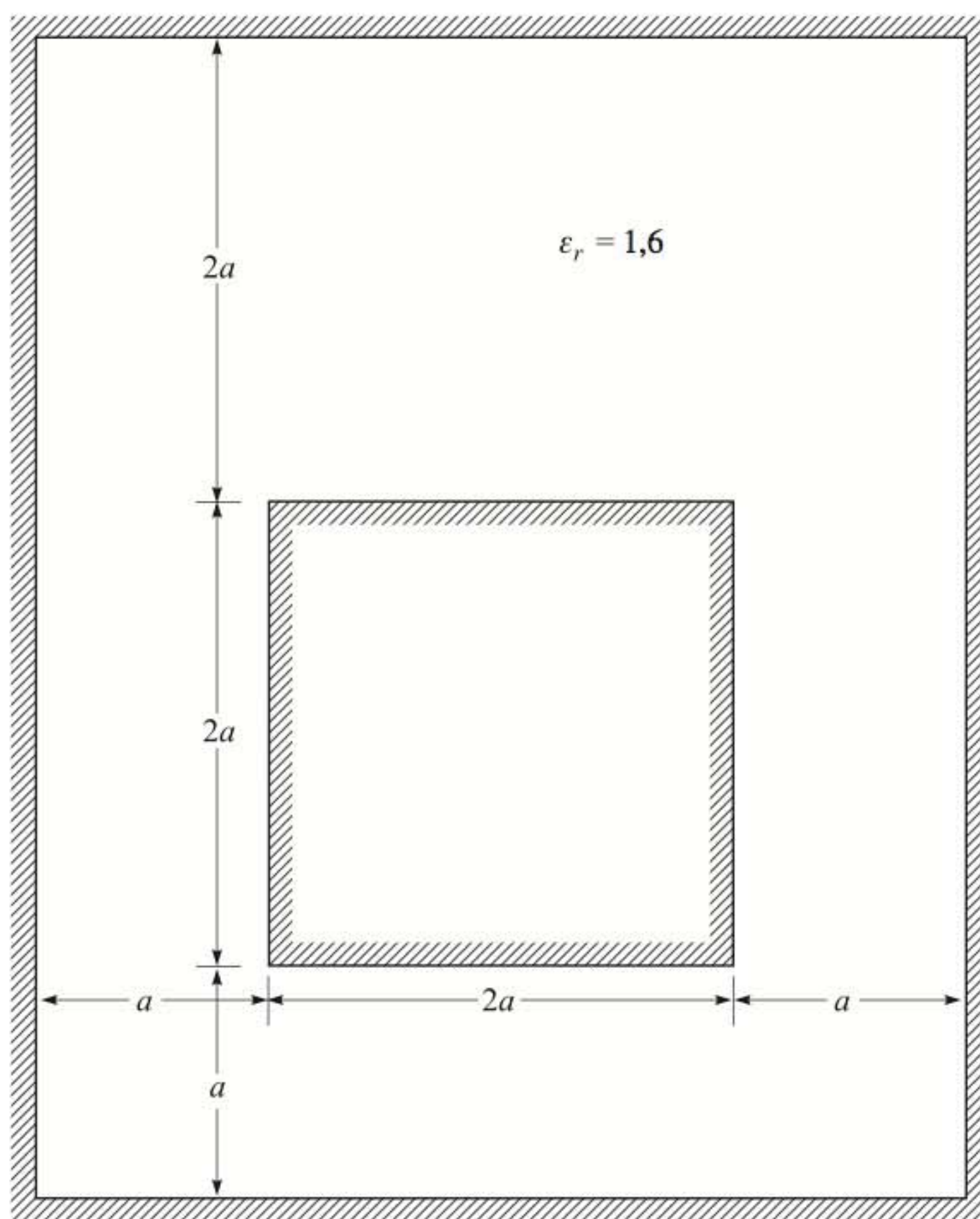



Figura 6.13 Ver Problema 6.21.

6.24 Um campo potencial, no espaço livre, é dado em coordenadas esféricas como

$$V(r) = \begin{cases} [\rho_0/(6\epsilon_0)]\,[3a^2 - r^2] & (r \le a) \\ (a^3\rho_0)/(3\epsilon_0 r) & (r \ge a) \end{cases}$$

onde ρ_0 e a são constantes. (*a*) Use a equação de Poisson para encontrar a densidade volumétrica de carga em toda a parte. (*b*) Determine a carga total presente.

6.25 Seja $V = 2xy^2z^3$ e $\epsilon = \epsilon_0$. Dado o ponto $P(1, 2, -1)$, calcule: (*a*) V em P; (*b*) **E** em P; (*c*) ρ_v em P; (*d*) a equação da superfície equipotencial que passa por P; (*e*) a equação da linha de força que passa por P. (*f*) V satisfaz a equação de Laplace?

6.26 Dado o campo potencial, esfericamente simétrico, no espaço livre, $V = V_0 e^{-r/a}$, calcule: (*a*) ρ_v em $r = a$; (*b*) o campo elétrico em $r = a$; (*c*) a carga total.

6.27 Seja $V(x, y) = 4e^{2x} + f(x) - 3y^2$ na região do espaço livre onde $\rho_v = 0$. É sabido que ambos E_x e V são zero na origem. Encontre $f(x)$ e $V(x, y)$.

6.28 Mostre que, em um meio homogêneo de condutividade σ, o campo potencial V satisfaz a equação de Laplace, se qualquer densidade volumétrica de carga presente não variar com o tempo.

6.29 Dado o campo potencial $V = (A\rho^4 + B\rho^{-4})$ sen 4ϕ: (*a*) Mostre que $\nabla^2 V = 0$. (*b*) Selecione A e B de forma que $V = 100$ V e $|\mathbf{E}| = 500$ V/m em P($\rho = 1$, $\phi = 22{,}5°$, $z = 2$).

6.30 Um capacitor de placas paralelas tem placas posicionadas em $z = 0$ e $z = d$. A região entre as placas é preenchida com um material que contém carga volumétrica de densidade uniforme ρ_0 C/m^3 e tem permissividade ϵ. Ambas as placas são mantidas no potencial de terra. (*a*) Determine o campo potencial entre as placas. (*b*) Determine a intensidade de campo elétrico **E** entre as placas. (*c*) Repita as partes (*a*) e (*b*) se o potencial da placa em $z = d$ for aumentado para V_0, com a placa em $z = 0$ aterrada.

6.31 Seja $V = (\cos 2\phi)/\rho$ no espaço livre. (*a*) Calcule a densidade volumétrica de carga no ponto $A(0{,}5, 60°, 1)$. (*b*) Encontre a densidade superficial de carga na superfície de um condutor que passa pelo ponto $B(2, 30°, 1)$.

6.32 Uma carga volumétrica uniforme tem densidade constante $\rho_v = \rho_0$ C/m^3 e preenche a região $r < a$, na qual a permissividade ϵ é considerada. Uma casca condutora esférica está posicionada em $r = a$ e é mantida no potencial de terra. Calcule: (*a*) o potencial em todos os pontos; (*b*) a intensidade de campo elétrico **E** em todos os pontos.

6.33 As funções $V_1(\rho, \phi, z)$ e $V_2(\rho, \phi, z)$ satisfazem a equação de Laplace na região $a < \rho < $ b, $0 \le \phi < 2\pi$, $-L < z < L$. Cada uma vale zero nas superfícies $\rho = b$ para $-L < z < L$; $z = -L$ para $a < \rho < b$ e $z = L$ para $a < \rho < b$. E cada uma vale 100 V na superfície $\rho = a$ para $-L < z < L$. (*a*) Na região especificada, a equação de Laplace é satisfeita pelas funções

$V_1 + V_2$, $V_1 - V_2$, $V_1 + 3$ e V_1V_2? (*b*) Na fronteira das superfícies especificadas, os valores de potencial dados neste problema são obtidos das funções $V_1 + V_2$, $V_1 - V_2$, $V_1 + 3$ e $V_1 V_2$? (*c*) As funções $V_1 + V_2$, $V_1 - V_2$, $V_1 + 3$ e $V_1 V_2$ são idênticas a V_1?

6.34 Considere o capacitor de placas paralelas do Problema 6.30, mas dessa vez admita que o dielétrico carregado existe apenas entre $z = 0$ e $z = b$, onde $b < d$. Espaço livre preenche a região $b < z < d$. Ambas as placas estão no potencial de terra. Resolvendo as equações de Laplace e de Poisson, calcule: (*a*) $V(z)$ para $0 < z < d$; (*b*) A intensidade de campo elétrico para $0 < z < d$. Nenhuma carga superficial existem em $z = b$, então V e $\mathbf{D}$ são contínuos no plano $z = b$.

6.35 Os planos condutores $2x + 3y = 12$ e $2x + 3y = 18$ estão nos potenciais 100 V e 0, respectivamente. Considere $\epsilon = \epsilon_0$ e calcule: (*a*) V em $P(5, 2, 6)$; (*b*) $\mathbf{E}$ em P.

6.36 A dedução das equações de Laplace e de Poisson consideram uma permissividade constante, mas existem casos de variação espacial da permissividade nos quais as equações ainda se aplicam. Considere a identidade vetorial $\nabla \cdot (\psi\, \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \nabla\psi + \psi\nabla \cdot \mathbf{G}$, onde ψ e $\mathbf{G}$ são funções escalar e vetorial, respectivamente. Determine uma regra geral nas *direções* permitidas, nas quais pode variar com relação ao campo elétrico local.

6.37 Cilindros condutores coaxiais estão posicionados em $\rho = 0{,}5$ cm e $\rho = 1{,}2$ cm. A região entre os cilindros é preenchida com um dielétrico perfeito homogêneo. Se o cilindro interno está em 100 V e o externo a 0 V, calcule: (*a*) a localização da superfície equipotencial de 20 V; (*b*) $E_{\rho\,\max}$; (*c*) ϵ_r se a carga por metro de comprimento no cilindro interno vale 20 nC/m.

6.38 Repita o Problema 6.37, mas com o dielétrico preenchendo apenas parte do volume, dentro de $0 < \phi < \pi$, e com espaço livre no volume restante.

6.39 Os dois condutores planos ilustrados na Figura 6.14 são definidos por $0{,}001 < \rho < 0{,}120$ m, $0 < z < 0{,}1$ m, $\phi = 0{,}179$ e $0{,}188$ rad. O meio que circunda os planos é o ar. Para a Região 1, $0{,}179 < \phi < 0{,}188$; despreze a existência de irregularidades nos campos e calcule: (*a*) $V(\phi)$; (*b*) $\mathbf{E}(\rho)$; (*c*) $\mathbf{D}(\rho)$; (*d*) ρ_s na superfície superior do plano inferior; (*e*) Q na superfície superior do plano inferior; (*f*) Repita as partes de (*a*) a (*c*) para a Região 2, tornando a localização do plano superior por $\phi = 0{,}188 - 2\pi$, e então encontre ρ_s e Q na superfície inferior do plano inferior; (*g*) Calcule a carga total no plano inferior e a capacitância entre os planos.

6.40 Um capacitor de placas paralelas é construído usando duas placas circulares de raio a, com a placa inferior no plano xy, centrada na origem. A placa superior está posicionada em $z = d$, com seu centro no eixo z. O potencial V_0 está na placa superior; a placa inferior está aterrada. Um dielétrico que possui permissividade *radialmente dependente* preenche a região entre as placas. A permissividade é dada por $\epsilon(\rho) = \epsilon_0(1 + \rho^2/a^2)$. Calcule: (*a*) $V(z)$; (*b*) $\mathbf{E}$; (*c*) Q; (*d*) C. Essa é uma repetição do Problema 6.8, mas começa com a equação de Laplace.

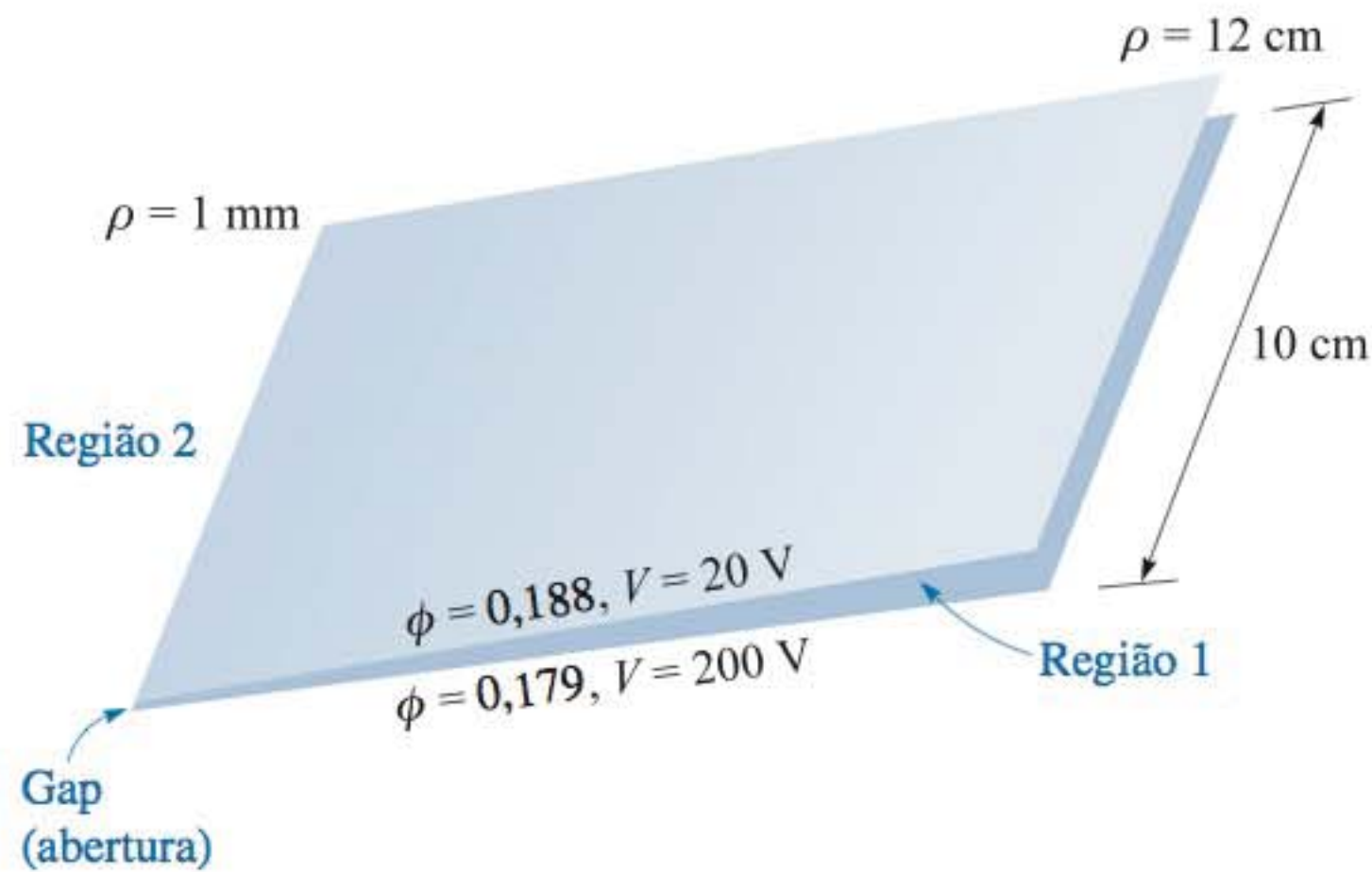



Figura 6.14 Ver Problema 6.39.

6.41 Esferas condutoras concêntricas estão posicionadas em $r = 5$ mm e $r = 20$ mm. A região entre as esferas está preenchida com um dielétrico perfeito. Se a esfera interna está em 100 V e a esfera externa está a 0 V: (*a*) Encontre a localização da superfície equipotencial de 20 V. (*b*) Encontre $E_{r,\,\max}$. (*c*) Encontre ϵ_r se a densidade superficial de carga na esfera interna é $1{,}0\ \mu\text{C/m}^2$.

6.42 O hemisfério $0 < r < a$, $0 < \theta < \pi/2$ é composto de material condutor homogêneo de condutividade σ. O lado plano do hemisfério apoia-se em um plano perfeitamente condutor. Agora, o material dentro da região cônica $0 < \theta < \alpha$, $0 < r < a$ é retirado e substituído por um material que é perfeitamente condutor. Um *gap* (separação) de ar é mantido entre a ponta $r = 0$ desse novo material e o plano. Qual resistência é medida entre os dois condutores perfeitos? Despreze a existência de irregularidades no campo.

6.43 Dois cones condutores coaxiais possuem seus vértices na origem e eixos coincidentes com o eixo z. O cone A tem o ponto $A(1, 0, 2)$ na sua superfície, enquanto o cone B tem o ponto $B(0, 3, 2)$ na sua superfície. Seja $V_A = 100$ V e $V_B = 20$ V. Calcule: (*a*) α para cada cone; (*b*) V em $P(1, 1, 1)$.

6.44 Um campo potencial no espaço livre é dado como $V = 100 \ln \text{tg}(\theta/2) + 50$ V. (*a*) Calcule o máximo valor de $|\mathbf{E}_\theta|$ na superfície $\theta = 40°$ para $0{,}1 < r < 0{,}8$ m, $60° < \phi < 90°$. (*b*) Descreva a superfície $V = 80$ V.

6.45 No espaço livre, seja $\rho_v = 200\epsilon_0/r^{2,4}$. (*a*) Use a equação de Poisson para encontrar $V(r)$ considerando que $r^2E_r \to 0$ quando $r \to 0$, e também que $V \to 0$ à medida que $r \to \infty$. (*b*) Agora encontre $V(r)$ usando a lei de Gauss e uma integral de linha.

6.46 Por meio de uma solução apropriada para as equações de Laplace *e* de Poisson, determine o potencial absoluto no centro de uma esfera de raio a, que contém uma carga volumétrica uniforme de densidade ρ_0. Considere permissividade ϵ_0 em todos os pontos. *Dica*: O que deve ser verdadeiro com relação ao potencial e ao campo elétrico em $r = 0$ e em $r = a$?

7

Campo Magnético Estacionário

A esta altura, o conceito de campo já deve ser algo familiar. Depois que aceitamos a lei experimental de forças que existem entre duas cargas pontuais e definimos a intensidade de campo elétrico como a força por unidade de carga em uma carga de teste na presença de uma segunda carga, discutimos numerosos campos. Esses campos não possuem base física real, pois medições físicas sempre consideram as forças nas cargas nos equipamentos de detecção. Aquelas cargas que são a fonte causam forças mensuráveis que são exercidas em outras cargas, as quais designamos como cargas detectoras. O fato de atribuirmos um campo às cargas fonte e então determinarmos o efeito desse campo nas cargas detectoras, corresponde simplesmente a uma divisão do problema básico em duas partes, feita por conveniência.

Vamos começar nosso estudo de campos magnéticos com uma definição do próprio campo magnético e mostrar como ele é gerado por uma distribuição de corrente. O efeito desse campo em outras correntes, ou a segunda metade do problema físico, será discutido no Capítulo 8. Conforme fizemos com o campo elétrico, vamos confinar nossa atenção inicial às condições de espaço livre; o efeito dos meios materiais será também reservado para discussão no Capítulo 8.

A relação do campo magnético estacionário com sua fonte é mais complicada que a relação do campo eletrostático com sua fonte. Às vezes é necessário, pelo menos temporariamente, aceitar "com fé" diversas leis. As provas das leis realmente existem e estão disponíveis para os descrentes ou para o estudante mais avançado*. ■

7.1 LEI DE BIOT-SAVART

A fonte do campo magnético estacionário pode ser um ímã permanente, um campo elétrico variando linearmente com o tempo ou uma corrente contínua. Vamos, de uma forma geral, ignorar o ímã permanente e deixar o campo elétrico variante no tempo para uma discussão futura. Nossas relações presentes estarão relacionadas ao campo magnético produzido por um elemento diferencial de corrente contínua no espaço livre.

---

* N. de T.: Tais provas são apresentadas, por exemplo, na Seção 7.7 (última seção deste capítulo).

Podemos pensar nesse elemento diferencial de corrente como uma seção muito pequena de um condutor filamentar de corrente, onde um condutor filamentar é o caso-limite de um condutor cilíndrico de seção reta circular cujo raio tende a zero. Consideremos uma corrente I circulando em um comprimento diferencial vetorial do filamento, $d\mathbf{L}$. A lei de Biot-Savart[1] determina que, em qualquer ponto P, o valor absoluto da intensidade de campo magnético, produzido pelo elemento diferencial, é proporcional ao produto entre a corrente, a intensidade do comprimento diferencial e o seno do ângulo existente entre o filamento e a reta que conecta o filamento ao ponto P no qual o campo é desejado. Além disso, o valor absoluto da intensidade de campo magnético é inversamente proporcional ao quadrado da distância do elemento diferencial ao ponto P. A direção da intensidade de campo magnético é normal ao plano que contém o filamento diferencial e a linha desenhada do filamento ao ponto P. Das duas normais possíveis, a escolhida é aquela que está no sentido de progressão de um parafuso dextrogiro que é girado, pelo ângulo mais curto, de $d\mathbf{L}$ até a reta que liga o filamento a P. Utilizando as unidades mks, a constante de proporcionalidade é $1/4\pi$.

A *lei de Biot-Savart*, que acaba de ser descrita em aproximadamente 150 palavras, pode ser escrita de forma concisa utilizando notação vetorial:

$$d\mathbf{H} = \frac{I\,d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} = \frac{I\,d\mathbf{L} \times \mathbf{R}}{4\pi R^3} \tag{1}$$

As unidades da *intensidade de campo magnético* $\mathbf{H}$ são, evidentemente, ampères por metro (A/m). A geometria é ilustrada na Figura 7.1. Subscritos podem ser utilizados para indicar o ponto ao qual cada uma das grandezas na Equação (1) se refere. Se posicionarmos o elemento de corrente no ponto 1 e descrevermos o ponto P, no qual o campo deve ser determinado, como ponto 2, então*

$$d\mathbf{H}_2 = \frac{I_1 d\mathbf{L}_1 \times \mathbf{a}_{R12}}{4\pi R_{12}^2} \tag{2}$$

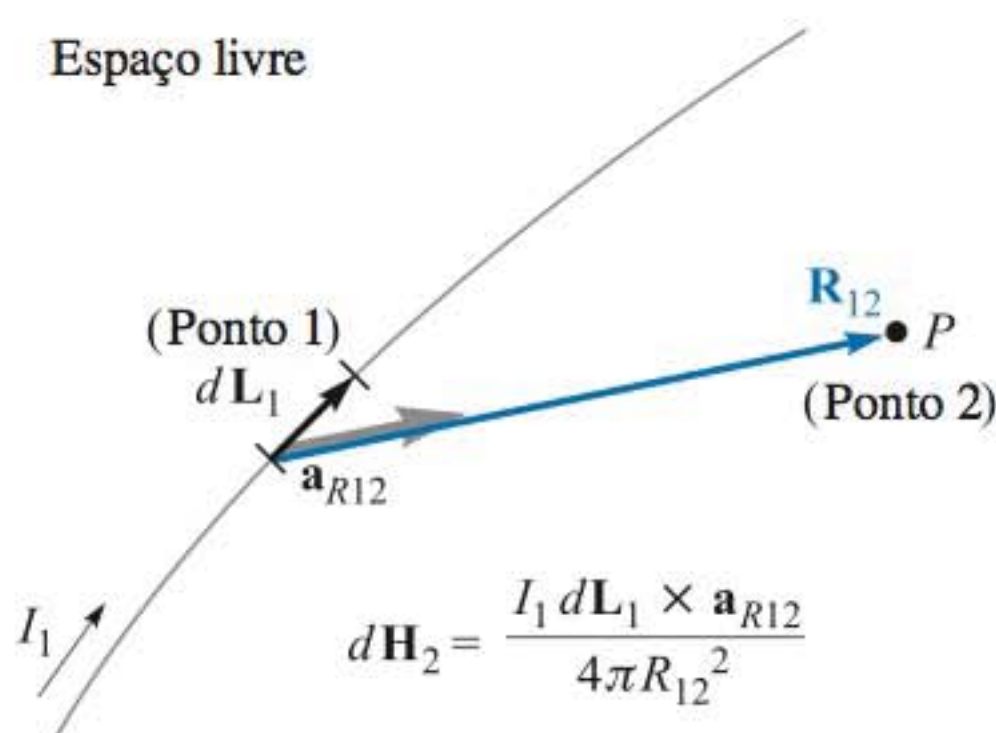



Figura 7.1 A lei de Biot-Savart expressa a intensidade de campo magnético $d\mathbf{H}_2$ produzido por um elemento diferencial de corrente $I_1 d\mathbf{L}_1$. A direção de $d\mathbf{H}_2$ é para dentro da página.

[1] Biot e Savart foram colegas de Ampère, e todos os três foram professores de Física no *Collège de France* em uma época ou outra. A lei de Biot-Savart foi proposta em 1820.

* N. de T.: Percebe-se, assim, que o sentido da intensidade de campo magnético pode ser alternativamente determinado pela "regra do tapa" entre $d\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{a}_{R12}$.

A lei de Biot-Savart é às vezes chamada de *lei de Ampère para o elemento de corrente*, mas vamos manter o primeiro nome para evitar uma possível confusão com a lei circuital de Ampère, a ser discutida posteriormente.

Em alguns aspectos, a lei de Biot-Savart se assemelha à lei de Coulomb, quando essa é escrita para um elemento diferencial de carga,

$$d\mathbf{E}_2 = \frac{dQ_1 \mathbf{a}_{R12}}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2}$$

Ambas apresentam uma relação com o inverso do quadrado da distância e mostram uma relação linear entre a fonte e o campo. A principal diferença aparece na direção e no sentido do campo.

É impossível verificar experimentalmente a lei de Biot-Savart conforme expressa pelas Equações (1) ou (2), porque o elemento diferencial de corrente não pode ser isolado. Restringimos nossa atenção a correntes contínuas apenas, de forma que a densidade de carga não é uma função do tempo. A equação da continuidade na Seção 5.2, Equação (5),

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

mostra portanto que

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

ou, após aplicar o teorema da divergência,

$$\oint_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

A corrente total que atravessa qualquer superfície fechada é zero, e essa condição pode ser satisfeita apenas se considerarmos uma circulação de corrente ao longo de um caminho fechado. É essa corrente circulando em um circuito fechado que deve ser nossa fonte experimental, e não o elemento diferencial.

Com isso, apenas a forma integral da lei de Biot-Savart pode ser verificada experimentalmente,

$$\mathbf{H} = \oint \frac{I\,d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} \tag{3}$$

As Equações (1) e (2), é claro, levam diretamente à forma integral da Equação (3), mas outras expressões diferenciais também levam à mesma formulação da integral. Qualquer termo cuja integral por um caminho fechado for zero pode ser adicionado à Equação (1). Isto equivale a dizer que qualquer campo conservativo pode ser adicionado à Equação (1). O gradiente de qualquer campo escalar sempre resulta em um campo conservativo, e poderíamos, portanto, adicionar o termo ∇G à Equação (1), onde G é um campo escalar genérico, sem modificar nem um pouco a Equação (3). Essa questão sobre as Equações (1) ou (2) é mencionada para mostrar que se mais tarde fizermos algumas perguntas absurdas, não sujeitas a nenhuma verificação experimental, com relação à força exercida por um elemento *diferencial* de corrente em outro, deveremos esperar por respostas absurdas.

A lei de Biot-Savart pode também ser expressa pelas fontes distribuídas, tal como a densidade de corrente **J** e a *densidade superficial de corrente* **K**. A corrente superficial circula em uma lâmina extremamente fina; portanto, a densidade de corrente **J**, medida em ampères por metro quadrado, é infinita. A densidade de corrente superficial, entretanto, é medida em ampères por metro de largura e é designada por **K**. Se a densidade de corrente superficial é uniforme, a corrente total I em qualquer largura b é

$$I = Kb$$

onde consideramos que a largura b é medida perpendicularmente à direção de circulação de corrente. A geometria é ilustrada pela Figura 7.2. Para uma densidade de corrente superficial não uniforme, uma integração é necessária:

$$I = \int K dN \tag{4}$$

onde dN é um elemento diferencial de caminho *por meio* do qual a corrente está circulando. Com isso, o elemento diferencial de corrente $I\,d\mathbf{L}$, onde $d\mathbf{L}$ está na direção da corrente, pode ser expresso pela densidade superficial de corrente **K** ou pela densidade de corrente **J**,

$$I\,d\mathbf{L} = \mathbf{K}\,dS = \mathbf{J}\,dv \tag{5}$$

e formas alternativas da lei de Biot-Savart podem ser obtidas,

$$\mathbf{H} = \int_s \frac{\mathbf{K} \times \mathbf{a}_R dS}{4\pi R^2} \tag{6}$$

e

$$\mathbf{H} = \int_{\text{vol}} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{a}_R dv}{4\pi R^2} \tag{7}$$

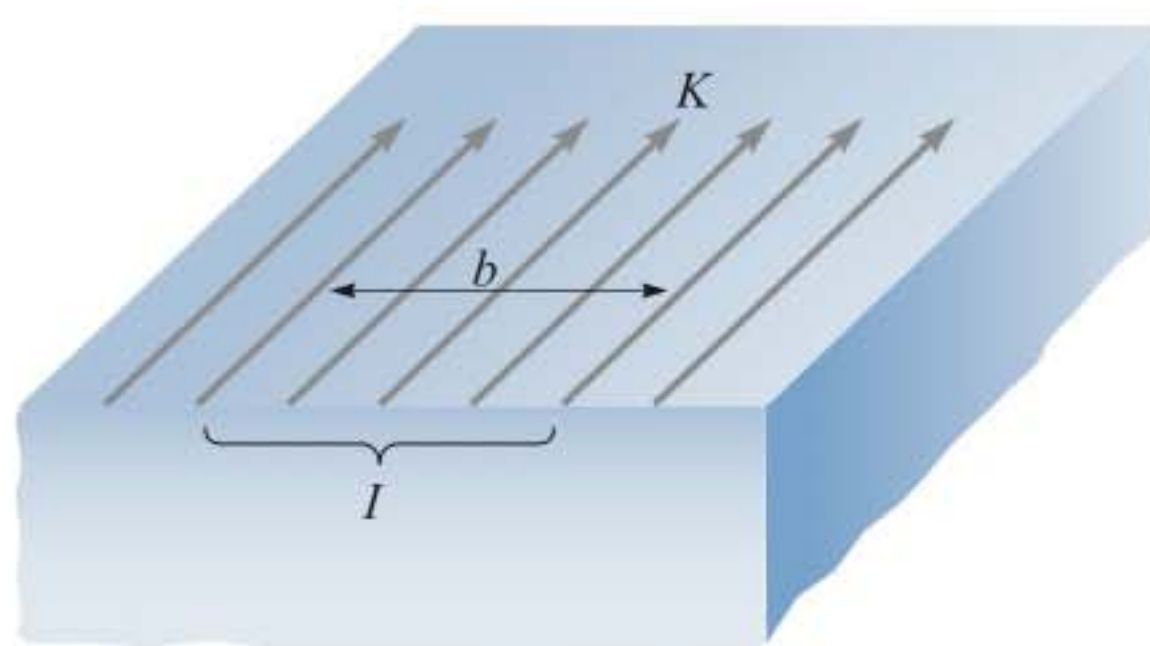



Figura 7.2 A corrente total I dentro de uma largura transversal b, na qual existe uma densidade superficial de corrente *uniforme* K, é Kb.

Podemos ilustrar a aplicação da lei de Biot-Savart considerando um filamento reto infinitamente longo. Primeiramente, vamos aplicar a Equação (2) e depois integrar. Isso, de fato, é o mesmo que utilizar a forma integral da Equação (3) de uma vez.[2]

Consideremos a Figura 7.3; devemos reconhecer aí a simetria do campo. Não pode existir variação com z ou com ϕ. O ponto 2, no qual deveremos determinar o campo, é desta forma escolhido no plano $z = 0$. O ponto de campo $\mathbf{r}$ é, assim, $\mathbf{r} = \rho\mathbf{a}_\rho$. O ponto fonte $\mathbf{r}'$ é dado por $\mathbf{r}' = z'\mathbf{a}_z$, e assim

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = \rho\mathbf{a}_\rho - z'\mathbf{a}_z$$

de forma que

$$\mathbf{a}_{R12} = \frac{\rho\mathbf{a}_\rho - z'\mathbf{a}_z}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}}$$

Tomamos $d\mathbf{L} = dz'\mathbf{a}_z$, e a Equação (2) se torna

$$d\mathbf{H}_2 = \frac{I\,dz'\mathbf{a}_z \times (\rho\mathbf{a}_\rho - z'\mathbf{a}_z)}{4\pi(\rho^2 + z'^2)^{3/2}}$$

Uma vez que a corrente está orientada na direção de valores crescentes de z', os limites são $-\infty$ e ∞ na integral, e temos

$$\mathbf{H}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I\,dz'\mathbf{a}_z \times (\rho\mathbf{a}_\rho - z'\mathbf{a}_z)}{4\pi(\rho^2 + z'^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho dz'\mathbf{a}_\phi}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}}$$

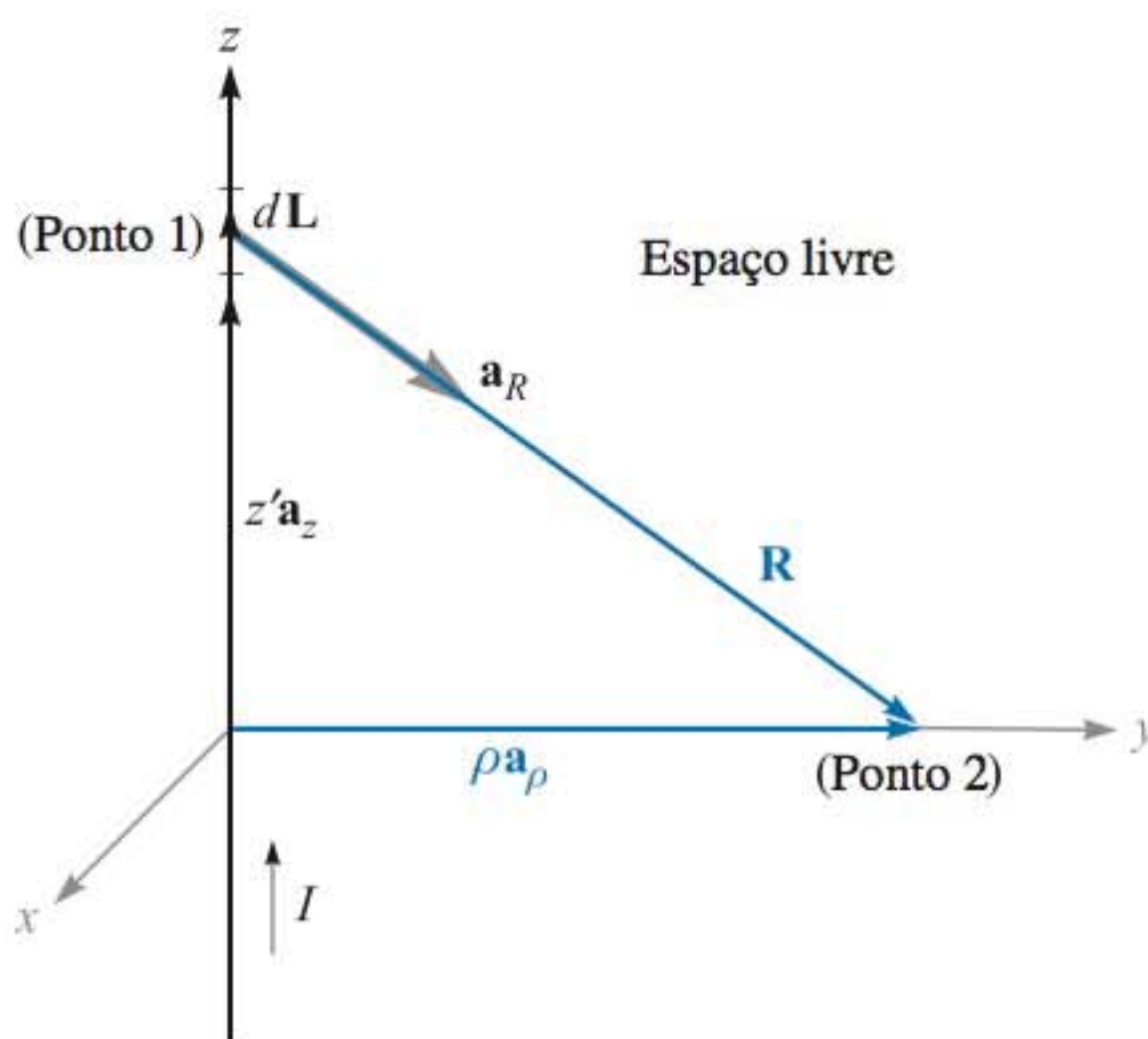



Figura 7.3 Um filamento reto infinitamente longo pelo qual circula uma corrente contínua I. O campo no ponto 2 é $\mathbf{H} = (I/2\pi\rho)\mathbf{a}_\phi$.

[2] Pode-se considerar que o caminho fechado para a corrente possui um filamento de retorno paralelo ao primeiro filamento e afastado deste de uma distância infinita. Um condutor coaxial externo de raio infinito é outra possibilidade teórica. Na prática, o problema é impossível de ocorrer, mas devemos perceber que nossa resposta será bastante exata perto de um fio reto muito fino que possua um caminho de retorno de corrente muito afastado.

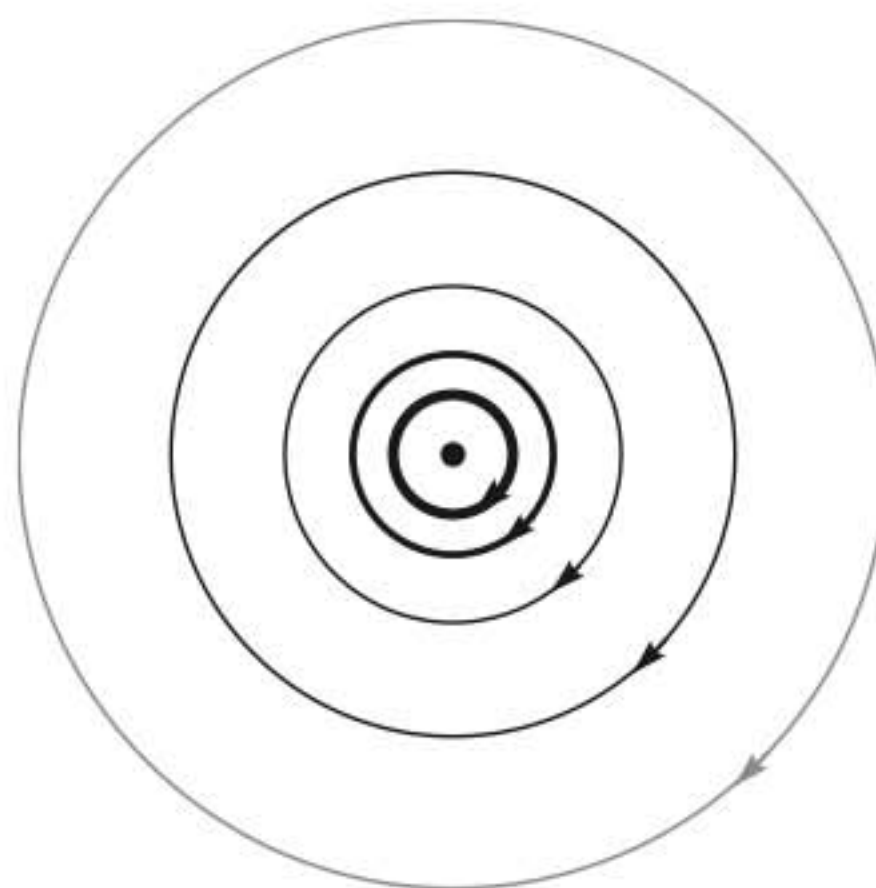



Figura 7.4 As linhas de força da intensidade de campo magnético em volta de um filamento reto infinitamente longo pelo qual circula uma corrente contínua I. O sentido de I é para dentro da página e sua direção é normal à mesma*.

Ilustração

Neste ponto, o vetor unitário $\mathbf{a}_\phi$ dentro do sinal de integração deve ser investigado, pois não é sempre constante como são os vetores unitários do sistema de coordenadas cartesianas. Um vetor é constante quando sua intensidade, direção e sentido são todos constantes. O vetor unitário certamente possui uma intensidade constante, mas sua direção e sentido variam. Neste caso, $\mathbf{a}_\phi$ muda com a coordenada ϕ mas não com ρ ou z. Felizmente, a integração aqui é com relação a z', e $\mathbf{a}_\phi$ é uma constante e pode ser removido de dentro do sinal de integração.

$$\mathbf{H}_2 = \frac{I\rho\mathbf{a}_\phi}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz'}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{I\rho\mathbf{a}_\phi}{4\pi}\left.\frac{z'}{\rho^2\sqrt{\rho^2 + z'^2}}\right|_{-\infty}^{\infty}$$

e

$$\boxed{\mathbf{H}_2 = \frac{I}{2\pi\rho}\mathbf{a}_\phi} \tag{8}$$

A intensidade do campo não é função de ϕ ou z, e varia inversamente com a distância ao filamento. A direção do vetor intensidade de campo magnético descreve uma circunferência. As linhas de força são, desta forma, círculos em volta do filamento, e o campo pode ser mapeado pela seção reta, conforme a Figura 7.4.

A separação entre as linhas de força é proporcional ao raio, ou inversamente proporcional à intensidade de **H**. Para ser específico, as linhas de força foram desenhadas com os quadrados curvilíneos em mente. Ainda não daremos um nome para a família de linhas[3] que são perpendiculares a essas linhas de força circulares, mas o espaça-

* N. de T.: Evidentemente, I é uma grandeza escalar. Assim sendo, o sentido e a direção fornecidos correspondem ao fluxo ordenado de cargas elétricas que constitui a corrente.

[3] Se você não quiser esperar, ver Seção 7.6.

mento das linhas de força foi ajustado de forma que a adição desse segundo conjunto de linhas produzirá um conjunto de quadrados curvilíneos.

Uma comparação da Figura 7.4 com o mapa do campo *elétrico* ao redor de uma linha infinita de *cargas* mostra que as linhas de força do campo magnético correspondem exatamente às equipotenciais do campo elétrico, e a família de linhas perpendiculares, ainda sem nome (e ainda não desenhada), no campo magnético corresponde às linhas de força do campo elétrico. Essa correspondência não é acidental, mas existem vários outros conceitos que devem ser esclarecidos antes que a analogia entre campos elétrico e magnético possa ser explorada mais profundamente.

Utilizar a lei de Biot-Savart para encontrar **H** é, em muitos aspectos, similar ao uso da lei de Coulomb para se encontrar **E**. Cada uma requer a determinação de um integrando moderadamente complicado que contém quantidades vetoriais, seguida de uma integração. Quando estávamos interessados na lei de Coulomb resolvemos um número de exemplos, incluindo os campos devidos a uma carga pontual, uma linha de cargas e uma lâmina de cargas. A lei de Biot-Savart pode ser utilizada para resolver problemas análogos com campos magnéticos, e alguns desses problemas aparecem como exercícios no final do capítulo, e não como exemplos no meio do texto.

Neste momento, seria útil analisar o campo de um elemento de corrente de comprimento finito mostrado na Figura 7.5. **H** é mais facilmente expresso pelos ângulos α_1 e α_2 (ver Problema 7.8 no final do capítulo), conforme mostra a figura. O resultado é

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi\rho}(\operatorname{sen}\alpha_2 - \operatorname{sen}\alpha_1)\mathbf{a}_\phi \tag{9}$$

Se uma ou ambas as extremidades estão abaixo do ponto 2, então α_1, ou ambos α_1 e α_2, são negativos.

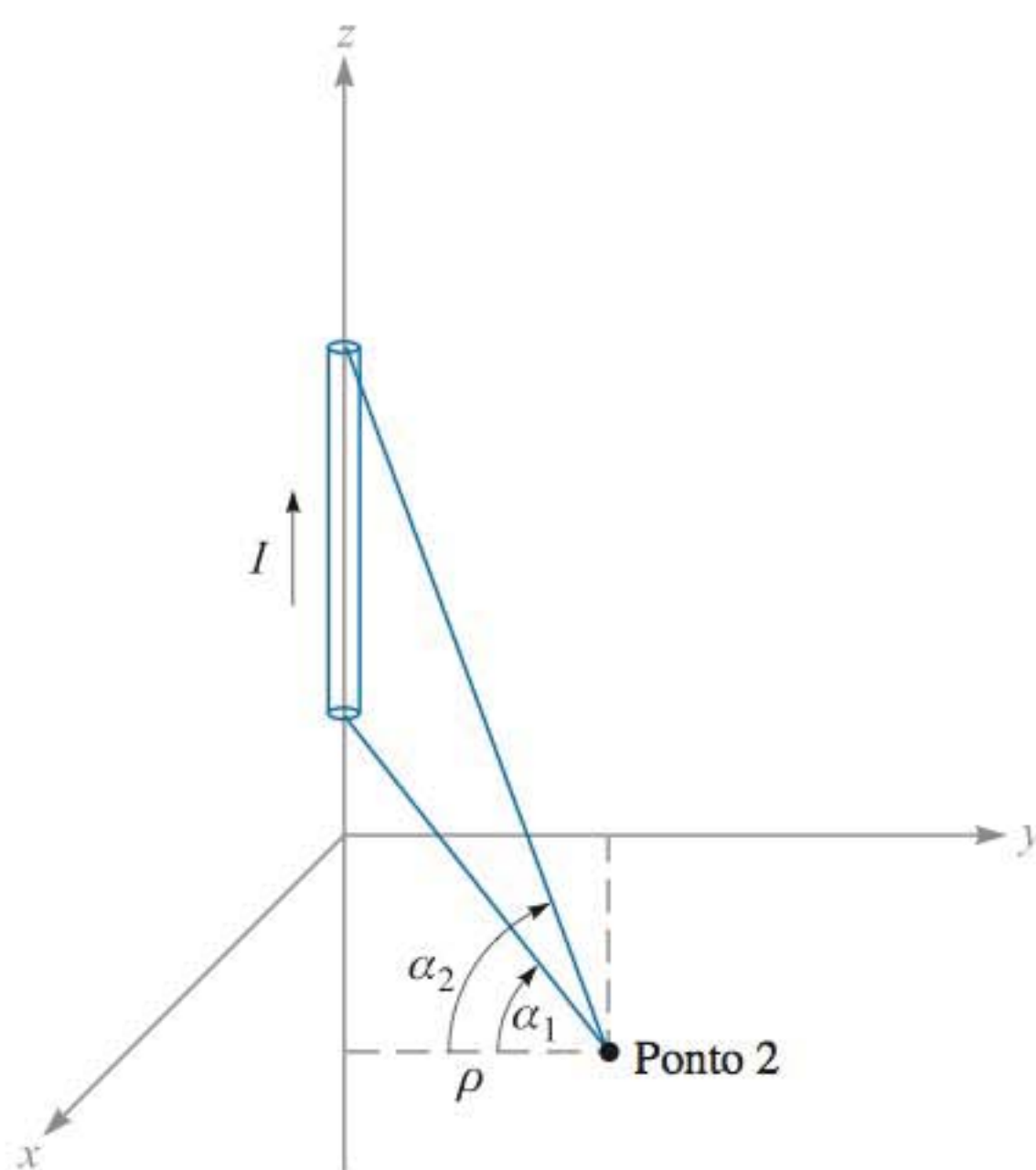



Figura 7.5 A intensidade de campo magnético causada por um filamento de corrente de comprimento finito no eixo z é $(I/4\pi\rho)(\operatorname{sen}\alpha_2 - \operatorname{sen}\alpha_1)\mathbf{a}_\phi$.

A Equação (9) pode ser utilizada para encontrar a intensidade de campo magnético causada por filamentos de corrente arranjados como uma sequência de segmentos de reta.

EXEMPLO 7.1

Como um exemplo numérico ilustrando o uso da Equação (9), vamos determinar **H** em $P_2(0{,}4,\ 0{,}3,\ 0)$ no campo de uma corrente filamentar de 8 A direcionada do infinito para a origem ao longo do eixo x positivo, e depois da origem para o infinito ao longo do eixo y. Esse arranjo é mostrado na Figura 7.6.

Solução. Primeiramente, consideramos a corrente semi-infinita no eixo x, identificando os dois ângulos $\alpha_{1x} = -90°$ e $\alpha_{2x} = \text{tg}^{-1}(0{,}4/0{,}3) = 53{,}1°$. A distância radial ρ é medida em relação ao eixo x, e temos $\rho_x = 0{,}3$. Logo, essa contribuição para $\mathbf{H}_2$ é

$$\mathbf{H}_{2(x)} = \frac{8}{4\pi(0{,}3)}(\text{sen}\,53{,}1° + 1)\mathbf{a}_\phi = \frac{2}{0{,}3\pi}(1{,}8)\mathbf{a}_\phi = \frac{12}{\pi}\mathbf{a}_\phi$$

O vetor unitário $\mathbf{a}_\phi$ também deve estar referido ao eixo x, e vemos que ele se torna $-\mathbf{a}_z$; logo,

$$\mathbf{H}_{2(x)} = -\frac{12}{\pi}\mathbf{a}_z \text{ A/m}$$

Para a corrente no eixo y, temos $\alpha_{1y} = -\text{tg}^{-1}(0{,}3/0{,}4) = -36{,}9°$, $\alpha_{2y} = 90°$, e $\rho_y = 0{,}4$. Segue então que

$$\mathbf{H}_{2(y)} = \frac{8}{4\pi(0{,}4)}(1 + \text{sen}\,36{,}9°)(-\mathbf{a}_z) = -\frac{8}{\pi}\mathbf{a}_z \text{ A/m}$$

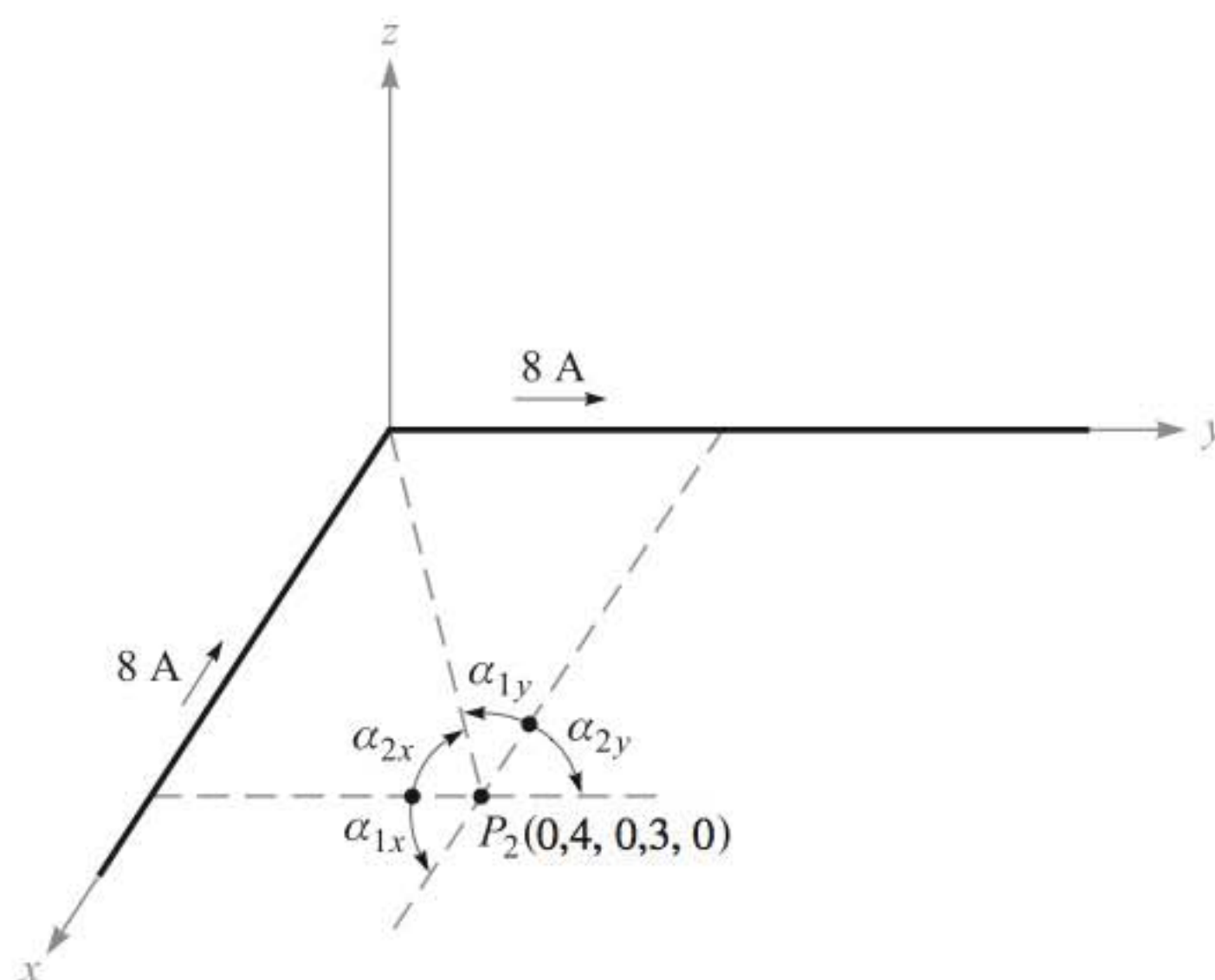



Figura 7.6 Os campos individuais dos dois segmentos de corrente semi-infinitos são encontrados pela Equação (9) e somados para se obter H_2 em P_2.

Somando esses resultados, temos

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_{2(x)} + \mathbf{H}_{2(y)} = -\frac{20}{\pi}\mathbf{a}_z = -6{,}37\mathbf{a}_z \text{ A/m}$$

EP7.1. Dados os seguintes valores para P_1, P_2 e $I_1\Delta L_1$, calcule $\Delta\mathbf{H}_2$: (*a*) $P_1(0, 0, 2)$, $P_2(4, 2, 0)$, $2\pi\mathbf{a}_z\mu$A·m; (*b*) $P_1(0, 2, 0)$, $P_2(4, 2, 3)$, $2\pi\mathbf{a}_z\mu$A·m; (*c*) $P_1(1, 2, 3)$, $P_2(-3, -1, 2)$, $2\pi(-\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z)\mu$A·m.

Resp. $-8{,}51\mathbf{a}_x + 17{,}01\mathbf{a}_y$ nA/m; $16\mathbf{a}_y$ nA/m; $18{,}9\mathbf{a}_x - 33{,}9\mathbf{a}_y + 26{,}4\,\mathbf{a}_z$ nA/m

EP7.2. Um filamento de corrente pelo qual passam 15 A na direção $\mathbf{a}_z$ se posiciona ao longo de todo eixo z. Calcule $\mathbf{H}$ em coordenadas cartesianas em: (*a*) $P_A(\sqrt{20}, 0, 4)$; (*b*) $P_B(2, -4, 4)$.

Resp. $0{,}534\mathbf{a}_y$ A/m; $0{,}477\mathbf{a}_x + 0{,}239\mathbf{a}_y$ A/m

7.2 LEI CIRCUITAL DE AMPÈRE

Após resolver certo número de problemas simples em eletrostática com a lei de Coulomb, descobrimos que os mesmos problemas poderiam ter sido resolvidos, de forma muito mais simples, usando a lei de Gauss sempre que um alto grau de simetria estivesse presente. Novamente, um procedimento análogo existe para os campos magnéticos. Neste caso, a lei que nos ajuda a resolver problemas de forma mais fácil é conhecida como *lei circuital de Ampère*, às vezes chamada de lei de Ampère do trabalho. Essa lei pode ser derivada da lei de Biot-Savart (ver Seção 7.7).

A lei circuital de Ampère determina que a integral de linha de $\mathbf{H}$ ao longo de qualquer caminho *fechado* é exatamente igual à corrente contínua envolvida pelo caminho,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I \tag{10}$$

Definimos corrente positiva como aquela que circula na direção do avanço de um parafuso dextrogiro que é girado na direção na qual o caminho fechado é percorrido.

Referindo-se à Figura 7.7, que mostra um fio circular pelo qual flui uma corrente contínua I, a integral de linha de $\mathbf{H}$ ao longo dos caminhos fechados a e b resulta na resposta I. A integral pelo caminho fechado c, que passa por meio do condutor, tem como resposta um valor menor que I e é exatamente aquela porção da corrente total que é envolvida pelo caminho c. Apesar dos caminhos a e b fornecerem a mesma resposta, os integrandos são, evidentemente, diferentes. A integral de linha nos leva a multiplicar o componente de $\mathbf{H}$ na direção do caminho por um pequeno incremento de comprimento em um ponto do caminho, e também faz com que nos movemos ao longo do caminho até o próximo comprimento diferencial, repetindo o procedimento

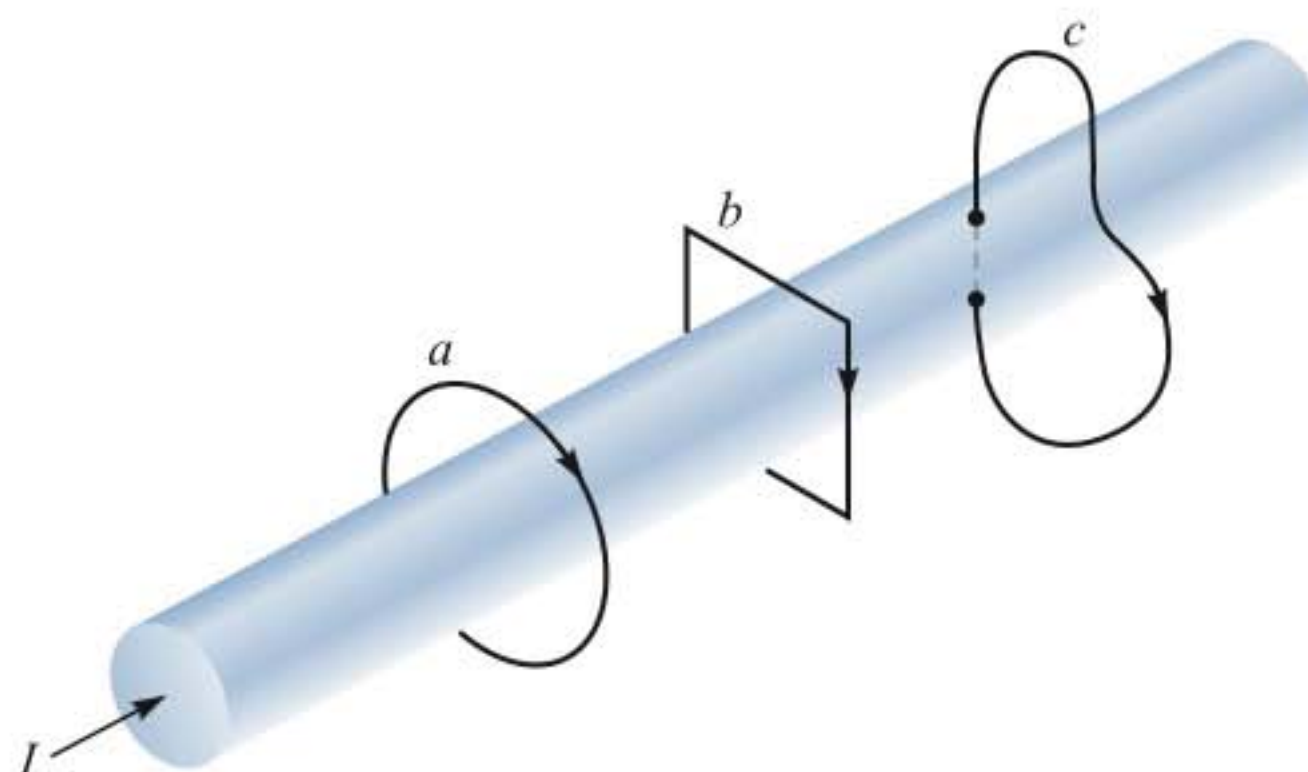



Figura 7.7 Um condutor possui uma corrente total I. A integral de linha de H ao longo dos caminhos fechados a e b é igual a I, e a integral ao longo do caminho c é menor que I, uma vez que a corrente inteira não é envolvida pelo caminho.

e continuando até que o caminho seja totalmente percorrido. Uma vez que **H** normalmente varia de ponto a ponto, e uma vez que os caminhos a e b não são os mesmos, as contribuições da integral feita por cada micrômetro de comprimento do caminho – consideremos assim – são bem diferentes. Apenas a resposta final é a mesma.

Temos também que considerar qual é exatamente o significado da expressão "corrente envolvida pelo caminho". Suponha que formemos um circuito soldando as extremidades de um fio após passá-lo por uma tira de borracha, que usaremos para representar o caminho fechado. Alguns caminhos estranhos e formidáveis podem ser construídos torcendo e dando nós na tira de borracha; porém, se a tira de borracha ou o circuito condutivo não forem quebrados, a corrente envolvida pelo caminho é aquela que circula no condutor. Agora, vamos substituir a tira de borracha por um anel circular de aço de mola por meio do qual uma película de borracha é esticada. A espira de aço forma o caminho fechado, e o condutor de corrente deve penetrar a película de borracha para que a corrente seja envolvida pelo caminho. Novamente, podemos torcer a espira de aço, e também podemos deformar a película de borracha empurrando nosso punho contra ela ou dobrando-a de qualquer maneira que desejarmos. Um único condutor de corrente ainda perfura a película uma vez, e essa é a medição verdadeira da corrente envolvida pelo caminho. Se passarmos o condutor uma vez pela película da frente para trás e uma vez de trás para a frente, a corrente total envolvida pelo caminho será a soma algébrica, que é zero.

Em uma linguagem mais geral, dado um caminho fechado, reconhecemos esse caminho como o perímetro de um número infinito de superfícies (superfícies não fechadas). Qualquer condutor de corrente que seja envolvido pelo caminho deverá necessariamente passar por todas essas superfícies. Certamente, algumas das superfícies podem ser escolhidas de forma que o condutor as perfure duas vezes em uma direção e uma na outra direção, mas a corrente algébrica total será ainda a mesma.

Perceberemos que a natureza do caminho fechado normalmente é extremamente simples e pode ser desenhada em um plano. Assim, a superfície mais simples será aquela porção do plano envolvida pelo caminho, e precisaremos simplesmente encontrar a corrente total que passa por essa região do plano.

A aplicação da lei de Gauss requer que se encontre a carga total envolvida por uma superfície fechada, e a aplicação da lei circuital de Ampère requer que se determine a corrente total envolvida por um caminho fechado.

Encontremos novamente a intensidade de campo magnético produzida por um filamento infinitamente longo pelo qual circula uma corrente I. O filamento posiciona-se no eixo z, no espaço livre (como na Figura 7.3), e a corrente flui na direção e sentido dados por $\mathbf{a}_z$. Primeiro, a inspeção sobre a simetria mostra que não há variação com z ou ϕ. Em seguida, determinamos quais componentes de $\mathbf{H}$ estão presentes, utilizando a lei de Biot-Savart. Sem especificamente utilizar o produto vetorial, podemos dizer que a direção de $d\mathbf{H}$ é perpendicular ao plano que contém $d\mathbf{L}$ e $\mathbf{R}$ e, com isso, está na direção e sentido de $\mathbf{a}_\phi$. Logo, o único componente de $\mathbf{H}$ é H_ϕ, e é função apenas de ρ.

Desta forma, escolhemos um caminho para qualquer seção para a qual $\mathbf{H}$ seja perpendicular ou tangencial e ao longo da qual H seja constante. A primeira condição ($\mathbf{H}$ perpendicular ou tangencial) nos permite substituir o produto escalar da lei circuital de Ampère pelo produto das intensidades escalares, a não ser ao longo daquela porção de caminho onde $\mathbf{H}$ é normal ao caminho, quando o produto escalar é zero. Já a segunda condição ($\mathbf{H}$ constante), permite remover a intensidade de campo magnético do sinal de integração. Fazer a integração necessária geralmente é bem simples, e consiste em encontrar o comprimento daquela porção do caminho para o qual $\mathbf{H}$ é paralelo.

No nosso exemplo, o caminho deve ser um círculo de raio ρ, e assim a lei circuital de Ampère será

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^{2\pi} H_\phi \rho d\phi = H_\phi \rho \int_0^{2\pi} d\phi = H_\phi 2\pi\rho = I$$

ou

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}$$

como antes.

Como um segundo exemplo da aplicação da lei circuital de Ampère, considere uma linha de transmissão coaxial infinita pela qual flui uma corrente total I, uniformemente distribuída no condutor central e $-I$ no condutor externo. A linha é mostrada na Figura 7.8*a*. A simetria mostra que H não é função de ϕ ou z. Com o objetivo de determinar os componentes presentes, vamos utilizar os resultados do exemplo anterior, considerando que os condutores sólidos sejam compostos de diversos filamentos. Nenhum filamento possui um componente de $\mathbf{H}$ em z. Além disso, o componente H_ρ em $\phi = 0^\circ$, produzido por um filamento posicionado em $\rho = \rho_1$, $\phi = \phi_1$, é cancelado pelo componente H_ρ produzido pelo filamento simetricamente posicionado em $\rho = \rho_1$, $\phi = -\phi_1$. Essa simetria é ilustrada na Figura 7.8*b*. Novamente, encontramos apenas um componente H_ϕ que varia com ρ.

Um caminho circular de raio ρ, onde ρ é maior que o raio do condutor interno mas menor que o raio interno do condutor externo, leva-nos então imediatamente a

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \quad (a < \rho < b)$$

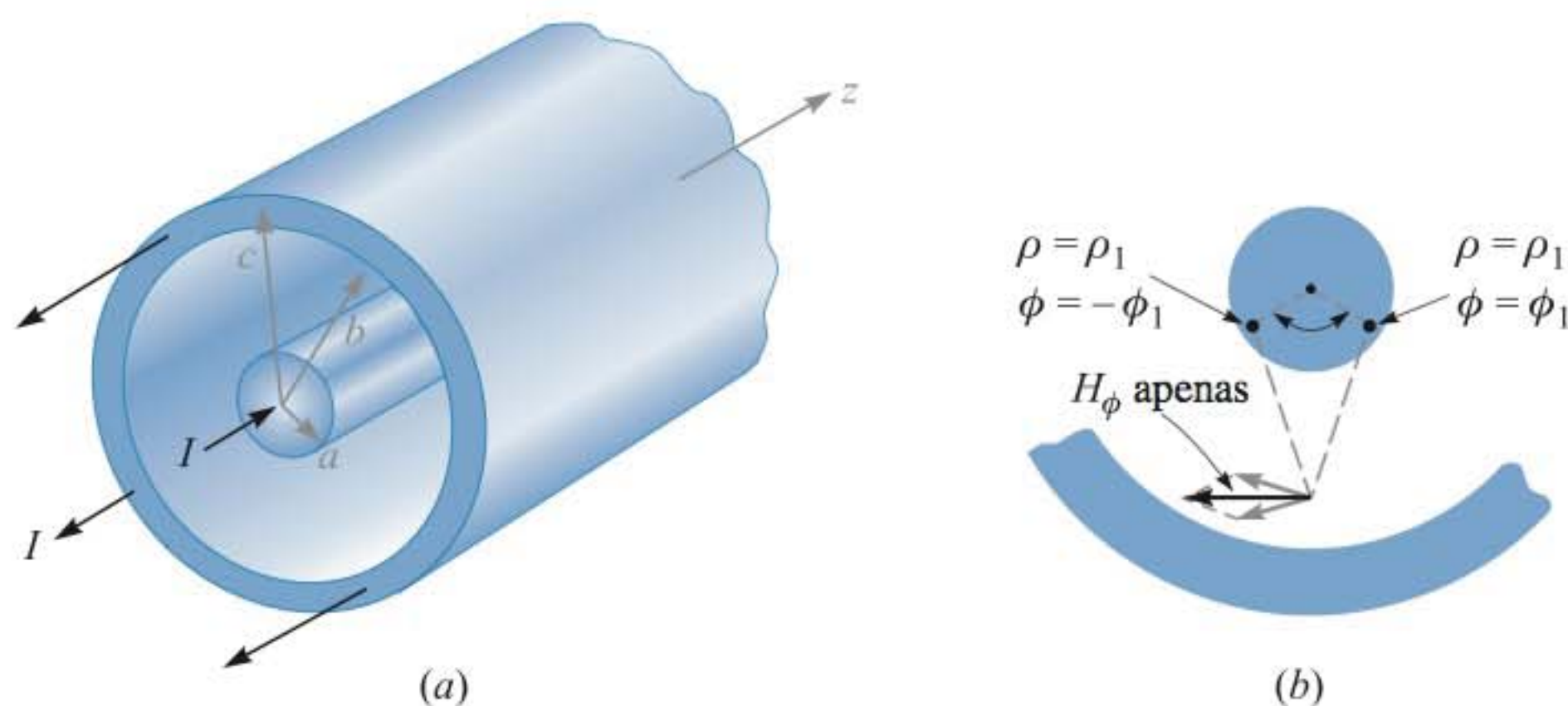



Figura 7.8 (*a*) Seção reta de um cabo coaxial pelo qual circula uma corrente I uniformemente distribuída no condutor interno e $-I$ no condutor externo. O campo magnético em qualquer ponto é mais facilmente determinado pela aplicação da lei circuital de Ampère ao longo de um caminho circular. (*b*) Filamentos de corrente em $\rho = \rho_1$, $\phi = \pm\phi_1$, produzem componentes H_ρ que se cancelam. Para o campo total, $\mathbf{H} = H_\phi \mathbf{a}_\phi$.

WWW Ilustração

Se escolhermos um ρ menor que o raio do condutor interno, a corrente envolvida será

$$I_{\text{corr envolvida}} = I\frac{\rho^2}{a^2}$$

e

$$2\pi\rho H_\phi = I\frac{\rho^2}{a^2}$$

ou

$$H_\phi = \frac{I\rho}{2\pi a^2} \quad (\rho < a)$$

Se o raio ρ for maior que o raio externo do condutor externo, nenhuma corrente é envolvida e

$$H_\phi = 0 \quad (\rho > c)$$

Finalmente, se o caminho está posicionado dentro do condutor externo, temos

$$2\pi\rho H_\phi = I - I\left(\frac{\rho^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right)$$

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}\frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2} \quad (b < \rho < c)$$

A variação da intensidade do campo magnético com o raio é mostrada na Figura 7.9, considerando um cabo coaxial no qual $b = 3a$, $c = 4a$. Deve-se notar que a intensidade de campo magnético $\mathbf{H}$ é contínua em todas as fronteiras dos condutores. Em outras palavras, um pequeno aumento no raio do caminho fechado não resulta na inclusão de uma quantidade tremenda de corrente. O valor de H_ϕ não mostra saltos súbitos.

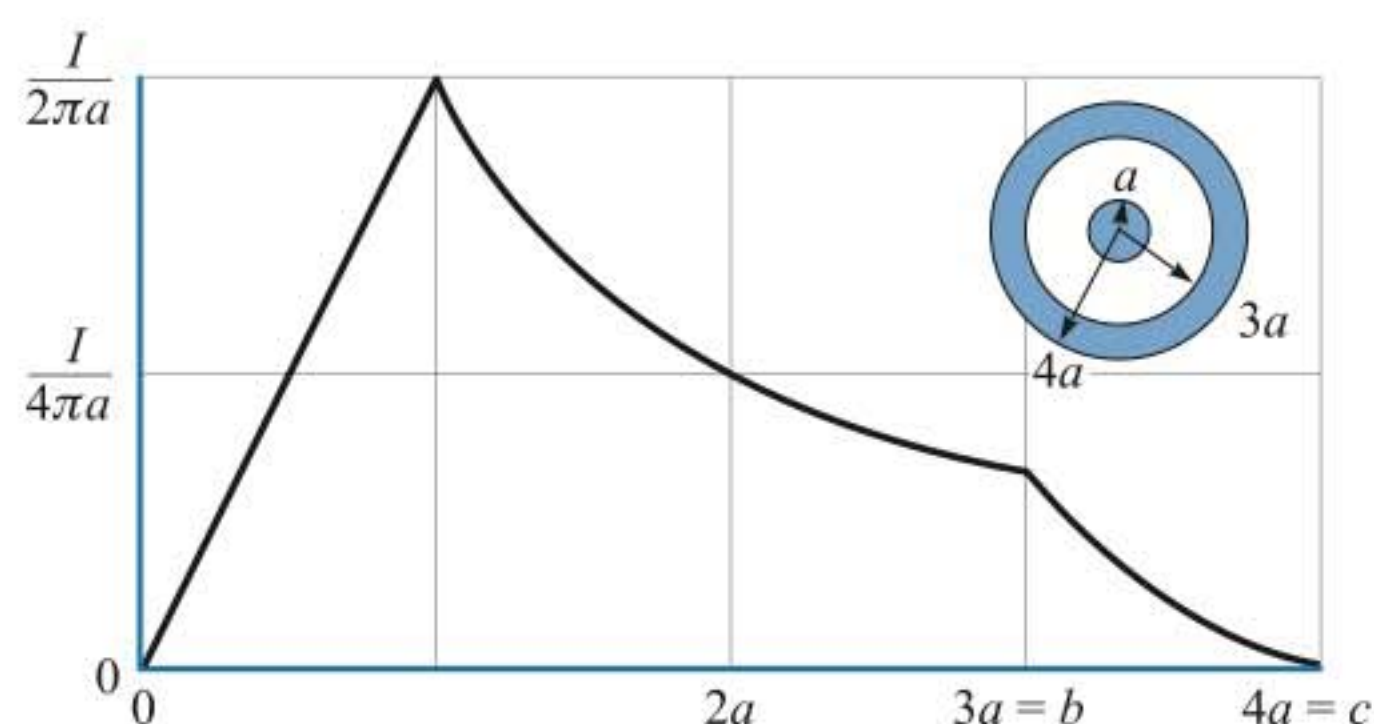



Figura 7.9 A intensidade de campo magnético como função do raio em uma linha de transmissão coaxial infinitamente longa com as dimensões mostradas.

O campo externo é zero, e isso resulta, como podemos verificar, das correntes positiva e negativa iguais envolvidas pelo caminho. Cada uma produz um campo externo de intensidade $I/2\pi\rho$, mas ocorre um cancelamento completo. Esse é outro exemplo de "blindagem". Tal cabo coaxial, pelo qual circula altos valores de corrente, não produziria qualquer efeito notável em um circuito adjacente.

Como um exemplo final, vamos considerar uma lâmina de corrente que flui na direção positiva de y e que está posicionada no plano $z = 0$. Podemos considerar a corrente de retorno igualmente dividida entre duas lâminas distantes em cada lado da lâmina que estamos considerando. Uma lâmina com densidade superficial de corrente uniforme $\mathbf{K} = K_y \mathbf{a}_y$ é mostrada na Figura 7.10. $\mathbf{H}$ não pode variar com x ou y. Se a lâmina for subdividida em um número de filamentos, é evidente que nenhum filamento pode produzir um componente H_y. Além disso, a lei de Biot-Savart mostra que contribuições para H_z produzidas por pares de filamentos simetricamente dispostos se cancelam. Logo, H_z é zero também. Apenas um componente H_x está presente. Escolhemos, então, o caminho $1-1'-2'-2-1$ composto por segmentos de linha reta, os quais são paralelos ou perpendiculares a H_x. A lei circuital de Ampère resulta em

$$H_{x1}L + H_{x2}(-L) = K_y L$$

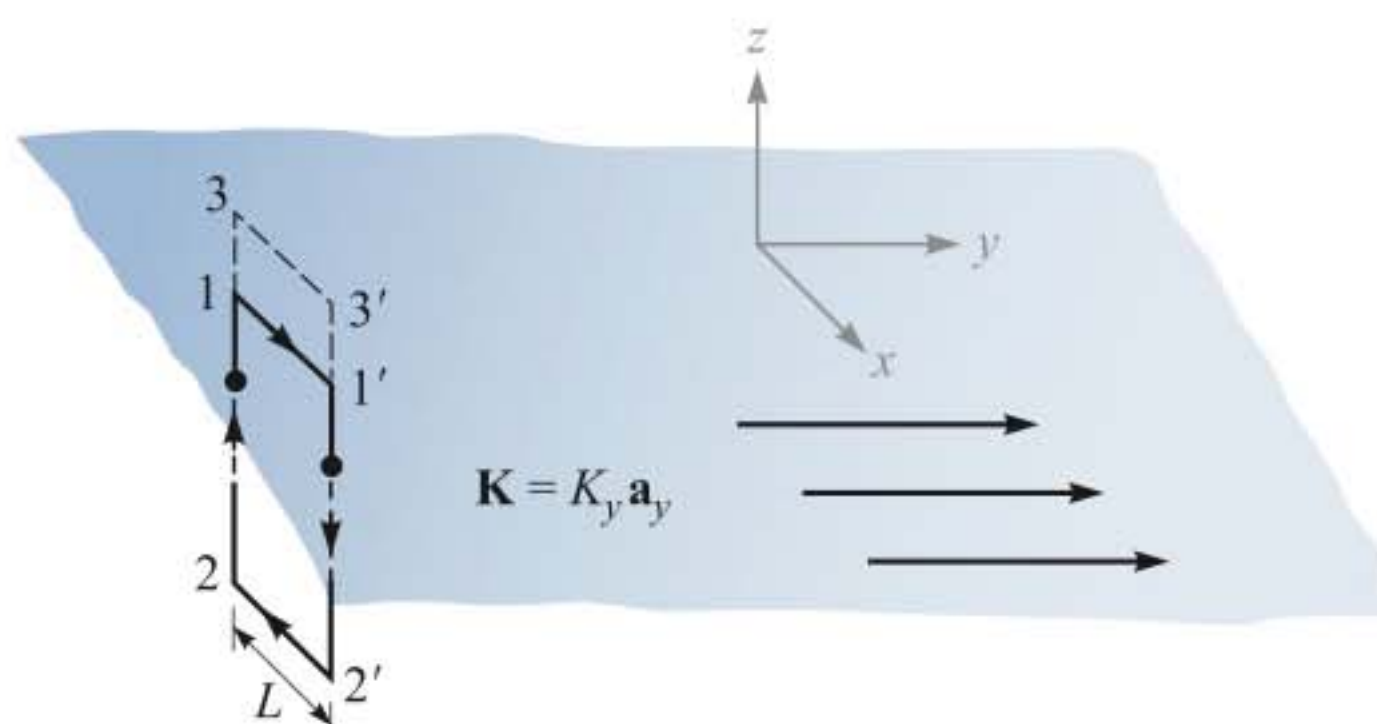



Figura 7.10 Uma lâmina de corrente superficial uniforme $\mathbf{K} = K_y \mathbf{a}_y$ no plano $z = 0$. H pode ser encontrado aplicando-se a lei circuital de Ampère ao longo dos caminhos $1-1'-2'-2-1$ e $3-3'-2'-2-3$.

ou

$$H_{x1} - H_{x2} = K_y$$

Se o caminho 3—3′—2′—2—3 é agora escolhido, a mesma corrente está envolvida, e

$$H_{x3} - H_{x2} = K_y$$

assim,

$$H_{x3} = H_{x1}$$

Segue, então, que H_x é o mesmo para todo z positivo. De forma semelhante, H_x é o mesmo para todo z negativo. Assim, devido à simetria, a intensidade de campo magnético em um lado da lâmina de corrente é o negativo daquela presente no outro lado. Sobre a lâmina, temos

$$H_x = \tfrac{1}{2}K_y \quad (z > 0)$$

e abaixo dela,

$$H_x = -\tfrac{1}{2}K_y \quad (z < 0)$$

Considerando $\mathbf{a}_N$ um vetor unitário normal (apontando para fora) à lâmina de corrente, o resultado pode ser escrito em uma forma correta para todos os z como

$$\boxed{\mathbf{H} = \tfrac{1}{2}\mathbf{K} \times \mathbf{a}_N} \tag{11}$$

Se uma segunda lâmina com corrente circulando no sentido inverso representada por $\mathbf{K} = -K_y\mathbf{a}_y$ é posicionada em $z = h$, a Equação (11) mostra que o campo na região entre as lâminas de corrente será

$$\boxed{\mathbf{H} = \mathbf{K} \times \mathbf{a}_N \quad (0 < z < h)} \tag{12}$$

e é zero nos demais pontos

$$\boxed{\mathbf{H} = \mathbf{0} \quad (z < 0, z > h)} \tag{13}$$

A parte mais difícil da aplicação da lei circuital de Ampère é a determinação dos componentes do campo que estão presentes. O método mais seguro é a aplicação lógica da lei de Biot-Savart e um conhecimento dos campos magnéticos de forma simples.

O Problema 7.13 no final deste capítulo destaca os passos envolvidos na aplicação da lei circuital de Ampère a um solenoide infinitamente longo de raio a e densidade uniforme de corrente $K_a\mathbf{a}_\phi$, conforme mostrado na Figura 7.11a. Para referência, o resultado é

$$\mathbf{H} = K_a\mathbf{a}_z \quad (\rho < a) \tag{14a}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{0} \quad (\rho > a) \tag{14b}$$

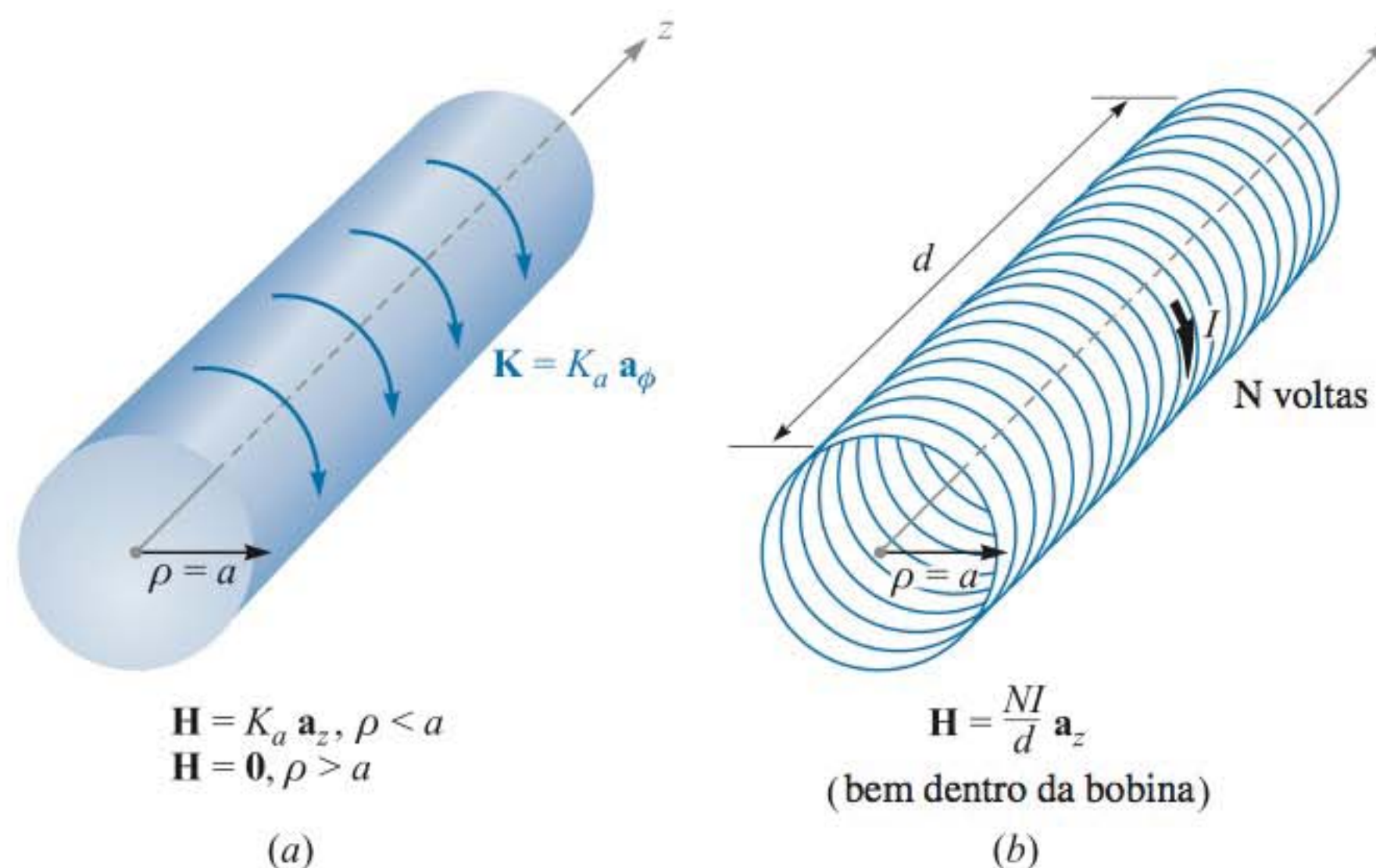



Figura 7.11 (*a*) Um solenoide ideal de comprimento infinito com uma lâmina circular de corrente $\mathbf{K} = K_a\mathbf{a}_\phi$. (*b*) Um solenoide de N voltas de comprimento finito d.

Se o solenoide possui um comprimento finito d e consiste em N voltas enroladas muito próximas uma das outras em um filamento no qual circula uma corrente I (Figura 7.11*b*), então o campo nos pontos bem dentro do solenoide é dado de forma aproximada por

$$\mathbf{H} = \frac{NI}{d}\mathbf{a}_z \quad \text{(bem dentro do solenoide)} \tag{15}$$

A aproximação para calcular **H** é realmente útil, mas não se for aplicada a menos de dois raios de distância das extremidades abertas nem a uma distância menor que o equivalente a duas vezes a separação entre voltas em relação à superfície do solenoide.

Para os toroides mostrados na Figura 7.12, pode-se mostrar que a intensidade de campo magnético para o caso ideal, Figura 7.12*a*, é

$$\mathbf{H} = K_a\frac{\rho_0 - a}{\rho}\mathbf{a}_\phi \quad \text{(dentro do toroide)} \tag{16a}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{0} \quad \text{(fora)} \tag{16b}$$

Para o toroide de N voltas da Figura 7.12*b*, temos boas aproximações,

$$\mathbf{H} = \frac{NI}{2\pi\rho}\mathbf{a}_\phi \quad \text{(dentro do toroide)} \tag{17a}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{0} \quad \text{(fora)} \tag{17b}$$

desde que consideremos pontos distantes da superfície do toroide por uma distância várias vezes maior que a separação entre as voltas.

Toroides que possuem seção reta retangular serão também prontamente tratados, como poderá ser notado ao se tentar resolver o Problema 7.14.

Fórmulas exatas para solenoides, toroides e bobinas de outras formas estão disponíveis na Seção 2 do *Standard Handbook for Electrical Engineers* (ver Referências do Capítulo 5).

$\mathbf{K} = K_a\,\mathbf{a}_z$ em $\rho = \rho_0 - a,\ z = 0$

$\mathbf{H} = K_a \dfrac{\rho_0 - a}{\rho}\,\mathbf{a}_\phi$ (dentro do toroide)

$\mathbf{H} = \mathbf{0}$ (do lado de fora)

(*a*)

$\mathbf{H} = \dfrac{NI}{2\pi\rho}\,\mathbf{a}_\phi$ (bem dentro do toroide)

(*b*)

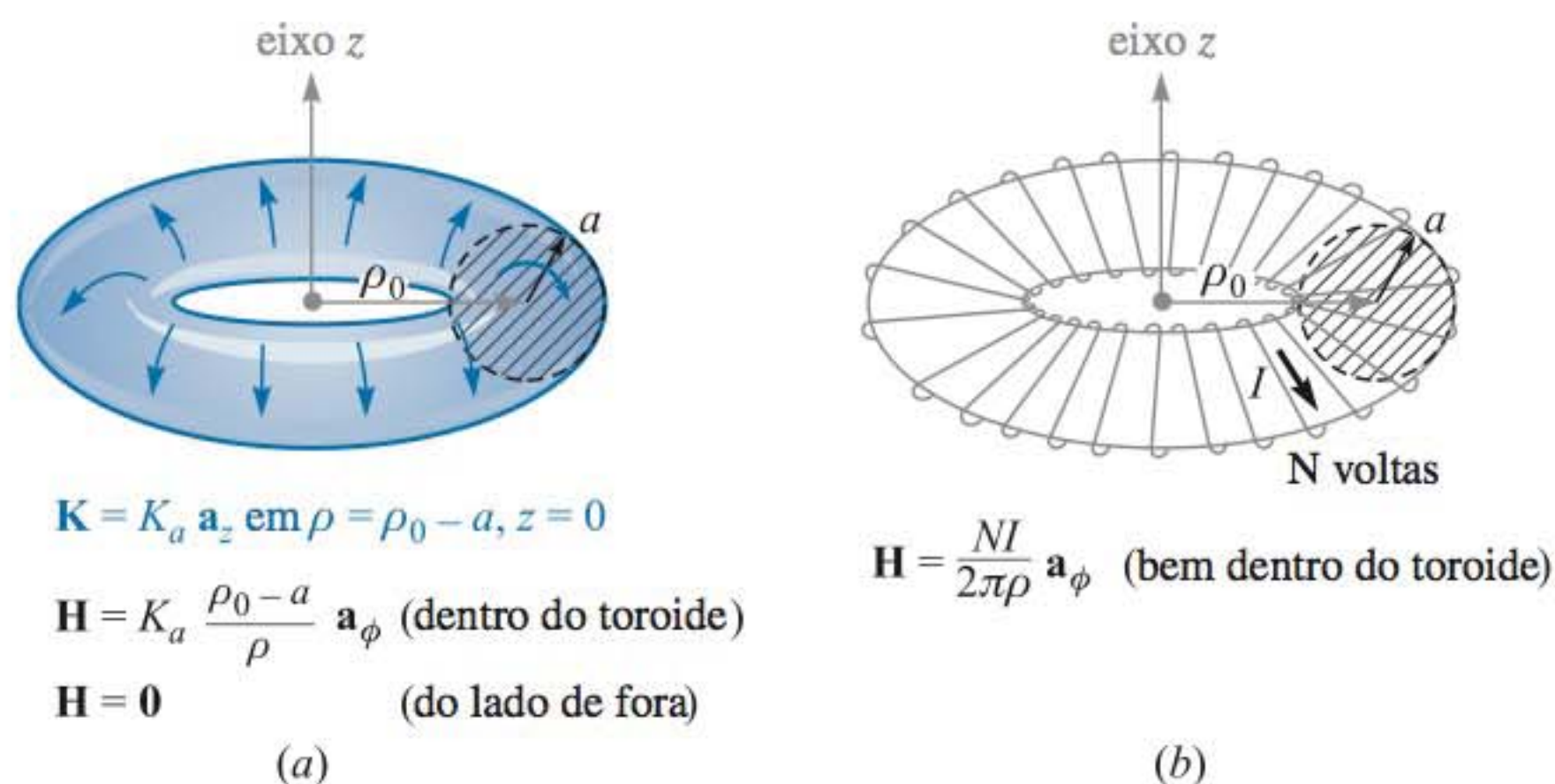



Figura 7.12 (*a*) Um toroide ideal pelo qual circula uma corrente superficial **K** na direção mostrada. (*b*) Um toroide de *N* voltas pelo qual passa uma corrente filamentar *I*.

EP7.3. Expresse o valor de **H** em componentes cartesianos em $P(0,\ 0{,}2,\ 0)$ no campo de: (*a*) um filamento de corrente de 2,5 A na direção $\mathbf{a}_z$ em $x = 0{,}1$, $y = 0{,}3$; (*b*) um cabo coaxial, centrado no eixo *z*, com $a = 0{,}3$, $b = 0{,}5$, $c = 0{,}6$, $I = 2{,}5$ A na direção $\mathbf{a}_z$ no condutor central; (*c*) três lâminas de corrente de $2{,}7\mathbf{a}_x$ A/m em $y = 0{,}1$, $-1{,}4\mathbf{a}_x$ A/m em $y = 0{,}15$ e $-1{,}3\mathbf{a}_x$ A/m em $y = 0{,}25$.

Resp. $1{,}989\mathbf{a}_x - 1{,}989\mathbf{a}_y$ A/m; $-0{,}884\mathbf{a}_x$ A/m; $1{,}300\mathbf{a}_z$ A/m

7.3 ROTACIONAL

Completamos nosso estudo da lei de Gauss aplicando-a a um elemento diferencial de volume, e assim fomos levados ao conceito de divergência. Agora, aplicaremos a lei circuital de Ampère para o perímetro de um elemento diferencial de superfície e discutiremos a terceira e última das derivadas especiais da análise vetorial: o rotacional. Nosso objetivo imediato é obter a forma pontual da lei circuital de Ampère.

Novamente, devemos escolher as coordenadas cartesianas, e um caminho fechado incremental de lados Δx e Δy é selecionado (Figura 7.13). Consideramos que alguma corrente, ainda não especificada, produz um valor de referência para **H** no *centro* deste pequeno retângulo,

$$\mathbf{H}_0 = H_{x0}\mathbf{a}_x + H_{y0}\mathbf{a}_y + H_{z0}\mathbf{a}_z$$

Assim, a integral de linha fechada de **H** ao longo desse caminho é aproximadamente a soma dos quatro valores de $\mathbf{H} \cdot \Delta\mathbf{L}$ em cada lado. Escolhemos a direção do caminho como 1-2-3-4-1, a qual corresponde a uma corrente na direção $\mathbf{a}_z$; portanto, a primeira contribuição será

$$(\mathbf{H} \cdot \Delta\mathbf{L})_{1-2} = H_{y,1-2}\Delta y$$

O valor de H_y, *nessa seção* do caminho, pode ser expresso pelo valor de referência H_{y0} no centro do retângulo, pela taxa de variação de H_y com *x* e pela distância $\Delta x/2$ do centro até o ponto médio do lado 1–2:

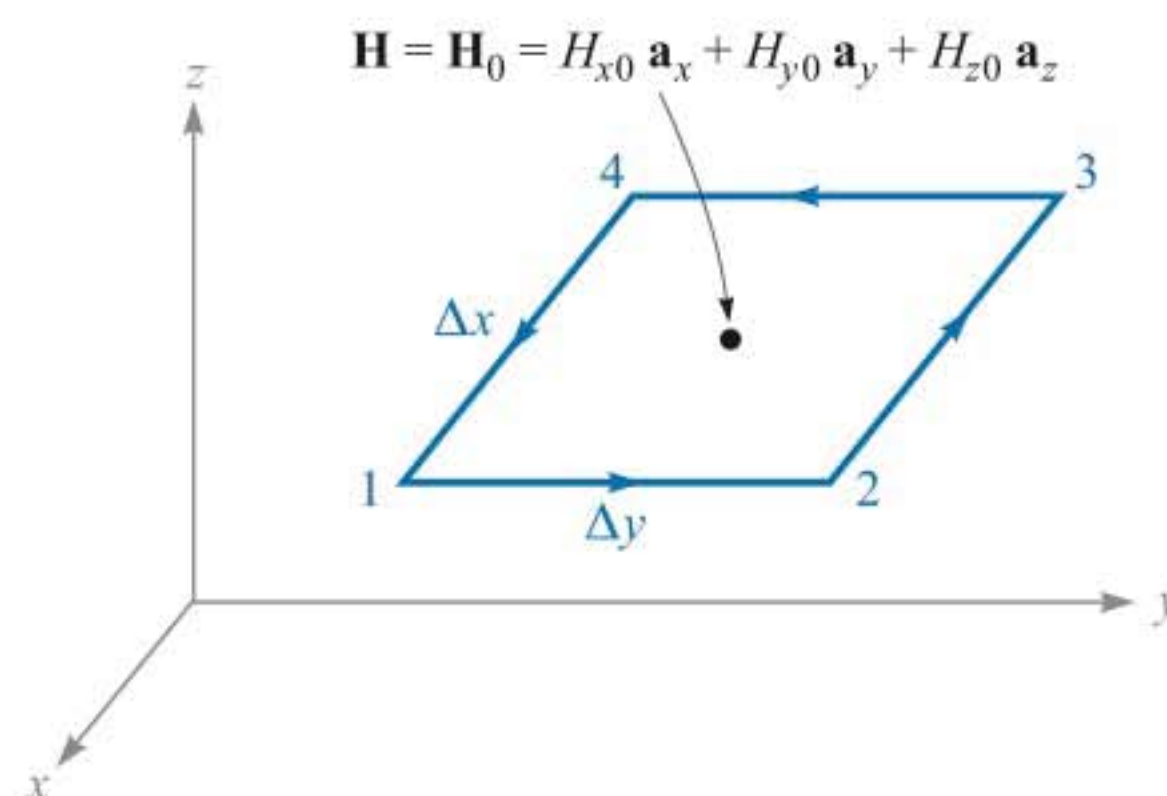



Figura 7.13 Um caminho fechado incremental em coordenadas cartesianas é selecionado para a aplicação da lei circuital de Ampère para determinar a taxa de variação espacial de H.

$$H_{y,1-2} \doteq H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\Delta x\right)$$

Logo

$$(\mathbf{H}\cdot\Delta\mathbf{L})_{1-2} \doteq \left(H_{y0} + \frac{1}{2}\frac{\partial H_y}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y$$

Ao longo da próxima seção do caminho, temos

$$(\mathbf{H}\cdot\Delta\mathbf{L})_{2-3} \doteq H_{x,2-3}(-\Delta x) \doteq -\left(H_{x0} + \frac{1}{2}\frac{\partial H_x}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x$$

Continuando para os dois segmentos restantes e somando os resultados,

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{L} \doteq \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\Delta x\,\Delta y$$

Pela lei circuital de Ampère, esse resultado deve ser igual à corrente envolvida pelo caminho, ou à corrente que atravessa qualquer superfície limitada pelo caminho. Se considerarmos uma densidade de corrente genérica **J**, a corrente envolvida será $\Delta I \doteq J_z\Delta x\,\Delta y$, e

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{L} \doteq \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\Delta x\,\Delta y \doteq J_z\Delta x\,\Delta y$$

ou

$$\frac{\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{L}}{\Delta x\,\Delta y} \doteq \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \doteq J_z$$

À medida que fizermos o caminho fechado encolher, a expressão anterior se tornará mais próxima de ser exata, e no limite teremos a igualdade

$$\lim_{\Delta x,\Delta y\to 0}\frac{\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{L}}{\Delta x\,\Delta y} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z \tag{18}$$

Após começarmos com a lei circuital de Ampère, igualando a integral de linha fechada de **H** à corrente envolvida, chegamos agora em uma relação envolvendo a integral de linha fechada de **H** *por unidade de área* envolvida e a corrente *por unidade de área* envolvida, ou densidade de corrente. Realizamos uma análise similar quando passamos da forma integral da lei de Gauss, que relacionava o fluxo por meio de uma superfície fechada e a carga envolvida, para a forma pontual, que relacionava o fluxo por meio de uma superfície fechada *por unidade de volume* envolvido e a carga *por unidade de volume* envolvido, ou densidade volumétrica de carga. Em cada caso, um limite é necessário para produzir a igualdade.

Se escolhermos caminhos fechados que estão orientados perpendicularmente a cada um dos dois eixos coordenados restantes, um processo análogo leva a expressões para os componentes x e y da densidade de corrente,

$$\lim_{\Delta y, \Delta z \to 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta y \Delta z} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x \qquad (19)$$

e

$$\lim_{\Delta z, \Delta x \to 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta z \Delta x} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y \qquad (20)$$

Comparando as Equações (18), (19) e (20), vemos que um componente da densidade de corrente é dado pelo limite do quociente da integral de linha fechada de **H** ao longo de um caminho curto em um plano normal àquele componente pela área envolvida, à medida que o caminho se reduz a zero. Esse limite tem sua contraparte em outros campos da ciência, e há muito tempo recebeu o nome de *rotacional*. O rotacional de qualquer vetor é um vetor, e qualquer componente do rotacional é dado pelo limite do quociente da integral de linha fechada do vetor, ao longo de um caminho curto no plano normal àquele componente desejado, pela área envolvida, à medida que o caminho se reduz a zero. Deve-se notar que essa definição de rotacional não se refere especificamente a um sistema de coordenadas em particular. A forma matemática da definição é

$$(\text{rotacional de } \mathbf{H})_N = \lim_{\Delta S_N \to 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta S_N} \qquad (21)$$

onde ΔS_N é a área plana envolvida pela integral de linha fechada. O subscrito N indica que o componente do rotacional é aquele componente que é *normal* à superfície envolvida pelo caminho fechado. Esse subscrito pode representar qualquer componente em qualquer sistema de coordenadas.

Em coordenadas cartesianas, a definição da Equação (21) mostra que os componentes x, y e z do rotacional de **H** são dados pelas Equações (18), (19) e (20), e assim

$$\text{rotacional de } \mathbf{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\mathbf{a}_z \qquad (22)$$

Esse resultado pode ser escrito na forma de um determinante,

$$\text{rotacional de } \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \tag{23}$$

e também pode ser expresso pela operação vetorial,

$$\text{rotacional de } \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H} \tag{24}$$

A Equação (22) é o resultado da aplicação da Equação (21) ao sistema do coordenadas cartesianas. Obtivemos o componente em z dessa expressão calculando a lei circuital de Ampère ao longo de um caminho incremental de lados Δx e Δy, e de uma maneira fácil poderíamos também ter obtido os dois outros componentes, escolhendo os caminhos apropriados. A Equação (23) é um método elegante para se armazenar a expressão para o rotacional em coordenadas cartesianas. A forma é simétrica e facilmente lembrada. A Equação (24) é ainda mais concisa e leva à Equação (22) pela aplicação das definições do produto vetorial e do operador vetorial.

As expressões para o rotacional de **H** em coordenadas cilíndricas e esféricas são derivadas no Apêndice A pela aplicação da definição da Equação (21). Apesar de poderem ser escritas na forma de determinante, conforme explicado naquele apêndice, os determinantes não possuem uma linha de vetores unitários no topo e uma linha de componentes na base, além de não serem facilmente memorizáveis. Por essa razão, as expansões para o rotacional nas coordenadas cilíndricas e esféricas, que aqui são colocadas e apresentadas na contracapa, serão citadas quando necessário.

$$\nabla \times \mathbf{H} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right)\mathbf{a}_\rho + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right)\mathbf{a}_\phi + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\right)\mathbf{a}_z \quad \text{(cilíndricas)} \tag{25}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\left(\frac{\partial(H_\phi \operatorname{sen}\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi}\right)\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rH_\phi)}{\partial r}\right)\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta}\right)\mathbf{a}_\phi \quad \text{(esféricas)} \tag{26}$$

Apesar de termos descrito o rotacional como uma integral de linha por unidade de área, isso não fornece uma descrição física satisfatória da natureza da operação de rotacional, pois a própria integral de linha fechada requer uma interpretação física. Essa integral foi primeiramente encontrada no campo eletrostático, onde vimos que $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$. Visto que a integral era zero, não insistimos na interpretação física. Mais recentemente, discutimos a integral de linha fechada de **H**, $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$. Qualquer

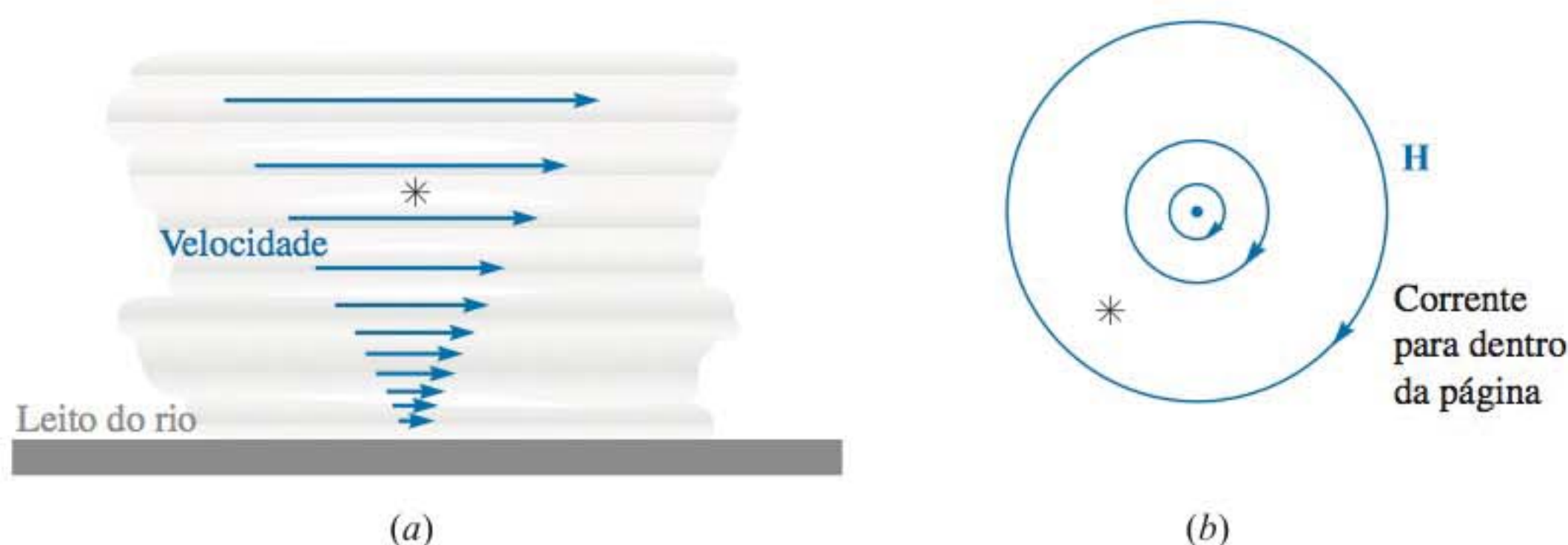



Figura 7.14 (*a*) O medidor de rotacional mostra um componente do rotacional da velocidade da água para dentro da página. (*b*) O rotacional da intensidade de campo magnético ao redor de um filamento infinitamente longo é mostrado.

uma dessas integrais de linha é também conhecida pelo nome de *circulação*, um termo obviamente emprestado do campo da dinâmica de fluidos.

A circulação de **H**, ou $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$, é obtida pela multiplicação do componente de **H** paralelo ao caminho fechado, especificado em cada ponto ao longo do mesmo, pelo comprimento diferencial do caminho, e pela soma dos resultados à medida que os comprimentos diferenciais se aproximam de zero e o número desses comprimentos se torna infinito. Não é necessário um caminho extremamente pequeno. A lei circuital de Ampère nos diz que se **H** possui circulação ao longo de um dado caminho, a corrente atravessa esse caminho. Em eletrostática vemos que a circulação de **E** é zero ao longo de qualquer caminho, uma consequência direta do fato de que um trabalho nulo é necessário para deslocar a carga ao longo do caminho fechado.

Vamos agora descrever o rotacional como *circulação por unidade de área*. O caminho fechado é cada vez menor, e o rotacional é definido em um ponto. O rotacional de **E** deve ser zero, pois a circulação é zero. Entretanto, o rotacional de **H** não é zero. A circulação de **H** por unidade de área é a densidade de corrente pela lei circuital de Ampère [ou pelas Equações (18), (19) e (20)].

Skilling[4] sugere o uso de uma roda propulsora de navio a vapor bastante pequena como um "medidor de rotacional". Nesse caso, deve-se considerar que nossa grandeza vetorial seja capaz de aplicar uma força a cada pá da roda propulsora, que deve ser proporcional ao componente do campo normal à superfície da pá. Para testar um campo para o rotacional, mergulhamos nossa roda propulsora no campo, com o eixo da roda propulsora alinhado com a direção do componente do rotacional desejado, e notamos a ação do campo na roda. Nenhuma rotação significa nenhum rotacional. Velocidades angulares maiores significam maiores valores de rotacional. Uma inversão no sentido de rotação significa uma inversão no sinal do rotacional. Para encontrar a direção vetorial do rotacional e não simplesmente detectar a presença de qualquer componente em particular, devemos colocar nossa roda propulsora no campo e procurar pela orientação que produz o maior torque. Portanto, a direção do rotacional é ao longo do eixo da roda propulsora, conforme dado pela regra da mão direita.

Como um exemplo, considere o fluxo de água por um rio. A Figura 7.14*a* mostra a seção longitudinal de um rio largo tomada no meio do rio. A velocidade da água é

[4] Ver Referências no final do capítulo.

zero no fundo e aumenta linearmente à medida que se aproxima da superfície. Uma roda propulsora colocada na posição mostrada, com seu eixo perpendicular ao papel, irá girar no sentido horário, mostrando a presença de um componente do rotacional no sentido para dentro da página, em uma direção normal à superfície desta. Se a velocidade da água não mudar à medida que formos para cima ou para baixo ao longo do leito do rio e também não mostrar variação à medida que atravessamos o rio (ou mesmo se diminuir da mesma maneira em direção a cada margem), então esse componente será o único componente presente no centro da correnteza, e o rotacional da velocidade da água terá direção e sentido para dentro da página.

Na Figura 7.14*b*, são mostradas as linhas de força da intensidade de campo magnético em volta de um filamento condutor infinitamente longo. O medidor de rotacional, colocado nesse campo de linhas curvas, mostra que diversas pás são forçadas no sentido horário, mas que essa força geralmente é menor que a força no sentido anti-horário exercida em um número menor de pás mais perto do fio. Parece ser possível que, se a curvatura das linhas de força estiver correta assim como a variação da intensidade de campo, o torque líquido na roda propulsora seja zero. Na verdade, a roda propulsora não gira nesse caso, pois uma vez que $\mathbf{H} = (I/2\pi\rho)\mathbf{a}_\phi$, podemos substituir os termos na Equação (25) e obter

$$\text{rotacional de } \mathbf{H} = -\frac{\partial H_\phi}{\partial z}\mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho}\mathbf{a}_z = 0$$

EXEMPLO 7.2

Como um exemplo do cálculo do rotacional de **H** por meio da definição e do cálculo de outra integral de linha, vamos supor que $\mathbf{H} = 0{,}2z^2\mathbf{a}_x$ para $z > 0$, e $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ nos outros pontos, conforme mostrado na Figura 7.15. Calcule $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$ ao longo de um caminho quadrado de lado d, centrado em $(0, 0, z_1)$ no plano $y = 0$ onde $z_1 > d/2$.

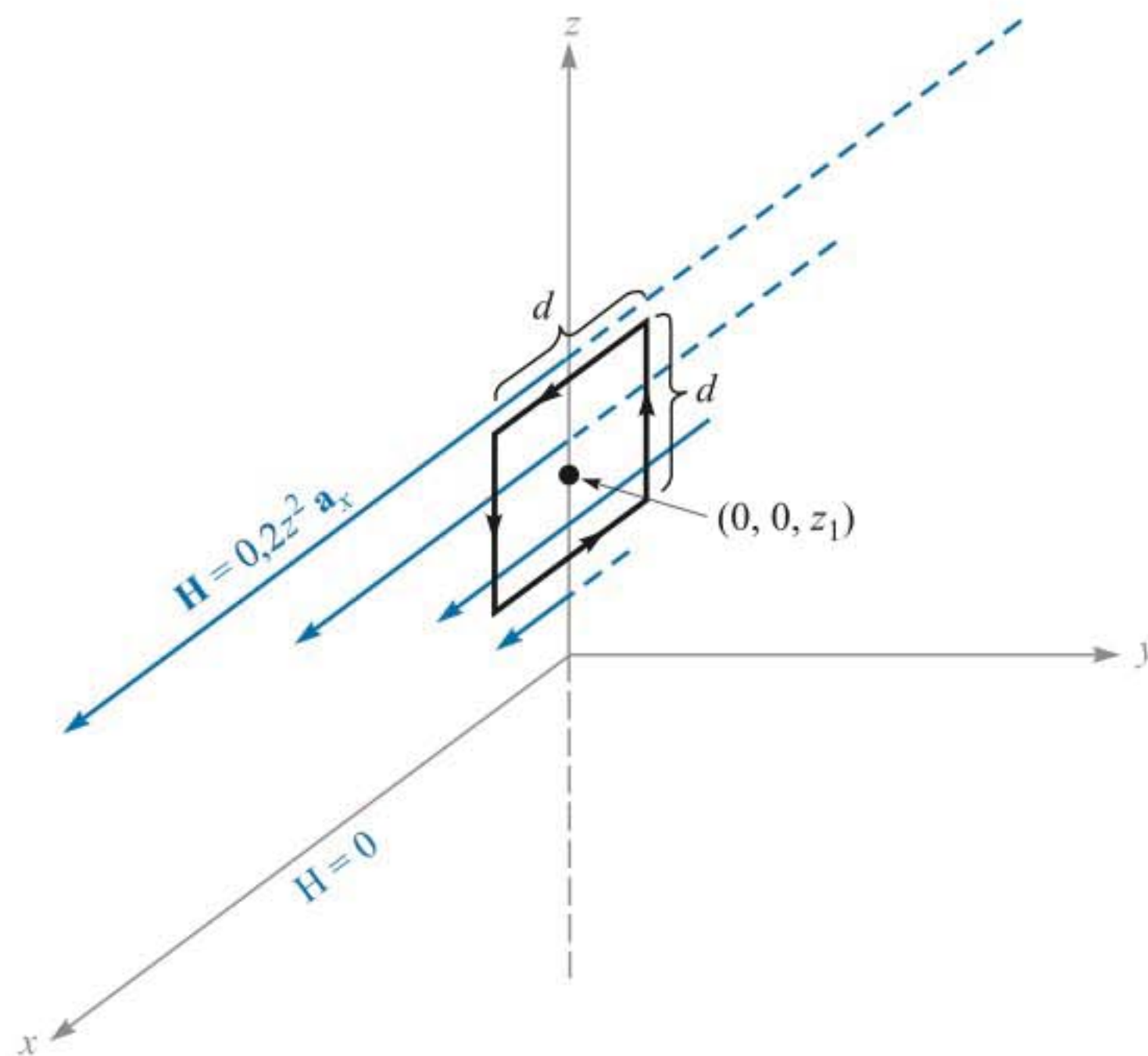



Figura 7.15 Um caminho quadrado de lado d com seu centro no eixo z em $z = z_1$ é utilizado para calcular $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$ e encontrar o rotacional de H.

Solução. Calculamos a integral de linha de **H** ao longo dos quatro segmentos, começando pelo topo:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = 0{,}2\left(z_1 + \tfrac{1}{2}d\right)^2 d + 0 - 0{,}2\left(z_1 - \tfrac{1}{2}d\right)^2 d + 0$$
$$= 0{,}4 z_1 d^2$$

No limite, à medida que a área se aproxima de zero, encontramos

$$(\nabla \times \mathbf{H})_y = \lim_{d \to 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{d^2} = \lim_{d \to 0} \frac{0{,}4 z_1 d^2}{d^2} = 0{,}4 z_1$$

Os outros componentes são zero, de forma que $\nabla \times \mathbf{H} = 0{,}4 z_1 \mathbf{a}_y$.

Para calcular o rotacional sem tentar ilustrar a definição ou o cálculo da integral de linha, simplesmente tomamos a derivada parcial indicada pela Equação (23):

$$\nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0{,}2z^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial z}(0{,}2z^2)\mathbf{a}_y = 0{,}4z\mathbf{a}_y$$

que concorda com o resultado anterior quando $z = z_1$.

Retornando agora para completar nosso exame original da aplicação da lei circuital de Ampère a um caminho de tamanho diferencial, combinamos as Equações (18), (19), (20), (22) e (24),

$$\text{rotacional de } \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\mathbf{a}_z = \mathbf{J} \tag{27}$$

e escrevemos a *forma pontual da lei circuital de Ampère*,

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}} \tag{28}$$

Essa é a segunda das quatro equações de Maxwell, quando aplicadas às condições onde não há variação com o tempo. Podemos, também, escrever a terceira dessas equações neste momento. É a forma pontual de $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$, ou

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}} \tag{29}$$

A quarta equação aparecerá na Seção 7.5.

EP7.4. (*a*) Calcule a integral de linha fechada de $\mathbf{H}$ ao longo de um caminho retangular $P_1(2, 3, 4)$ a $P_2(4, 3, 4)$ a $P_3(4, 3, 1)$ a $P_4(2, 3, 1)$ a P_1, dado $\mathbf{H} = 3z\mathbf{a}_x - 2x^3\mathbf{a}_z$ A/m. (*b*) Determine o quociente da integral de linha fechada pela área envolvida pelo caminho como uma aproximação para $(\nabla \times \mathbf{H})_y$. (*c*) Determine $(\nabla \times \mathbf{H})_y$ no centro da área.

Resp. 354 A; 59 A/m^2; 57 A/m^2

EP7.5. Calcule o valor do vetor densidade de corrente: (*a*) em coordenadas cartesianas em $P_A(2, 3, 4)$ se $\mathbf{H} = x^2z\mathbf{a}_y - y^2x\mathbf{a}_z$ A/m; (*b*) em coordenadas cilíndricas em $P_B(1{,}5, 90°, 0{,}5)$ se $\mathbf{H} = \frac{2}{\rho}(\cos 0{,}2\phi)\mathbf{a}_\rho$ A/m; (*c*) em coordenadas esféricas em $P_C(2, 30°, 20°)$ se $\mathbf{H} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\mathbf{a}_\theta$ A/m.

Resp. $-16\mathbf{a}_x + 9\mathbf{a}_y + 16\mathbf{a}_z$ A/m^2; 0,055 $\mathbf{a}_z$ A/m^2; $\mathbf{a}_\phi$ A/m^2

7.4 TEOREMA DE STOKES

Apesar de a Seção 7.3 ter sido dedicada primariamente à discussão da operação de rotacional, a contribuição ao assunto dos campos magnéticos não deve ser esquecida. Pela lei circuital de Ampère, derivamos uma das equações de Maxwell, $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$. Esta última equação deve ser considerada a forma pontual da lei circuital de Ampère, e é aplicada em uma base "por unidade de área". Nesta seção, deveremos novamente dedicar a maioria do material ao teorema matemático conhecido como teorema de Stokes, mas no processo mostraremos que podemos obter a lei circuital de Ampère a partir de $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$. Em outras palavras, estaremos preparados para obter a forma integral a partir da forma pontual, ou obter a forma pontual a partir da forma integral.

Considere a superfície S da Figura 7.16, que está particionada em superfícies incrementais de área ΔS. Se aplicarmos a definição de rotacional a uma dessas superfícies incrementais, então

$$\frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{\Delta S}}{\Delta S} \doteq (\nabla \times \mathbf{H})_N$$

onde novamente o subscrito N indica a superfície normal dada pela regra da mão direita. O subscrito em $d\mathbf{L}_{\Delta S}$ indica que o caminho fechado é o perímetro de uma área incremental ΔS. Esse resultado também pode ser escrito

$$\frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{\Delta S}}{\Delta S} \doteq (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{a}_N$$

ou

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}_{\Delta S} \doteq (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{a}_N \Delta S = (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \Delta \mathbf{S}$$

onde $\mathbf{a}_N$ é um vetor unitário na direção da normal a ΔS, dada pela regra da mão direita.

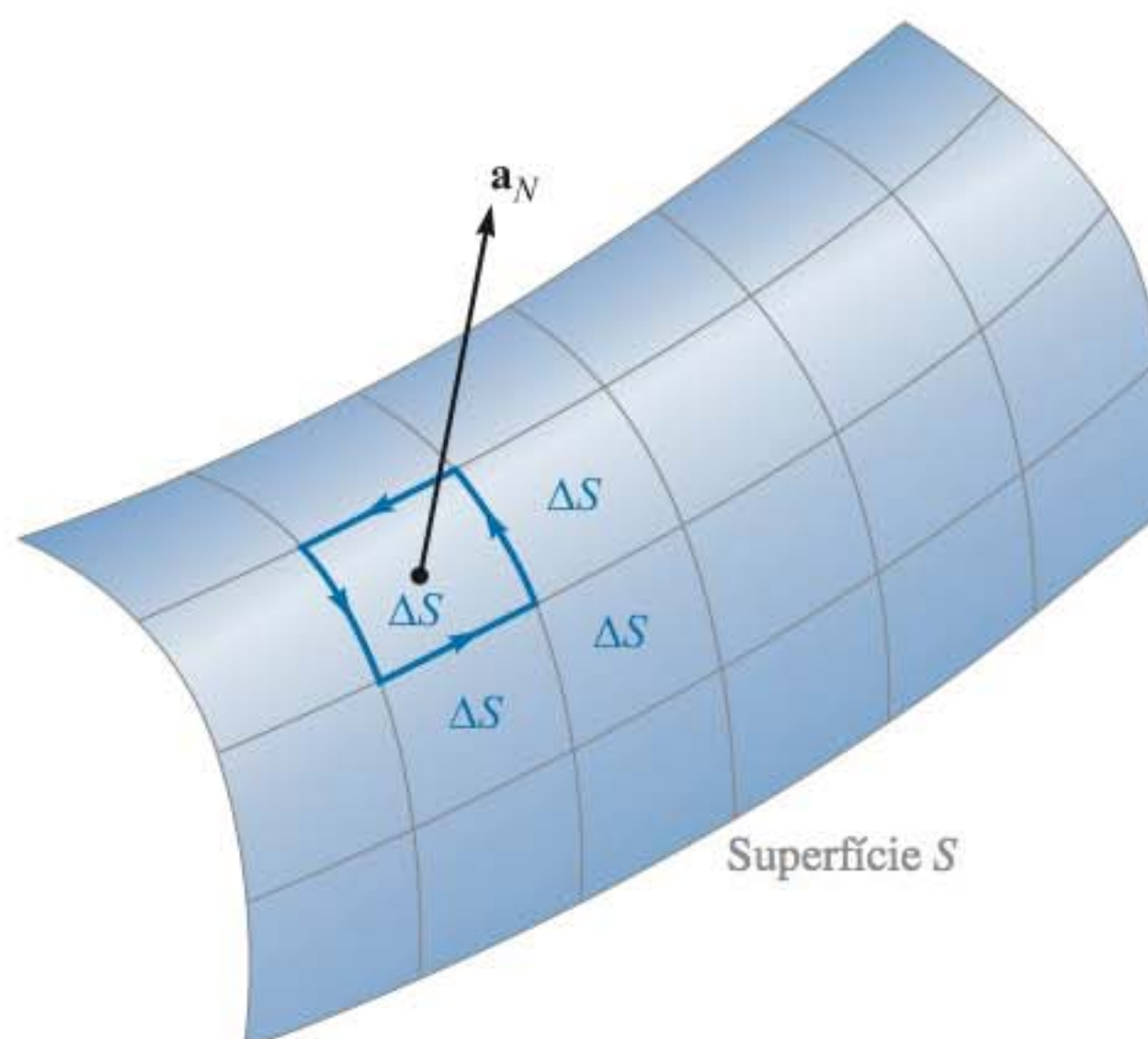



Figura 7.16 A soma das integrais de linha fechada pelo perímetro de cada ΔS é a mesma que a integral de linha fechada ao longo do perímetro de S por causa do cancelamento em cada caminho interior.

Vamos agora determinar a circulação de todos os ΔS que compõem S e somar os resultados. À medida que calcularmos a integral de linha fechada para cada ΔS, alguns cancelamentos irão ocorrer, porque toda parede *interior* é percorrida uma vez em cada direção. As únicas fronteiras nas quais cancelamentos não podem ocorrer formam as fronteiras externas, justamente o caminho que envolve S. Logo, temos

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \equiv \int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} \tag{30}$$

onde $d\mathbf{L}$ é tomado apenas no perímetro de S.

A Equação (30) é uma identidade, valendo para qualquer campo vetorial, e é conhecida como *teorema de Stokes*.

EXEMPLO 7.3

Um exemplo numérico deve ajudar a ilustrar a geometria envolvida no teorema de Stokes. Considere a porção de uma esfera mostrada na Figura 7.17. A superfície é especificada por $r = 4$, $0 \leq \theta \leq 0{,}1\pi$, $0 \leq \phi \leq 0{,}3\pi$, e o caminho fechado, formando seu perímetro, é composto de três arcos circulares. É dado o campo $\mathbf{H} = 6r \operatorname{sen}\phi\, \mathbf{a}_r + 18r \operatorname{sen}\theta \cos\phi\, \mathbf{a}_\phi$, e pede-se que calculemos cada lado do teorema de Stokes.

Solução. O primeiro segmento de caminho é descrito em coordenadas esféricas por $r = 4$, $0 \leq \theta \leq 0{,}1\pi$, $\phi = 0$; o segundo, por $r = 4$, $\theta = 0{,}1\pi$, $0 \leq \phi \leq 0{,}3\pi$ e o terceiro, por $r = 4{,}0 \leq \theta \leq 0{,}1\pi$, $\phi = 0{,}3\pi$. O elemento diferencial de caminho $d\mathbf{L}$ é a soma vetorial dos três comprimentos diferenciais do sistema de coordenadas esféricas, discutido primeiramente na Seção 1.9,

$$d\mathbf{L} = dr\, \mathbf{a}_r + r\, d\theta\, \mathbf{a}_\theta + r \operatorname{sen}\theta\, d\phi\, \mathbf{a}_\phi$$

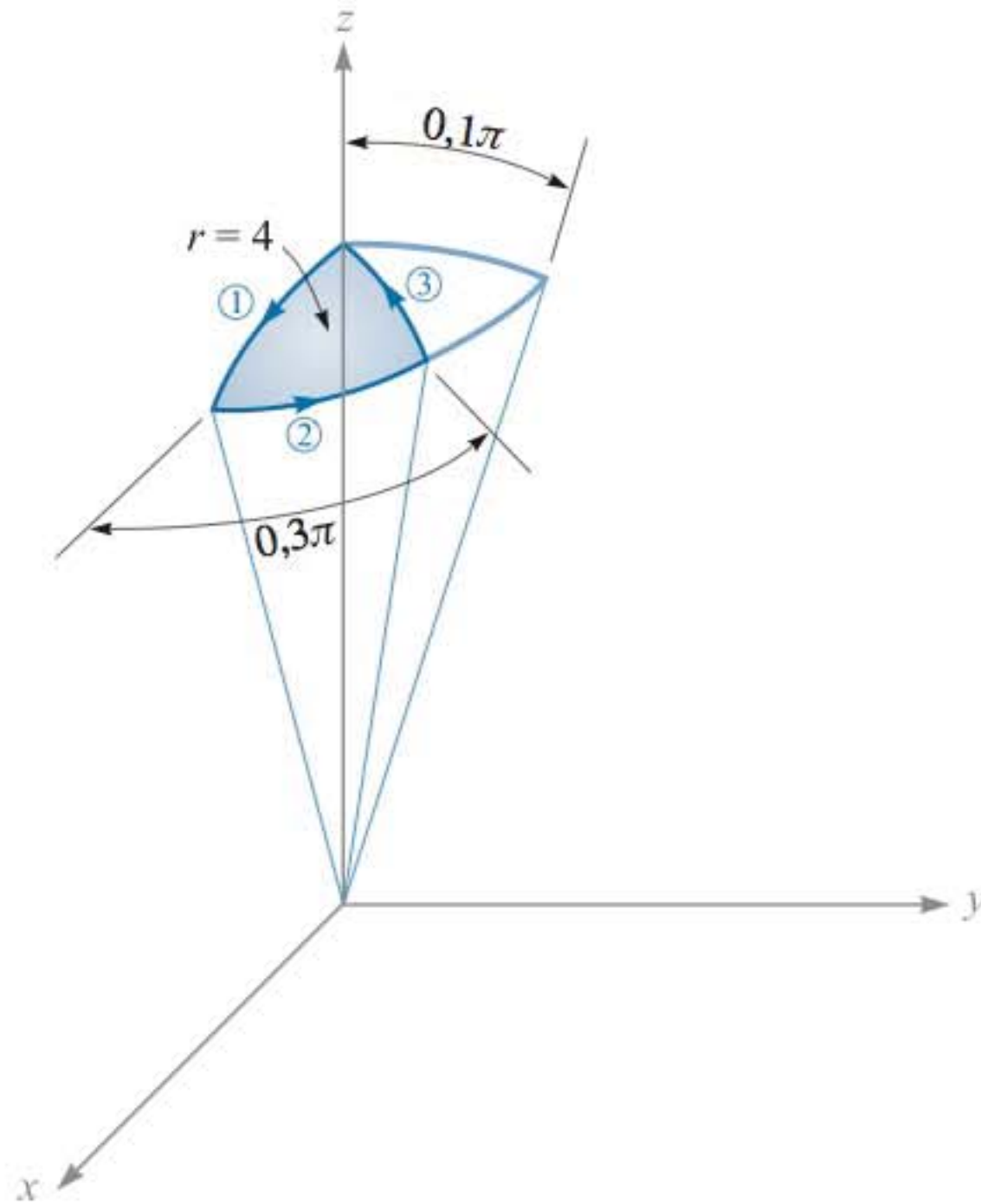



Figura 7.17 Uma porção de uma calota esférica é usada como uma superfície e um caminho fechado para ilustrar o teorema de Stokes.

O primeiro termo é zero em todos os três segmentos do caminho, uma vez que $r = 4$ e $dr = 0$, o segundo é zero no segmento 2, pois θ é constante, e o terceiro termo é zero em ambos os segmentos 1 e 3. Logo,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_1 H_\theta r \, d\theta + \int_2 H_\phi r \operatorname{sen} \theta \, d\phi + \int_3 H_\theta r \, d\theta$$

Uma vez que $H_\theta = 0$, temos apenas a segunda integral para calcular,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^{0,3\pi} [18(4) \operatorname{sen} 0,1\pi \cos \phi] 4 \operatorname{sen} 0,1\pi \, d\phi$$
$$= 288 \operatorname{sen}^2 0,1\pi \operatorname{sen} 0,3\pi = 22,2 \text{ A}$$

Em seguida, resolvemos a integral de superfície. Primeiramente, usamos a Equação (26) para encontrar

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta}(36r \operatorname{sen} \theta \cos \theta \cos \phi)\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} \theta} 6r \cos \phi - 36r \operatorname{sen} \theta \cos \phi\right)\mathbf{a}_\theta$$

Uma vez que $d\mathbf{S} = r^2 \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\phi \, \mathbf{a}_r$, a integral fica

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{0,3\pi} \int_0^{0,1\pi} (36 \cos \theta \cos \phi) 16 \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\phi$$
$$= \int_0^{0,3\pi} 576 \left(\tfrac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \theta\right) \Big|_0^{0,1\pi} \cos \phi \, d\phi$$
$$= 288 \operatorname{sen}^2 0,1\pi \operatorname{sen} 0,3\pi = 22,2 \text{ A}$$

Logo, os resultados comprovam o teorema de Stokes, e notamos de passagem que uma corrente de 22,2 A está circulando, com direção para cima, por meio dessa seção da calota esférica.

A seguir, veremos como é fácil obter a lei circuital de Ampère a partir de $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$. Simplesmente, temos que calcular o produto escalar de cada lado com $d\mathbf{S}$, integrar cada lado ao longo da mesma superfície (aberta) S, e aplicar o teorema de Stokes:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$$

A integral da densidade de corrente sobre a superfície S é a corrente total I que passa por meio da superfície, e assim

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

Essa derivação rápida mostra claramente que a corrente I, descrita como "envolvida pelo caminho fechado", é também a corrente que passa por meio de qualquer uma das infinitas superfícies que possuem o caminho fechado como perímetro.

O teorema de Stokes relaciona uma integral de superfície a uma integral de linha fechada. Deve-se lembrar que o teorema da divergência relaciona uma integral volumétrica com uma integral de superfície fechada. Ambos os teoremas possuem suas maiores aplicações em provas vetoriais genéricas. Como um exemplo, vamos encontrar outra expressão para $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A}$, onde $\mathbf{A}$ representa qualquer campo vetorial. O resultado deve ser um escalar (por quê?), e designaremos esse escalar por T, ou

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = T$$

Multiplicando por dv e integrando em qualquer volume v,

$$\int_{\text{vol}} (\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A})\, dv = \int_{\text{vol}} T\, dv$$

primeiramente, aplicamos o teorema da divergência* no lado esquerdo, obtendo

$$\oint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{vol}} T\, dv$$

O lado esquerdo é a integral de superfície do rotacional de $\mathbf{A}$ sobre uma superfície *fechada* ao redor do volume v. O teorema de Stokes relaciona a integral de superfície do rotacional de $\mathbf{A}$ sobre uma superfície *aberta* limitada por um caminho fechado dado. Se pensarmos no caminho como a abertura de uma sacola de lavanderia e a superfície aberta como a superfície da própria sacola, vemos que à medida que nos aproximamos gradualmente de uma superfície fechada, puxando os laços da boca da sacola, o caminho fechado é cada vez menor e, finalmente, desaparece quando a superfície se torna fechada. Com isso, a aplicação do teorema de Stokes em uma superfície *fechada* produz um resultado igual a zero, e temos

$$\int_{\text{vol}} T\, dv = 0$$

* N. de T.: Denominado também teorema de Gauss.

Uma vez que esse resultado é verdadeiro para qualquer volume, é verdadeiro para o volume diferencial dv,

$$T\,dv = 0$$

e assim

$$T = 0$$

ou

$$\boxed{\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} \equiv 0} \tag{31}$$

A Equação (31) é uma identidade útil do cálculo vetorial.[5] Naturalmente, ela pode também ser provada facilmente por expansão direta em coordenadas cartesianas.

Vamos aplicar a identidade ao campo magnético não variante no tempo para o qual

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

Isso prontamente mostra que

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

cujo resultado é o mesmo que obtivemos anteriormente, quando usamos a equação da continuidade.

Antes de introduzir diversas novas grandezas, relacionadas a campos magnéticos na próxima seção, devemos, neste ponto, rever nossas realizações. Inicialmente, aceitamos a lei de Biot-Savart como um resultado experimental,

$$\mathbf{H} = \oint \frac{I\,d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}$$

e, como tentativa, aceitamos a lei circuital de Ampère, sujeita a prova posterior,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

Da lei circuital de Ampère, a definição de rotacional levou à forma pontual dessa mesma lei,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

Vemos, agora, que o teorema de Stokes nos permite obter a forma integral da lei circuital de Ampère a partir da sua forma pontual.

EP7.6. Calcule ambos os lados do teorema de Stokes para o campo $\mathbf{H} = 6xy\mathbf{a}_x - 3y^2\mathbf{a}_y$ A/m e o caminho retangular ao redor da região, $2 \leq x \leq 5$, $-1 \leq y \leq 1$, $z = 0$. Considere que o sentido positivo de $d\mathbf{S}$ seja $\mathbf{a}_z$.

Resp. -126 A; -126A

[5] Essa e outras identidades vetoriais estão tabuladas no Apêndice A.3.

7.5 FLUXO MAGNÉTICO E DENSIDADE DE FLUXO MAGNÉTICO

No espaço livre, vamos definir a *densidade de fluxo magnético* **B** como

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad \text{(apenas espaço livre)} \tag{32}$$

onde **B** é medido em webers por metro quadrado (Wb/m^2) – ou por uma nova unidade adotada no Sistema Internacional de Unidades, o tesla (T). Uma unidade antiga frequentemente utilizada para a densidade de fluxo elétrico é o gauss (G), na qual 1 T ou 1 Wb/m^2 equivale a 10.000 G. A constante μ_0 não é adimensional e possui o *valor definido* para o espaço livre, em henrys por metro (H/m), de

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m} \tag{33}$$

O nome dado a μ_0 é *permeabilidade* do espaço livre.

Devemos notar que, uma vez que **H** é medido em ampères por metro, o weber é dimensionalmente igual ao produto de henrys por ampères. Considerando o henry como uma nova unidade, o weber é simplesmente uma abreviação conveniente para o produto de henrys por ampères. Quando campos variantes no tempo forem introduzidos, será mostrado que um weber é também equivalente ao produto de volts por segundos.

O vetor densidade de fluxo magnético **B**, como a unidade weber por metro quadrado implica, é um membro da família de campos vetoriais de densidade de fluxo. Uma das possíveis analogias entre campos elétricos e magnéticos[6] compara as leis de Biot-Savart e de Coulomb, estabelecendo assim uma analogia entre **H** e **E**. As relações $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ e $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$, por sua vez, levam a uma analogia entre **B** e **D**. Se **B** é medido em teslas ou weber por metro quadrado, o fluxo magnético deve ser medido em webers. Vamos representar o fluxo magnético por Φ e definir Φ como o fluxo que passa* por qualquer área especificada,

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \text{ Wb} \tag{34}$$

Nossa analogia deve agora nos lembrar do fluxo elétrico Ψ, medido em coulombs, e da lei de Gauss, a qual afirma que o fluxo total que passa por qualquer superfície fechada é igual à carga envolvida,

$$\Psi = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

A carga Q é a fonte das linhas de fluxo elétrico, e essas linhas começam e terminam em cargas positivas e negativas, respectivamente.

[6] Uma analogia alternativa é apresentada na Seção 9.2.

* N. de T.: Ou que *atravessa* qualquer área especificada.

Nenhuma fonte desse tipo jamais foi descoberta para as linhas de fluxo magnético. No exemplo do filamento reto infinitamente longo pelo qual passa uma corrente contínua I, o campo $\mathbf{H}$ formou círculos concêntricos ao redor do filamento. Uma vez que $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$, o campo $\mathbf{B}$ será da mesma forma. As linhas de fluxo magnético são fechadas e não terminam em uma "carga magnética". Por essa razão, a lei de Gauss para o campo magnético é

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \tag{35}$$

e a aplicação do teorema de divergência nos mostra que

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{36}$$

A Equação (36) é a última das quatro equações de Maxwell aplicadas a campos elétricos estáticos e campos magnéticos estacionários. Agrupando essas equações, teremos, para campos elétricos estáticos e campos magnéticos estacionários,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_v \\ \nabla \times \mathbf{E} &= \mathbf{0} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \tag{37}$$

A essas equações devemos adicionar as duas expressões relacionando $\mathbf{D}$ a $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ a $\mathbf{H}$ no espaço livre,

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} \tag{38}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} \tag{39}$$

Também consideramos útil definir um potencial eletrostático,

$$\mathbf{E} = -\nabla V \tag{40}$$

Iremos discutir um potencial para o campo magnético estacionário na próxima seção. Adicionalmente, estendemos nosso estudo de campos elétricos para incluir materiais condutores e dielétricos, e introduzimos a polarização $\mathbf{P}$. Um tratamento similar será aplicado a campos magnéticos no próximo capítulo.

Retornando ao conjunto de Equações (37), deve-se notar que as quatro equações ali representadas especificam o divergente e o rotacional de um campo elétrico e de um campo magnético. O conjunto correspondente de quatro equações integrais que se aplicam a campos elétricos estáticos e campos magnéticos estacionários é

$$
\begin{aligned}
&\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = Q = \int_{\text{vol}} \rho_\nu d\nu \\
&\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = 0 \\
&\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{L} = I = \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} \\
&\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0
\end{aligned}
\tag{41}
$$

Nosso estudo de campos elétricos e magnéticos teria sido muito mais simples se começássemos com o conjunto de Equações (37) ou com o conjunto de Equações (41). Com um bom conhecimento de análise vetorial (o qual, a esta altura, já devemos ter), qualquer um dos dois conjuntos seria obtido prontamente do outro, pela aplicação do teorema da divergência ou do teorema de Stokes. As diversas leis experimentais podem ser facilmente obtidas a partir dessas equações.

Como um exemplo do uso do fluxo e densidade de fluxo associados a campos magnéticos, vamos calcular o fluxo entre condutores da linha coaxial da Figura 7.8*a*. A intensidade de campo magnético já foi encontrada como

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \qquad (a < \rho < b)$$

e assim

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\mathbf{a}_\phi$$

O fluxo magnético contido entre os condutores, em um comprimento d, é o fluxo que atravessa qualquer plano radial que se estende de $\rho = a$ até $\rho = b$ e de, digamos, $z = 0$ a $z = d$

$$\Phi = \int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \int_0^d \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\mathbf{a}_\phi \cdot d\rho\, dz\, \mathbf{a}_\phi$$

ou

$$\Phi = \frac{\mu_0 I d}{2\pi} \ln\frac{b}{a} \tag{42}$$

Essa expressão será utilizada posteriormente para se obter a indutância da linha de transmissão coaxial.

EP7.7. Um condutor sólido de seção reta circular é feito de um material não magnético homogêneo. Se o raio $a = 1$ mm, o eixo do condutor posiciona-se no eixo z e a corrente total na direção $\mathbf{a}_z$ é 20 A, calcule: (*a*) H_ϕ em $\rho = 0{,}5$ mm; (*b*) B_ϕ em $\rho = 0{,}8$ mm; (*c*) o fluxo magnético total por unidade de comprimento dentro do condutor; (*d*) o fluxo total para $\rho < 0{,}5$ mm; (*e*) o fluxo magnético total fora do condutor.

Resp. 1.592 A/m; 3,2 mT; 2 μWb/m; 0,5 μWb; ∞

7.6 POTENCIAIS ESCALAR E VETOR MAGNÉTICOS

A solução de problemas de campos eletrostáticos é grandemente simplificada pelo uso do potencial escalar eletrostático V. Apesar de esse potencial possuir um significado físico muito real para nós, matematicamente não é mais que um ponto de partida que nos permite resolver um problema em passos muito menores. Se nos for dada uma configuração de carga, primeiramente encontraremos o potencial, e então, a partir deste, a intensidade de campo elétrico.

Devemos questionar se existe ou não um tipo de ajuda como essa disponível referente aos campos magnéticos. Podemos definir uma função potencial que possa ser encontrada a partir da distribuição de corrente e a partir da qual os campos magnéticos possam ser facilmente determinados? Há como definir um potencial escalar magnético, de forma similar ao potencial escalar eletrostático? Vamos mostrar, nas próximas páginas, que a resposta à primeira pergunta é sim, mas que a segunda deve ser respondida com um "às vezes". Abordaremos a segunda pergunta primeiro, considerando a existência de um potencial escalar magnético, o qual designaremos por V_m, cujo negativo do gradiente nos dá a intensidade de campo magnético.

$$\mathbf{H} = -\nabla V_m$$

A escolha do negativo do gradiente proporcionará uma analogia mais próxima do potencial elétrico e dos problemas que já resolvemos.

Essa definição não pode conflitar com nossos resultados anteriores para o campo magnético, e assim

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} = \nabla \times (-\nabla V_m)$$

Entretanto, o rotacional do gradiente de qualquer escalar é igual a zero (uma identidade vetorial cuja prova é deixada para um oportuno momento de lazer). Dessa forma, vemos que se $\mathbf{H}$ for definido como o gradiente de um potencial escalar magnético, a densidade de corrente deverá ser zero em toda a região em que o potencial escalar magnético for definido. Temos então

$$\boxed{\mathbf{H} = -\nabla V_m \quad (\mathbf{J} = 0)} \tag{43}$$

Uma vez que muitos problemas magnéticos envolvem geometrias nas quais condutores de corrente ocupam uma fração relativamente pequena da região total de interesse, é evidente que um potencial escalar magnético pode ser útil. O potencial escalar magnético é também aplicável no caso de ímãs permanentes. As dimensões de V_m são obviamente ampères.

Esse potencial escalar também satisfaz a equação de Laplace. No espaço livre,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

e assim

$$\mu_0 \nabla \cdot (-\nabla V_m) = 0$$

ou

$$\boxed{\nabla^2 V_m = 0 \quad (\mathbf{J} = \mathbf{0})} \tag{44}$$

Veremos mais tarde que V_m continua a satisfazer à equação de Laplace em materiais magnéticos homogêneos, e que não é definido em qualquer região na qual uma densidade de corrente esteja presente.

Consideraremos o potencial escalar magnético de uma forma muito mais ampla no Capítulo 8, quando introduzirmos os materiais magnéticos e discutirmos o circuito magnético; apesar disso, uma diferença entre V e V_m deve ser destacada agora: V_m não é uma função de um único valor em relação à posição. O potencial elétrico V possui apenas um valor. Uma vez que um zero de referência é definido, existe apenas um valor de V associado a cada ponto do espaço. Esse não é o caso com V_m. Considere a seção reta da linha coaxial mostrada na Figura 7.18. Na região, $a < \rho < b$, $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, e podemos estabelecer um potencial magnético escalar. O valor de $\mathbf{H}$ é

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\mathbf{a}_\phi$$

onde I é a corrente total que flui na direção $\mathbf{a}_z$ no condutor interno. Vamos encontrar V_m integrando o componente apropriado do gradiente. Aplicando a Equação (43),

$$\frac{I}{2\pi\rho} = -\nabla V_m\Big|_\phi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_m}{\partial \phi}$$

ou

$$\frac{\partial V_m}{\partial \phi} = -\frac{I}{2\pi}$$

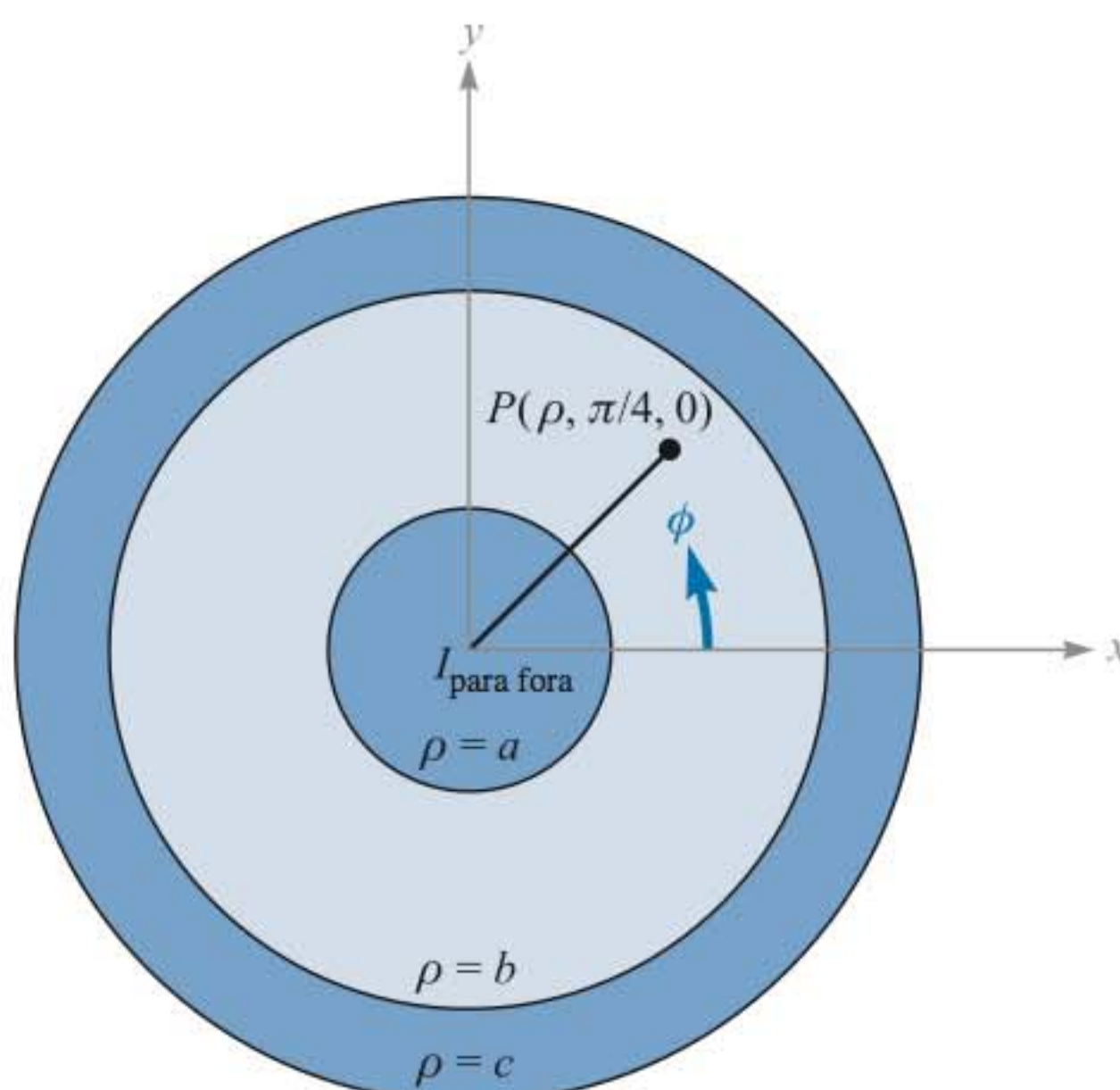



Figura 7.18 O potencial escalar magnético V_m é uma função de ϕ de muitos valores na região $a < \rho < b$. O potencial eletrostático é sempre de valor único.

Logo,

$$V_m = -\frac{I}{2\pi}\phi$$

onde a constante de integração foi considerada igual a zero. Qual valor de potencial devemos associar ao ponto P, onde $\phi = \pi/4$? Se tomarmos V_m por zero em $\phi = 0$ e caminharmos no sentido anti-horário ao redor do círculo, o potencial magnético se tornará linearmente negativo. Quando tivermos completado uma volta, o potencial será $-I$, mas esse era o ponto no qual dissemos, há poucos instantes, que o potencial valia zero. No ponto P, então, $\phi = \pi/4, 9\pi/4, 17\pi/4, \ldots$, ou $-7\pi/4, -15\pi/4, -23\pi/4, \ldots$, ou

$$V_{mP} = \frac{I}{2\pi}\left(2n - \tfrac{1}{4}\right)\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

ou

$$V_{mP} = I\left(n - \tfrac{1}{8}\right) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

A razão para esses diversos valores pode ser mostrada por comparação com o caso eletrostático. Naquele caso, sabemos que

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

e, com isso, a integral de linha

$$V_{ab} = -\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

é independente do caminho. No caso magnetostático, entretanto,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0} \quad (\text{sempre que } \mathbf{J} = \mathbf{0})$$

mas

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

mesmo se $\mathbf{J}$ for zero ao longo do caminho de integração. Toda vez que fizermos outra volta completa ao redor da corrente, o resultado da integração aumenta de I. Se nenhuma corrente I é envolvida pelo caminho, então uma função potencial de valor único pode ser definida. Entretanto, geralmente

$$V_{m,ab} = -\int_b^a \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \quad (\text{caminho especificado}) \tag{45}$$

onde um caminho específico ou tipo de caminho deve ser selecionado. Devemos nos lembrar que o potencial eletrostático V é um campo conservativo. O potencial escalar magnético V_m não é um campo conservativo. Em nosso problema coaxial levantaremos uma barreira[7] em $\phi = \pi$. Vamos concordar em não selecionar um caminho que

[7] Isso corresponde ao termo matemático mais preciso "ramo interrompido".

passe por esse plano. Dessa forma, não podemos circular I, e um potencial de valor único é possível. O resultado é visto como

$$V_m = -\frac{I}{2\pi}\phi \quad (-\pi < \phi < \pi)$$

e

$$V_{mP} = -\frac{I}{8} \quad \left(\phi = \frac{\pi}{4}\right)$$

O potencial escalar magnético é, evidentemente, a grandeza cujas superfícies equipotenciais formarão quadrados curvilíneos com as linhas de força de **H** na Figura 7.4. Essa é mais uma faceta da analogia entre campos elétricos e magnéticos, sobre a qual teremos mais a dizer no próximo capítulo.

Vamos agora, temporariamente, deixar o potencial escalar magnético e investigar um potencial vetor magnético. Esse campo vetorial é extremamente útil no estudo de radiação de antenas (conforme constataremos no Capítulo 14), perdas por radiação de linhas de transmissão, guias de onda e fornos de micro-ondas. O potencial vetor magnético pode ser utilizado em regiões onde a densidade de corrente é nula ou não nula, e poderemos também estendê-lo, posteriormente, para o caso da variação temporal.

Nossa escolha de um potencial vetor magnético é indicada pela notação

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Em seguida, uma identidade vetorial, que provamos na Seção 7.4, mostra que a divergência do rotacional de qualquer campo vetorial é zero. Dessa forma, selecionamos

$$\boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}} \tag{46}$$

onde **A** significa um *potencial vetor magnético* e, automaticamente, satisfaz à condição de que a densidade de fluxo magnético deve ter divergência nula. O campo **H** é

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{A}$$

e

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$$

O rotacional do rotacional de um campo vetorial não é zero, e é dado por uma expressão bastante complicada,[8] a qual não precisamos conhecer agora em sua forma geral. Em casos específicos para os quais a forma de **A** é conhecida, a operação de rotacional pode ser aplicada duas vezes para determinar a densidade de corrente.

[8] $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \equiv \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$. Em coordenadas cartesianas, pode-se mostrar que $\nabla^2\mathbf{A} \equiv \nabla^2 A_x\mathbf{a}_x + \nabla^2 A_y\mathbf{a}_y + \nabla^2 A_z\mathbf{a}_z$. Em outros sistemas de coordenadas, $\nabla^2\mathbf{A}$ pode ser encontrado calculando-se as derivadas parciais de segunda ordem em $\nabla^2\mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$.

A Equação (46) serve como uma definição útil do *potencial vetor magnético* **A**. Uma vez que a operação rotacional implica diferenciação com relação a um comprimento, as unidades de **A** são webers por metro*.

Até agora vimos apenas que a definição de **A** não conflita com nenhum resultado anterior. Ainda falta mostrar que essa definição em particular pode nos ajudar a determinar campos magnéticos de forma mais fácil. Certamente, não podemos identificar **A** com nenhuma grandeza facilmente medida ou experimento histórico.

Vamos mostrar na Seção 7.7 que, dada a lei de Biot-Savart e a partir da definição de **B** e da definição de **A**, **A** pode ser determinado pelos elementos diferenciais de corrente por

$$\mathbf{A} = \oint \frac{\mu_0 I \, d\mathbf{L}}{4\pi R} \tag{47}$$

O significado dos termos na Equação (47) é o mesmo que na lei de Biot-Savart. Uma corrente contínua I circula ao longo de um condutor filamentar, no qual cada comprimento diferencial $d\mathbf{L}$ está a uma distância R do ponto onde **A** deve ser calculado. Já que definimos **A** apenas pela especificação do seu rotacional, é possível adicionar o gradiente de qualquer campo escalar à Equação (47) sem provocar mudanças em **B** ou **H**, pois o rotacional do gradiente é zero. Em campos magnéticos estacionários, geralmente define-se esse termo possível de ser adicionado como zero.

O fato de **A** ser um *potencial* vetor magnético é mais aparente quando a Equação (47) é comparada com a expressão similar para o potencial eletrostático,

$$V = \int \frac{\rho_L dL}{4\pi \epsilon_0 R}$$

Cada expressão é a integral ao longo de uma fonte distribuída em uma linha; no caso eletrostático, a fonte corresponde a uma linha de cargas, e no magnético estacionário, a uma linha de corrente. Cada integrando é inversamente proporcional à distância da fonte ao ponto de interesse, e cada um envolve uma característica do meio (neste caso, o espaço livre), a permeabilidade ou a permissividade.

A Equação (47) pode ser escrita na forma diferencial,

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I \, d\mathbf{L}}{4\pi R} \tag{48}$$

se, novamente, concordarmos em não atribuir qualquer significado físico a quaisquer campos magnéticos que obtenhamos da Equação (48), até que *o caminho fechado inteiro no qual a corrente circula seja considerado*.

Cientes dessa condição, vamos em frente e consideremos o campo potencial vetor magnético em volta de um filamento diferencial. Posicionamos o filamento na origem no espaço livre, conforme mostrado na Figura 7.19, e permitimos que o mesmo se estenda no sentido positivo de z de forma que $d\mathbf{L} = dz\, \mathbf{a}_z$. Utilizaremos coordenadas cilíndricas para encontrar $d\mathbf{A}$ no ponto (ρ, ϕ, z):

* N. de T.: Wb/m.

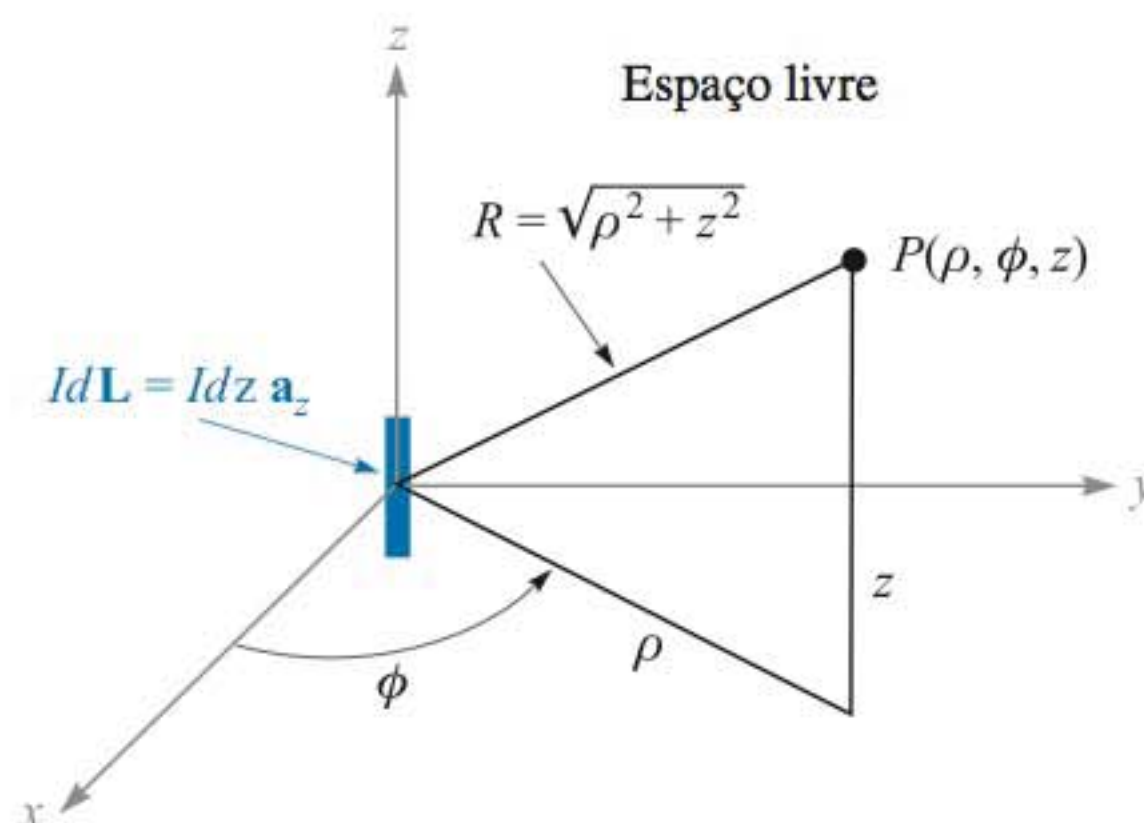



Figura 7.19 O elemento diferencial de corrente $I\,dz\mathbf{a}_z$ na origem estabelece o campo potencial vetor magnético diferencial $d\mathbf{A} = \dfrac{\mu_0 I\,dz\mathbf{a}_z}{4\pi\sqrt{\rho^2+z^2}}$ em $P(\rho, \phi, z)$.

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I\,dz\,\mathbf{a}_z}{4\pi\sqrt{\rho^2+z^2}}$$

ou

$$dA_z = \frac{\mu_0 I\,dz}{4\pi\sqrt{\rho^2+z^2}} \quad dA_\phi = 0 \quad dA_\rho = 0 \tag{49}$$

Ilustração

Notamos que a direção de $d\mathbf{A}$ é a mesma que a de $I\,d\mathbf{L}$. Cada pequena seção de um condutor de corrente produz uma contribuição para o potencial vetor magnético total que está na mesma direção e sentido da circulação da corrente no condutor. A intensidade do potencial vetor magnético varia inversamente com a distância ao elemento de corrente; é mais forte na vizinhança da corrente e gradualmente cai a zero em pontos distantes. Skilling[9] descreve o potencial vetor magnético como "similar à distribuição de corrente, mas indistinto nas bordas, ou como uma fotografia fora de foco da corrente".

Com o objetivo de encontrarmos a intensidade de campo magnético, devemos tomar o rotacional da Equação (49) em coordenadas cilíndricas, levando a

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times d\mathbf{A} = \frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{\partial dA_z}{\partial \rho}\right)\mathbf{a}_\phi$$

ou

$$d\mathbf{H} = \frac{I\,dz}{4\pi}\frac{\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\mathbf{a}_\phi$$

que pode ser facilmente mostrado que esse é o mesmo valor dado pela lei de Biot-Savart.

Expressões para o potencial vetor magnético $\mathbf{A}$ podem também ser obtidas para uma fonte de corrente que está distribuída. Para uma lâmina de corrente $\mathbf{K}$, o elemento diferencial de corrente se torna

$$I\,d\mathbf{L} = \mathbf{K}\,dS$$

No caso da circulação de corrente por um volume com densidade $\mathbf{J}$, temos

[9] Ver Referências no final deste capítulo.

$$I\,d\mathbf{L} = \mathbf{J}\,dv$$

Em cada uma dessas duas expressões, a característica vetorial é dada à corrente. Para o elemento filamentar é normal, apesar de não ser necessário, usar $I\,d\mathbf{L}$ em vez de $\mathbf{I}\,dL$. Uma vez que a intensidade do elemento filamentar é constante, escolhemos a forma que nos permite remover uma grandeza da integral. As expressões alternativas para **A** são então

$$\mathbf{A} = \int_S \frac{\mu_0 \mathbf{K}\,dS}{4\pi R} \tag{50}$$

e

$$\mathbf{A} = \int_{\text{vol}} \frac{\mu_0 \mathbf{J}\,dv}{4\pi R} \tag{51}$$

As Equações (47), (50) e (51) expressam o potencial vetor magnético como uma integração abrangendo todas as suas fontes. Fazendo uma comparação da forma dessas integrais com aquelas que levaram ao potencial eletrostático, é mais uma vez evidente que o zero de referência para o **A** está no infinito, pois nenhum elemento finito de corrente pode produzir alguma contribuição à medida que $R \to \infty$. Devemos nos lembrar que muito raramente utilizamos as expressões similares para V, mas foi com bastante frequência que, nossos problemas teóricos incluíram distribuições de cargas que se estendiam até o infinito, e assim o resultado foi um potencial infinito em qualquer lugar. Na verdade, calculamos poucos campos potenciais até que a forma diferencial da equação do potencial fosse obtida: $\nabla^2 V = -\rho_v/\epsilon$ ou, melhor ainda, $\nabla^2 V = 0$. Estávamos então livres para selecionar nosso próprio zero de referência.

As expressões análogas para **A** serão derivadas na próxima seção, e estudaremos um exemplo do cálculo de um campo potencial vetor magnético.

EP7.8. Uma lâmina de corrente $\mathbf{K} = 2{,}4\mathbf{a}_z$ A/m está presente na superfície $\rho = 3{,}05$ cm no espaço livre. (*a*) Calcule **H** para $\rho > 3{,}05$. Calcule V_m em $P(\rho = 3{,}81, \phi = 0{,}6\pi, z = 2{,}54)$ se: (*b*) $V_m = 0$ em $\phi = 0$ e existe uma barreira em $\phi = \pi$; (*c*) $V_m = 0$ em $\phi = 0$ e existe uma barreira em $\phi = \pi/2$; (*d*) $V_m = 0$ em $\phi = \pi$ e existe uma barreira em $\phi = 0$; (*e*) $V_m = 5$ A em $\phi = \pi$ e existe uma barreira em $\phi = 0{,}8\pi$.

Resp. $\dfrac{2{,}88}{\rho}\mathbf{a}_\phi$; −5,43 A; 12,7 A; 3,62 A; −9,48 A

EP7.9. O valor de **A** dentro de um condutor sólido não magnético de raio a pelo qual circula uma corrente total de I na direção $\mathbf{a}_z$ pode ser facilmente encontrado. Utilizando o valor conhecido de **H** ou **B** para $\rho < a$, a Equação (46) pode ser resolvida, encontrando-se **A**. Selecione $A = (\mu_0 I \ln 5)/2\pi$ em $\rho = a$ (para corresponder a um exemplo na próxima seção) e calcule **A** em $\rho =$: (*a*) 0, (*b*) 0,25a; (*c*) 0,75a; (*d*) a.

Resp. $0{,}422I\mathbf{a}_z\ \mu$Wb/m; $0{,}416I\mathbf{a}_z\ \mu$Wb/m; $0{,}366I\mathbf{a}_z\ \mu$Wb/m; $0{,}322I\mathbf{a}_z\ \mu$Wb/m

7.7 DERIVAÇÃO DAS LEIS DO CAMPO MAGNÉTICO ESTACIONÁRIO

Vamos agora fornecer as provas prometidas das várias relações entre as grandezas relacionadas ao campo magnético. Todas essas relações podem ser obtidas pela definição de **H**,

$$\mathbf{H} = \oint \frac{I\,d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} \tag{3}$$

de **B** (no espaço livre),

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \tag{32}$$

e de **A**,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{46}$$

Vamos, primeiramente, considerar que **A** pode ser expresso pela última equação da Seção 7.6,

$$\mathbf{A} = \int_{\text{vol}} \frac{\mu_0 \mathbf{J}\,dv}{4\pi R} \tag{51}$$

e depois demonstrar que a Equação (51) é correta e que a Equação (3) deriva dela. Primeiramente, devemos adicionar subscritos para indicar o ponto no qual o elemento de corrente está posicionado (x_1, y_1, z_1) e o ponto no qual **A** é dado (x_2, y_2, z_2). Depois, escrevemos o elemento diferencial de volume dv como dv_1 representado em coordenadas cartesianas por $dx_1\,dy_1\,dz_1$. As variáveis de integração são x_1, y_1 e z_1. Utilizando esses subscritos,

$$\mathbf{A}_2 = \int_{\text{vol}} \frac{\mu_0 \mathbf{J}_1 dv_1}{4\pi R_{12}} \tag{52}$$

Das Equações (32) e (46), temos

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{\nabla \times \mathbf{A}}{\mu_0} \tag{53}$$

Para mostrar que a Equação (3) deriva da Equação (52), é necessário substituir a Equação (52) na Equação (53). Esse passo requer considerar o rotacional de $\mathbf{A}_2$, uma grandeza expressa pelas variáveis x_2, y_2 e z_2, assim, o rotacional envolverá derivadas parciais com relação a x_2, y_2 e z_2. Fazemos isso colocando um subscrito no operador nabla para nos lembrar das variáveis envolvidas no processo de derivação parcial,

$$\mathbf{H}_2 = \frac{\nabla_2 \times \mathbf{A}_2}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \nabla_2 \times \int_{\text{vol}} \frac{\mu_0 \mathbf{J}_1 dv_1}{4\pi R_{12}}$$

A ordem da diferenciação e integração parciais não importa, e $\mu_0/4\pi$ é constante, permitindo-nos escrever

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{vol}} \nabla_2 \times \frac{\mathbf{J}_1 dv_1}{R_{12}}$$

A operação de rotacional dentro do integrando representa diferenciações parciais com relação a x_2, y_2 e z_2. O elemento diferencial de volume d_{v1} é um escalar e é uma

função apenas de x_1, y_1 e z_1. Consequentemente, pode ser colocado fora da operação de rotacional como qualquer outra constante, resultando em

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{vol}} \left(\nabla_2 \times \frac{\mathbf{J}_1}{R_{12}} \right) d\nu_1 \tag{54}$$

O rotacional do produto de um escalar por um vetor é dado por uma identidade que pode ser verificada por expansão em coordenadas cartesianas ou obtida no Apêndice A.3,

$$\nabla \times (S\mathbf{V}) \equiv (\nabla S) \times \mathbf{V} + S(\nabla \times \mathbf{V}) \tag{55}$$

Essa identidade é utilizada para expandir o integrando da Equação (54),

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{vol}} \left[\left(\nabla_2 \frac{1}{R_{12}} \right) \times \mathbf{J}_1 + \frac{1}{R_{12}} (\nabla_2 \times \mathbf{J}_1) \right] d\nu_1 \tag{56}$$

O segundo termo desse integrando é zero, porque $\nabla_2 \times \mathbf{J}_1$ indica derivadas parciais de uma função de x_1, y_1 e z_1 tomadas com relação às variáveis x_2, y_2 e z_2. O primeiro conjunto de variáveis não é uma função do segundo conjunto, e todas as derivadas parciais são zero.

O primeiro termo do integrando pode ser determinado expressando-se R_{12} pelos valores coordenados,

$$R_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

e tomando-se o gradiente de seu recíproco. O Problema 7.42 mostra que o resultado é

$$\nabla_2 \frac{1}{R_{12}} = -\frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}^3} = -\frac{\mathbf{a}_{R12}}{R_{12}^2}$$

Substituindo esse resultado na Equação (56), temos

$$\mathbf{H}_2 = -\frac{1}{4\pi} \int_{\text{vol}} \frac{\mathbf{a}_{R12} \times \mathbf{J}_1}{R_{12}^2} d\nu_1$$

ou

$$\mathbf{H}_2 = \int_{\text{vol}} \frac{\mathbf{J}_1 \times \mathbf{a}_{R12}}{4\pi R_{12}^2} d\nu_1$$

que é o equivalente à Equação (3) se considerarmos a densidade de corrente. Substituindo $\mathbf{J}_1\, d\nu_1$ por $I_1\, d\mathbf{L}_1$, podemos reescrever a integral volumétrica como uma integral de linha fechada,

$$\mathbf{H}_2 = \oint \frac{I_1 d\mathbf{L}_1 \times \mathbf{a}_{R12}}{4\pi R_{12}^2}$$

Portanto, a Equação (51) é correta, e está de acordo com as três definições das Equações (3), (32) e (46).

Em seguida, provaremos a lei circuital de Ampère na forma pontual,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \tag{28}$$

Combinando as Equações (28), (32) e (46), obtemos

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \tag{57}$$

Agora precisamos da expansão em coordenadas cartesianas para $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$. Realizando as diferenciações parciais indicadas e agrupando os termos resultantes, podemos escrever o resultado como

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \equiv \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \tag{58}$$

onde

$$\nabla^2 \mathbf{A} \equiv \nabla^2 A_x \mathbf{a}_x + \nabla^2 A_y \mathbf{a}_y + \nabla^2 A_z \mathbf{a}_z \tag{59}$$

A Equação (59) é a definição (em coordenadas cartesianas) do *Laplaciano de um vetor*.

Substituindo a Equação (58) na Equação (57), temos

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}[\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}] \tag{60}$$

agora, precisaremos de expressões para a divergência e para o Laplaciano de $\mathbf{A}$.

Podemos encontrar o divergente de $\mathbf{A}$ aplicando a operação de divergência à Equação (52),

$$\nabla_2 \cdot \mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{vol}} \nabla_2 \cdot \frac{\mathbf{J}_1}{R_{12}} dv_1 \tag{61}$$

e usando a identidade vetorial presente na Equação (43) da Seção 4.8,

$$\nabla \cdot (S\mathbf{V}) \equiv \mathbf{V} \cdot (\nabla S) + S(\nabla \cdot \mathbf{V})$$

Logo,

$$\nabla_2 \cdot \mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{vol}} \left[\mathbf{J}_1 \cdot \left(\nabla_2 \frac{1}{R_{12}} \right) + \frac{1}{R_{12}} (\nabla_2 \cdot \mathbf{J}_1) \right] dv_1 \tag{62}$$

A segunda parte do integrando é zero porque $\mathbf{J}_1$ não é uma função de x_2, y_2 e z_2.

Já utilizamos o resultado $\nabla_2(1/R_{12}) = -\mathbf{R}_{12}/R_{12}^3$, e pode-se mostrar com a mesma facilidade que

$$\nabla_1 \frac{1}{R_{12}} = \frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}^3}$$

ou que

$$\nabla_1 \frac{1}{R_{12}} = -\nabla_2 \frac{1}{R_{12}}$$

Assim, a Equação (62) pode ser escrita como

$$\nabla_2 \cdot \mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{vol}} \left[-\mathbf{J}_1 \cdot \left(\nabla_1 \frac{1}{R_{12}} \right) \right] dv_1$$

e a identidade vetorial pode ser aplicada novamente,

$$\nabla_2 \cdot \mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{vol}} \left[\frac{1}{R_{12}} (\nabla_1 \cdot \mathbf{J}_1) - \nabla_1 \cdot \left(\frac{\mathbf{J}_1}{R_{12}} \right) \right] dv_1 \tag{63}$$

Uma vez que estamos interessados apenas em campos magnéticos estacionários, a equação da continuidade mostra que o primeiro termo da Equação (63) é zero. A aplicação do teorema de divergência ao segundo termo resulta em

$$\nabla_2 \cdot \mathbf{A}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_1} \frac{\mathbf{J}_1}{R_{12}} \cdot d\mathbf{S}_1$$

onde a superfície S_1 envolve o volume no qual estamos integrando. Esse volume deve conter toda a corrente, pois a expressão integral original para **A** era uma integração de modo a incluir o efeito de toda a corrente. Uma vez que não existe corrente do lado de fora desse volume (para isso teríamos que ter aumentado o volume para incluí-la), podemos integrar em um volume ligeiramente maior, ou em uma superfície envolvente ligeiramente maior, sem mudar **A**. Nessa superfície maior, a densidade de corrente $\mathbf{J}_1$ deve ser zero; com isso, a integral de superfície fechada também deve ser zero, desde que o integrando também seja zero. Logo, o divergente de **A** é zero.

Com o objetivo de se encontrar o Laplaciano do vetor **A**, vamos comparar o componente em x da Equação (51) com a expressão similar para o potencial eletrostático,

$$A_x = \int_{\text{vol}} \frac{\mu_0 J_x dv}{4\pi R} \qquad V = \int_{\text{vol}} \frac{\rho_v \, dv}{4\pi \epsilon_0 R}$$

Notamos que uma expressão pode ser obtida da outra mediante uma mudança direta de variáveis, J_x por ρ_v, μ_0 por $1/\epsilon_0$ e A_x por V. Entretanto, derivamos informações adicionais sobre o potencial eletrostático que não repetiremos aqui para o componente em x do potencial vetor magnético. Assim, chegamos na forma da equação de Poisson,

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0}$$

que se torna, após uma mudança de variáveis,

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x$$

De forma similar, temos

$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y$$

e

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$$

ou

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}} \tag{64}$$

Retornando à Equação (60), podemos agora substituir a divergência e o Laplaciano de **A** e obter a resposta desejada,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \tag{28}$$

Já mostramos o uso do teorema de Stokes na obtenção da forma integral da lei circuital de Ampère a partir da Equação (28), e não precisamos repetir essa tarefa aqui.

Tivemos sucesso em mostrar que todos os resultados associados a campos magnéticos que obtivemos para o ar rarefeito[10] derivam das definições básicas de **H**, **B** e **A**. As derivações não são simples, mas devem ser compreensíveis após uma consideração passo a passo.

Finalmente, vamos retornar à Equação (64) e fazer uso dessa formidável equação vetorial diferencial parcial de segunda ordem, para encontrar o potencial vetor magnético em um exemplo simples. Selecionamos o campo entre condutores em um cabo coaxial, com raios a e b (como é de praxe) e corrente I na direção $\mathbf{a}_z$ no condutor interno. Entre os condutores, $\mathbf{J} = 0$ e, com isso,

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0$$

Já foi dito (e o Problema 7.44 dá a oportunidade de verificar os resultados) que o Laplaciano vetorial pode ser expandido como a soma vetorial dos Laplacianos escalares dos três componentes em coordenadas cartesianas,

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 A_x \mathbf{a}_x + \nabla^2 A_y \mathbf{a}_y + \nabla^2 A_z \mathbf{a}_z$$

mas tal resultado, relativamente simples, não é possível em outros sistemas de coordenadas, tais como as cilíndricas, por exemplo,

$$\nabla^2 \mathbf{A} \neq \nabla^2 A_\rho \mathbf{a}_\rho + \nabla^2 A_\phi \mathbf{a}_\phi + \nabla^2 A_z \mathbf{a}_z$$

Entretanto, não é difícil mostrar que, para coordenadas cilíndricas, o componente em z do Laplaciano vetorial é o Laplaciano escalar do componente de **A** em z, ou

$$\nabla^2 \mathbf{A}\Big|_z = \nabla^2 A_z \tag{65}$$

uma vez que a corrente está inteiramente na direção z neste problema, **A** tem apenas um componente z. Logo,

$$\nabla^2 A_z = 0$$

ou

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = 0$$

Pensando na simetria da Equação (51), vemos que A_z é função apenas de ρ, e com isso

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dA_z}{d\rho}\right) = 0$$

Já resolvemos essa equação antes, e o resultado é

$$A_z = C_1 \ln \rho + C_2$$

Se escolhermos um zero de referência em $\rho = b$, então

$$A_z = C_1 \ln \frac{\rho}{b}$$

[10] Espaço livre.

Com o objetivo de relacionar C_1 com as fontes no nosso problema, temos que tomar o rotacional de **A**,

$$\nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho}\mathbf{a}_\phi = -\frac{C_1}{\rho}\mathbf{a}_\phi = \mathbf{B}$$

obter **H**,

$$\mathbf{H} = -\frac{C_1}{\mu_0 \rho}\mathbf{a}_\phi$$

e calcular a integral de linha,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I = \int_0^{2\pi} -\frac{C_1}{\mu_0 \rho}\mathbf{a}_\phi \cdot \rho\, d\phi\, \mathbf{a}_\phi = -\frac{2\pi C_1}{\mu_0}$$

Logo

$$C_1 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}$$

ou

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{b}{\rho} \tag{66}$$

e

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}$$

como antes. Um gráfico de A_z *versus* ρ para $b = 5a$ é mostrado na Figura 7.20. A diminuição de $|\mathbf{A}|$ com a distância a partir da fonte de corrente concentrada, representada pelo condutor interno, é evidente. Os resultados do Exercício Proposto 7.9 também foram adicionados à Figura 7.20. A extensão da curva para dentro do condutor externo é deixada para o Problema 7.43.

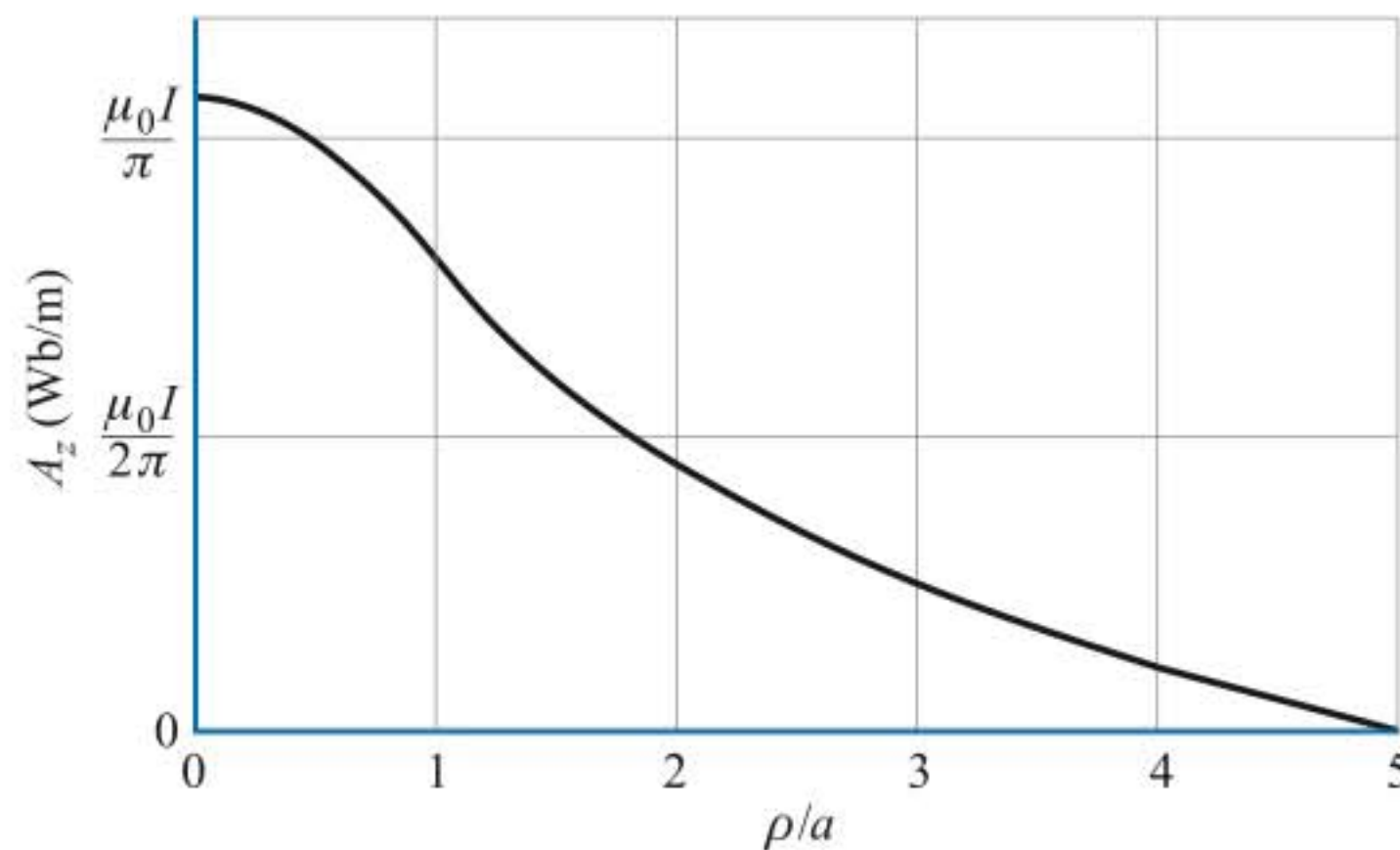



Figura 7.20 O potencial vetor magnético é mostrado dentro do condutor interno e na região entre condutores para um cabo coaxial com $b = 5a$ no qual circula uma corrente I na direção $\mathbf{a}_z$. $A_z = 0$ é arbitrariamente selecionado em $\rho = b$.

Também é possível encontrar A_z entre os condutores aplicando-se um processo informalmente denominado "irrotacional". Isto é, conhecendo **H** ou **B** para o cabo coaxial, podemos selecionar o componente em ϕ de $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ e integrar para obter A_z. Tente fazê-lo, você vai gostar!

EP7.10. A Equação (66) também é obviamente aplicável ao exterior de qualquer condutor de seção reta circular pelo qual passe uma corrente I na direção $\mathbf{a}_z$, no espaço livre. O zero de referência é arbitrariamente escolhido em $\rho = b$. Considere agora dois condutores, cada um com 1 cm de raio, paralelos ao eixo z e com seus eixos pertencentes ao plano $x = 0$. Um dos condutores, cujo eixo está em (0, 4 cm, z), possui uma corrente de 12 A na direção $\mathbf{a}_z$. O outro eixo está em (0, -4 cm, z) e possui uma corrente de 12 A na direção $-\mathbf{a}_z$. Cada corrente possui seu zero de referência para **A** posicionado a 4 cm de seu eixo. Calcule o campo **A** total em: (*a*) (0, 0, z); (*b*) (0, 8 cm, z); (*c*) (4 cm, 4 cm, z); (*d*) (2 cm, 4 cm, z).

Resp. 0; 2,64 μWb/m; 1,93 μWb/m; 3,40 μWb/m

REFERÊNCIAS

1. Boast, W. B. (Ver Referências do Capítulo 2.) O potencial escalar magnético é definido na p. 220, e seu uso no mapeamento de campos magnéticos é discutido na página 444.
2. Jordan, E. C., and K. G. Balmain. *Electromagnetic Waves and Radiating Systems*. 2. ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1968. O potencial vetor magnético é discutido nas páginas 90-96.
3. Paul, C. R., K. W. Whites, and S. Y. Nasar. *Introduction to Electromagnetic Fields*. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 1998. O potencial vetor magnético é apresentado nas páginas 216-220.
4. Skilling, H. H. (Ver Referências do Capítulo 3). A "roda propulsora de navio a vapor" é introduzida nas páginas 23-25.

PROBLEMAS

WW Quizzes

7.1 (*a*) Calcule **H** em componentes cartesianos em $P(2, 3, 4)$ se existe um filamento de corrente no eixo z no qual circulam 8 mA na direção $\mathbf{a}_z$. (*b*) Repita se o filamento está posicionado em $x = -1$, $y = 2$. (*c*) Calcule **H** se ambos os filamentos estão presentes.

7.2 Um condutor filamentar onde circula uma corrente I tem a forma de um triângulo equilátero com lados de comprimento ℓ. Calcule a intensidade de campo magnético no centro do triângulo.

7.3 Dois filamentos semi-infinitos no eixo z posicionam-se nas regiões $-\infty < z < -a$ e $a < z < \infty$. Em cada um circula uma corrente I na direção $\mathbf{a}_z$. (*a*) Calcule **H** como uma função de ρ e ϕ em $z = 0$. (*b*) Qual valor de a resultará em uma intensidade de **H** em $\rho = 1$, $z = 0$, igual à metade do valor obtido para um filamento infinito?

7.4 Duas espiras circulares estão centradas no eixo z, em $z = \pm h$. Cada espira tem raio a e conduz uma corrente I na direção $\mathbf{a}_\phi$. (*a*) Determine $\mathbf{H}$ no eixo z na faixa $-h < z < h$. Considere $I = 1$ A e faça o gráfico de $|\mathbf{H}|$ em função de z/a se (*b*) $h = a/4$; (*c*) $h = a/2$; (*d*) $h = a$. Qual valor de h fornece o campo mais uniforme? Esse sistema é denominado bobinas de Helmholtz (neste caso, as bobinas correspondem às duas espiras*), utilizadas para oferecer campos uniformes.

7.5 Os condutores filamentares paralelos mostrados na Figura 7.21 estão no espaço livre. Desenhe o gráfico de $|\mathbf{H}|$ *versus* y, $-4 < y < 4$, ao longo da linha $x = 0$, $z = 2$.

7.6 Um disco de raio a pertence ao plano xy, com o eixo z passando pelo seu centro. Uma carga superficial de densidade uniforme ρ_s está presente no disco, que gira em volta do eixo z em uma velocidade angular de Ω rad/s. Calcule $\mathbf{H}$ em todos os pontos no eixo z.

7.7 Um condutor filamentar, que conduz uma corrente I na direção $\mathbf{a}_z$, se estende ao longo de todo o eixo z negativo. Em $z = 0$, ele é conectado a uma lâmina de cobre que preenche o quadrante $x > 0$, $y > 0$, do plano xy. (*a*) Configure a lei de Biot-Savart e determine $\mathbf{H}$ em toda a parte do eixo z; (*b*) repita a parte (*a*), mas com a lâmina de cobre ocupando o plano xy *inteiro* (Sugestão: expresse $\mathbf{a}_\phi$ por $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$ e o ângulo ϕ na integral).

7.8 Para o elemento de corrente de comprimento finito no eixo z, conforme mostrado na Figura 7.5, use a lei de Biot-Savart para derivar a Equação (9) da Seção 7.1.

7.9 Uma lâmina de corrente $\mathbf{K} = 8\mathbf{a}_x$ A/m flui na região $-2 < y < 2$ no plano $z = 0$. Calcule $\mathbf{H}$ em $P(0, 0, 3)$.

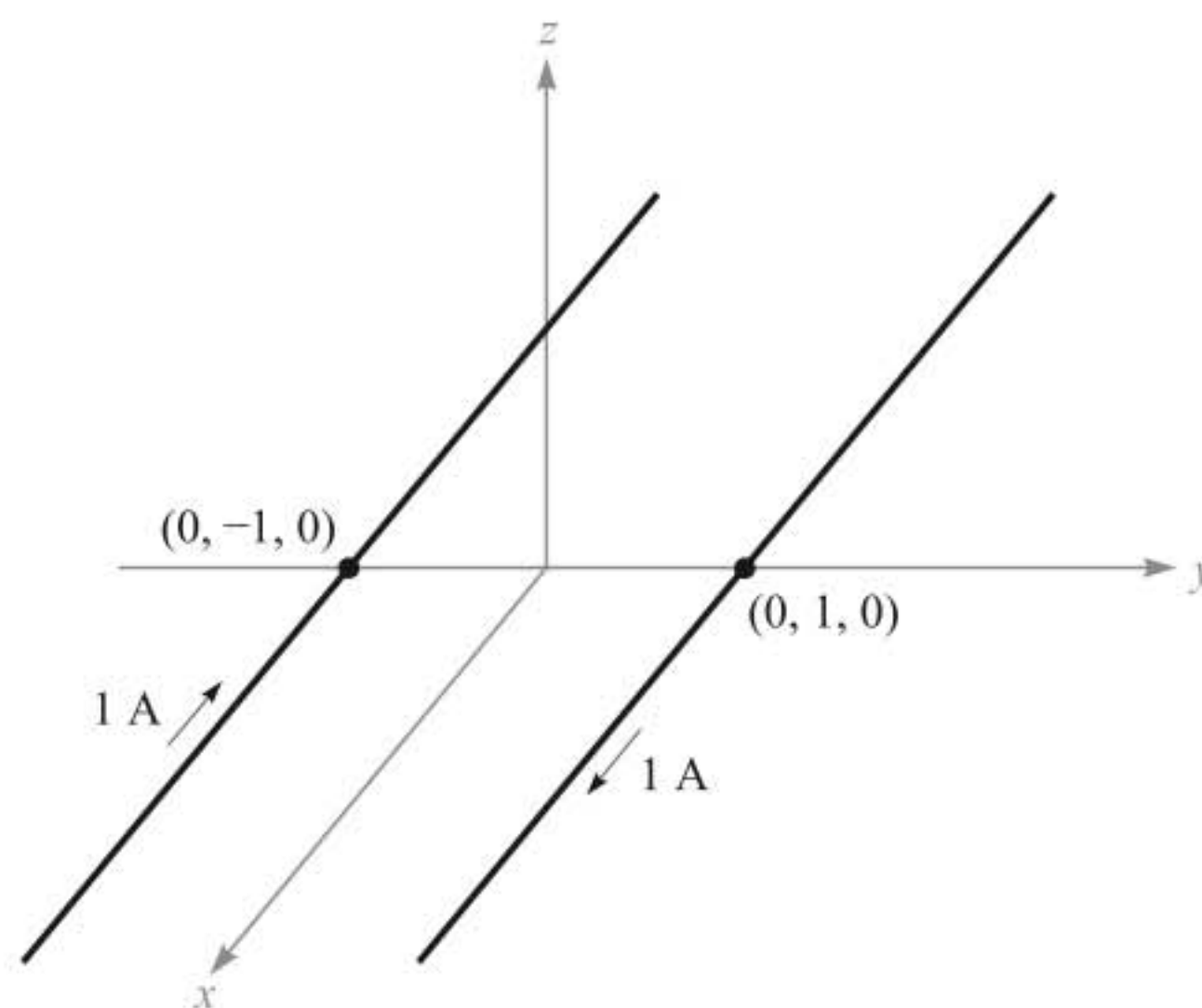



Figura 7.21 Ver Problema 7.5.

* N. de T.: Uma bobina cujo fio dá uma única volta é denominada, normalmente, "espira".

7.10 Uma casca condutora esférica e oca de raio a tem conexões filamentares feitas no topo ($r = a$, $\theta = 0$) e na base ($r = a$, $\theta = \pi$). Uma corrente contínua I circula para baixo pelo filamento superior e pela superfície esférica, saindo pelo filamento inferior. Calcule $\mathbf{H}$ em coordenadas esféricas (*a*) dentro e (*b*) fora da esfera.

7.11 Por um filamento infinito no eixo z circulam 20 π mA na direção $\mathbf{a}_z$. Três lâminas cilíndricas de corrente uniforme, na direção $\mathbf{a}_z$, também estão presentes: 400 mA/m em $\rho = 1$ cm, -250 mA/m em $\rho = 2$ cm e -300 mA/m em $\rho = 3$ cm. Calcule H_ϕ em $\rho = 0{,}5$, 1,5, 2,5 e 3,5 cm.

7.12 Na Figura 7.22, as regiões $0 < z < 0{,}3$ m e $0{,}7 < z < 1{,}0$ m correspondem a placas condutoras nas quais circulam densidades uniformes de corrente de 10 A/m^2 em direções opostas, conforme mostrado. Calcule $\mathbf{H}$ em $z =$: (*a*) $-0{,}2$; (*b*) 0,2; (*c*) 0,4; (*d*) 0,75; (*e*) 1,2 m.

7.13 Por uma casca cilíndrica oca de raio a, centrada no eixo z, circula uma densidade superficial uniforme de corrente de $K_a\,\mathbf{a}_\phi$. (*a*) Mostre que H não é uma função de ϕ ou z. (*b*) Mostre que H_ϕ e H_ρ valem zero em todos os pontos. (*c*) Mostre que $H_z = 0$ para $\rho > a$. (*d*) Mostre que $H_z = K_a$ para $\rho < a$. (*e*) Por uma segunda casca, $\rho = b$, circula uma corrente $K_b\,\mathbf{a}_\phi$. Calcule $\mathbf{H}$ em todos os pontos.

7.14 Um toroide que possui seção reta de formato retangular é definido pelas seguintes superfícies: os cilindros $\rho = 2$ e $\rho = 3$ cm, e os planos $z = 1$ e $z = 2{,}5$ cm. Pelo toroide passa uma densidade superficial de corrente de $-50\mathbf{a}_z$ A/m na superfície $\rho = 3$ cm. Calcule $\mathbf{H}$ no ponto $P(\rho, \phi, z)$: (*a*) $P_A(1{,}5$ cm, 0, 2 cm); (*b*) $P_B(2{,}1$ cm, 0, 2 cm); (*c*) $P_C(2{,}7$ cm, $\pi/2$, 2 cm); (*d*) $P_D(3{,}5$ cm, $\pi/2$, 2 cm).

7.15 Considere uma região com simetria cilíndrica na qual a condutividade é dada por $\sigma = 1{,}5e^{-150\rho}$ kS/m. Um campo elétrico de $30\mathbf{a}_z$ V/m está presente. (*a*) Calcule $\mathbf{J}$. (*b*) Calcule a corrente total que atravessa a

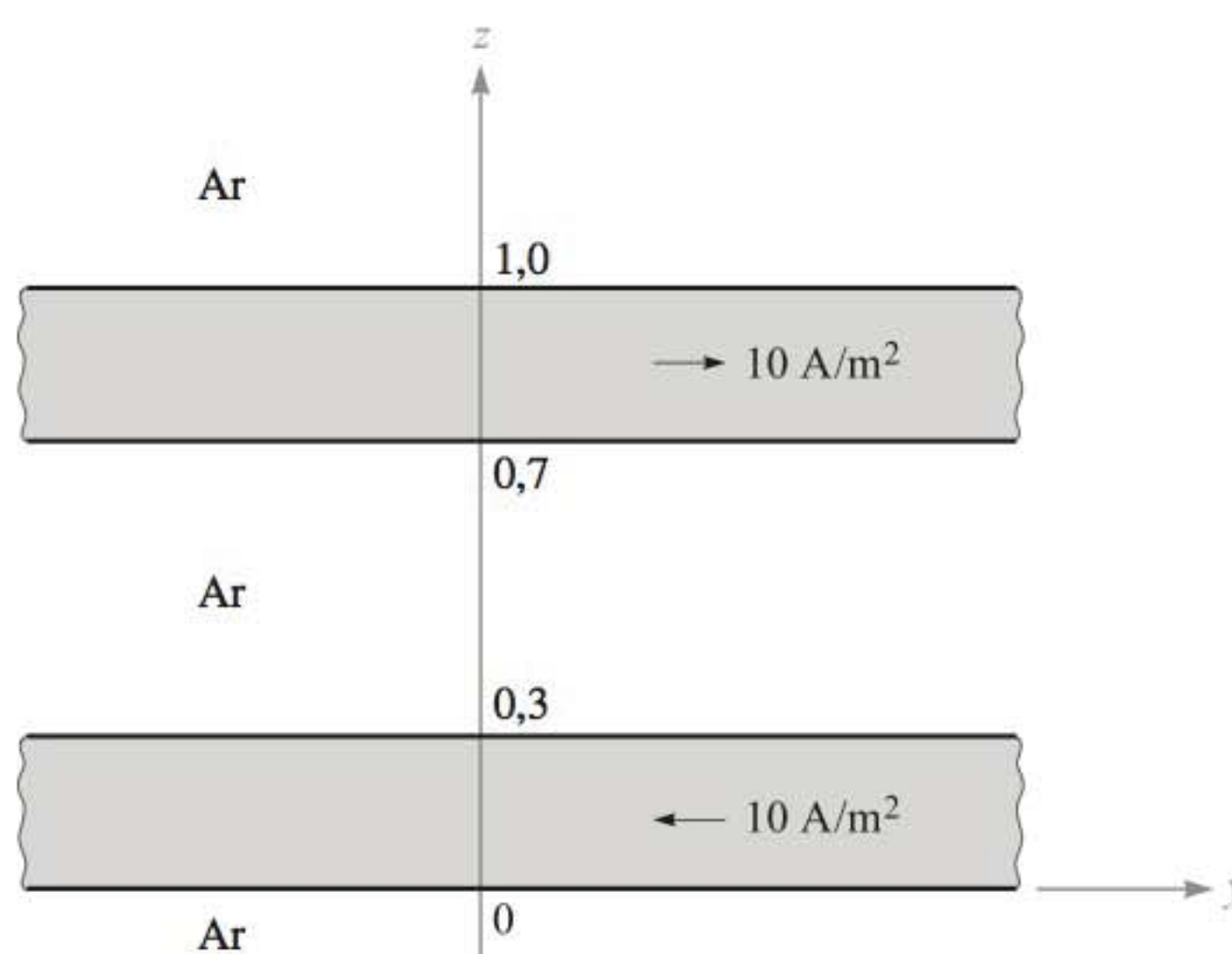



Figura 7.22 Ver Problema 7.12.

superfície $\rho < \rho_0$, $z = 0$, todo o ϕ. (*c*) Use a lei circuital de Ampère para calcular **H**.

7.16 Um condutor filamentar conduz uma corrente I na direção $-\mathbf{a}_z$ e se estende ao longo de todo o eixo z positivo. Na origem, ele é conectado a uma lâmina condutora que forma o plano xy. (*a*) Determine **K** na lâmina condutora. (*b*) Use a lei circuital de Ampère para encontrar **H** para $z > 0$. (*c*) Determine **H** para $z < 0$.

7.17 Por um filamento de corrente no eixo z circula uma corrente de 7 mA na direção $\mathbf{a}_z$, e lâminas de corrente de 0,5 $\mathbf{a}_z$ A/m e $-0{,}2$ $\mathbf{a}_z$ A/m estão posicionadas em $\rho = 1$ cm e $\rho = 0{,}5$ cm, respectivamente. Calcule **H** em: (*a*) $\rho = 0{,}5$ cm; (*b*) $\rho = 1{,}5$ cm; (*c*) $\rho = 4$ cm. (*d*) Qual é o valor da lâmina de corrente que deveria estar posicionada em $\rho = 4$ cm de forma que $\mathbf{H} = 0$ para todo $\rho > 4$ cm?

7.18 Um fio de 3 mm de raio é constituído de um material interno ($0 < \rho < 2$ mm) para o qual $\sigma = 10^7$ S/m, e de um material externo (2 mm $< \rho <$ 3 mm) para o qual $\sigma = 4 \times 10^7$ S/m. Se pelo fio passa uma corrente contínua total de 100 mA, determine **H** em todos os pontos como uma função de ρ.

7.19 Em coordenadas esféricas, a superfície de um cone condutor sólido é descrita por $\theta = \pi/4$, e a de um plano condutor, por $\theta = \pi/2$. Cada um conduz uma corrente total igual a I. A corrente flui como uma corrente superficial radialmente para dentro, no plano em direção ao vértice do cone, e então flui radialmente para fora em toda a parte da seção reta (transversal) do condutor cônico. (*a*) Expresse a densidade superficial de corrente como uma função de r; (*b*) expresse a densidade volumétrica de corrente no interior do cone como uma função de r; (*c*) determine **H** como uma função de r e θ na região entre o cone e o plano; (*d*) determine **H** como uma função de r e θ no interior do cone.

7.20 Um condutor sólido de seção reta circular, com raio de 5 mm, tem uma condutividade que varia com o raio. O condutor tem 20 metros de comprimento e existe uma diferença de potencial contínua de 0,1 V entre suas duas extremidades. Dentro desse condutor, $\mathbf{H} = 10^5\rho^2\mathbf{a}_\phi$ A/m. (*a*) Calcule σ como uma função de ρ. (*b*) Qual é o valor da resistência entre as duas extremidades?

7.21 Um fio cilíndrico de raio a é orientado com o eixo z. O fio conduz uma corrente não uniforme de densidade $\mathbf{J} = b\rho\,\mathbf{a}_z$ A/m^2, onde b é uma constante. (*a*) Qual é a corrente total que flui no fio? (*b*) Encontre $\mathbf{H}_{interno}$ ($0 < \rho < a$) como uma função de ρ; (*c*) Encontre $\mathbf{H}_{externo}$ ($\rho > a$) como uma função de ρ; (*d*) verifique os resultados das partes (*b*) e (*c*) por meio da utilização de $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$.

7.22 Um cilindro sólido de raio a e comprimento L, onde $L \gg a$, contém carga volumétrica de densidade uniforme ρ_0 C/m^3. O cilindro gira em torno de seu eixo (o eixo z) com velocidade angular de Ω rad/s. (*a*) Determine a densidade de corrente **J** como uma função da posição dentro do cilindro girante. (*b*) Determine **H** no eixo aplicando os resultados do Problema 7.6.

(c) Determine a intensidade de campo magnético $\mathbf{H}$ dentro e fora.
(d) Verifique seu resultado da parte (c) tomando o rotacional de $\mathbf{H}$.

7.23 Dado o campo $\mathbf{H} = 20\rho^2\mathbf{a}_\phi$ A/m: (a) Determine a densidade de corrente $\mathbf{J}$. (b) Integre $\mathbf{J}$ sobre a superfície circular $\rho \leq 1$, $0 < \phi < 2\pi$, $z = 0$, para determinar a corrente total que passa pela superfície na direção $\mathbf{a}_z$. (c) Calcule a corrente total mais uma vez, desta vez por uma integral de linha em volta do caminho circular $\rho = 1$, $0 < \phi < 2\pi$, $z = 0$.

7.24 Condutores filamentares, infinitamente longos, estão localizados no plano $y = 0$ em $x = n$ metros, onde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Cada condutor conduz 1 A na direção $\mathbf{a}_z$. (a) Encontre $\mathbf{H}$ no eixo y. Como um auxílio,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y}{y^2 + n^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2y} + \frac{\pi}{e^{2\pi y} - 1}$$

(b) Compare o resultado da parte (a) àquele obtido no caso em que os filamentos são substituídos por uma lâmina de corrente, no plano $y = 0$, que conduz uma densidade superficial de corrente $\mathbf{K} = 1\mathbf{a}_z$ A/m.

7.25 Quando x, y e z são positivos e menores que 5, uma certa intensidade de campo magnético pode ser expressa como $\mathbf{H} = [x^2yz/(y+1)]\mathbf{a}_x + 3x^2z^2\,\mathbf{a}_y - [xyz^2/(y+1)]\,\mathbf{a}_z$. Calcule a corrente total na direção $\mathbf{a}_x$ que atravessa a faixa $x = 2$, $1 \leq y \leq 4$, $3 \leq z \leq 4$, por um método que utilize: (a) uma integral de superfície; (b) uma integral de linha fechada.

7.26 Considere uma esfera de raio $r = 4$, com centro em (0, 0, 3). Seja S_1 a porção da superfície esférica que está situada acima do plano xy. Encontre $\int_{S_1} (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$ se $\mathbf{H} = 3\,\rho\,\mathbf{a}_\phi$ em coordenadas cilíndricas.

7.27 A intensidade de campo magnético é dada em certa região do espaço como $\mathbf{H} = [(x + 2y)/z^2]\mathbf{a}_y + (2/z)\mathbf{a}_z$ A/m. (a) Calcule $\nabla \times \mathbf{H}$. (b) Calcule $\mathbf{J}$. (c) Use $\mathbf{J}$ para encontrar a corrente total que passa pela superfície $z = 4$, $1 \leq x \leq 2$, $3 \leq z \leq 5$, na direção $\mathbf{a}_z$. (d) Mostre que o mesmo resultado é encontrado utilizando o outro lado do teorema de Stokes.

7.28 Dado $\mathbf{H} = (3r^2/\text{sen}\,\theta)\mathbf{a}_\theta + 54r\cos\theta\mathbf{a}_\phi$ A/m no espaço livre: (a) Calcule a corrente total na direção $\mathbf{a}_\theta$ que atravessa a superfície cônica $\theta = 20°$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 5$, por qualquer um dos lados do teorema de Stokes de sua preferência. (b) Confira o resultado utilizando o outro lado do teorema de Stokes.

7.29 Por um condutor longo, reto e não magnético, de 0,2 mm de raio, circula uma corrente contínua uniformemente distribuída de 2 A. (a) Calcule $\mathbf{J}$ dentro do condutor. (b) Use a lei circuital de Ampère para encontrar $\mathbf{H}$ e $\mathbf{B}$ dentro do condutor. (c) Mostre que $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ dentro do condutor. (d) Calcule $\mathbf{H}$ e $\mathbf{B}$ fora do condutor. (e) Mostre que $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ fora do condutor.

7.30 (Uma inversão do Problema 7.20.) Um condutor sólido e não magnético de seção reta circular tem um raio de 2 mm. O condutor é não homogêneo, com $\sigma = 10^6(1 + 10^6\rho^2)$ S/m. Se o condutor tem 1 m de comprimento e é

submetido a uma tensão de 1 mV entre suas extremidades, calcule: (*a*) **H** dentro do condutor; (*b*) o fluxo magnético total dentro do condutor.

7.31 A casca cilíndrica definida por 1 cm $< \rho <$ 1,4 cm, consiste em um material condutor não magnético e conduz uma corrente total de 50 A na direção $\mathbf{a}_z$. Calcule o fluxo magnético total que atravessa o plano $\phi = 0$, $0 < z < 1$: (*a*) $0 < \rho <$ 1,2 cm; (*b*) 1,0 cm $< \rho <$ 1,4 cm; (*c*) 1,4 cm $< \rho <$ 20 cm.

7.32 A região de espaço livre definida por $1 < z < 4$ cm e $2 < \rho < 3$ cm é um toroide de seção reta retangular. Seja a superfície em $\rho = 3$ cm pela qual circula uma corrente superficial $\mathbf{K} = 2\mathbf{a}_z$ kA/m. (*a*) Especifique as densidades de corrente nas superfícies em $\rho = 2$ cm, $z = 1$ cm e $z = 4$ cm. (*b*) Calcule **H** em todos os pontos. (*c*) Calcule o fluxo total dentro do toroide.

7.33 Utilize uma expansão em coordenadas cartesianas para mostrar que o rotacional do gradiente de qualquer campo escalar G é igual a zero.

7.34 Por um condutor filamentar no eixo z circula uma corrente de 16 A na direção $\mathbf{a}_z$, por uma casca condutora em $\rho = 6$ circula uma corrente total de 12 A na direção $-\mathbf{a}_z$, e por outra casca, em $\rho = 10$, circula uma corrente total de 4 A na direção $-\mathbf{a}_z$. (*a*) calcule **H** para $0 < \rho < 12$. (*b*) faça o gráfico de H_ϕ *versus* ρ. (*c*) calcule o fluxo total Φ que atravessa a superfície $1 < \rho < 7$, $0 < z < 1$, em ϕ fixo.

7.35 Uma lâmina de corrente, $\mathbf{K} = 20\,\mathbf{a}_z$ A/m, está posicionada em $\rho = 2$, e uma segunda lâmina, $\mathbf{K} = -10\mathbf{a}_z$ A/m, está posicionada em $\rho = 4$. (*a*) seja $V_m = 0$ em $P(\rho = 3, \phi = 0, z = 5)$ e posicione uma barreira em $\phi = \pi$. Calcule $V_m(\rho, \phi, z)$ para $-\pi < \phi < \pi$. (*b*) considere $\mathbf{A} = 0$ em P, e calcule $\mathbf{A}(\rho, \phi, z)$ para $2 < \rho < 4$.

7.36 Seja $\mathbf{A} = (3y - z)\mathbf{a}_x + 2xz\,\mathbf{a}_y$ Wb/m em uma certa região do espaço livre. (*a*) Mostre que $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. (*b*) Em $P(2, -1, 3)$ calcule **A**, **B**, **H** e **J**.

7.37 Seja $N = 1.000$, $I =$ 0,8 A, $\rho_0 = 2$ cm e $a =$ 0,8 cm para o toroide mostrado na Figura 7.12*b*. Calcule V_m no interior do toroide se $V_m = 0$ em $\rho =$ 2,5 cm, $\phi = 0{,}3\pi$. Mantenha ϕ dentro da faixa $0 < \phi < 2\pi$.

7.38 Uma espira quadrada, filamentar e diferencial, de lado dL, tem centro na origem no plano $z = 0$ e está imersa no espaço livre. A corrente I flui, de forma geral, na direção $\mathbf{a}_\phi$. (*a*) Considerando $r >> dL$, e seguindo um método similar àquele na Seção 4.7, mostre que

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I (dL)^2 \operatorname{sen}\theta}{4\pi r^2}\,\mathbf{a}_\phi$$

(*b*) Mostre que

$$d\mathbf{H} = \frac{I(dL)^2}{4\pi r^3}\,(2\cos\theta\,\mathbf{a}_r + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{a}_\theta)$$

A espira quadrada é uma forma de *dipolo magnético*.

7.39 Lâminas planas de corrente $\mathbf{K} = 30\mathbf{a}_z$ A/m e $-30\mathbf{a}_z$ A/m estão posicionadas no espaço livre em $x = 0{,}2$ e $x = -0{,}2$, respectivamente. Para a região $-0{,}2 < x < 0{,}2$: (*a*) calcule **H**; (*b*) obtenha uma expressão para V_m se $V_m = 0$ em $P(0{,}1, 0{,}2, 0{,}3)$; (*c*) calcule **B**; (*d*) obtenha uma expressão para **A** se $\mathbf{A} = 0$ em *P*.

7.40 Mostre que a integral de linha do potencial vetor **A** ao longo de qualquer caminho fechado é igual ao fluxo magnético envolvido pelo caminho, ou $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$.

7.41 Considere $\mathbf{A} = 50\rho^2\mathbf{a}_z$ Wb/m em certa região do espaço livre. (*a*) Calcule **H** e **B**. (*b*) Calcule **J**. (*c*) Use **J** para encontrar a corrente total que atravessa a superfície $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $z = 0$. (*d*) Use o valor de H_ϕ em $\rho = 1$ para calcular $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$ para $\rho = 1$, $z = 0$.

7.42 Mostre que $\nabla_2(1/R_{12}) = -\nabla_1(1/R_{12}) = \mathbf{R}_{21}/R_{12}^3$.

7.43 Calcule o potencial vetor magnético dentro do condutor externo para a linha coaxial cujo potencial vetor magnético é mostrado na Figura 7.20, se o raio externo do condutor externo for $7a$. Selecione o zero de referência adequado e esboce esses resultados na figura.

7.44 Expandindo a Equação (58) da Seção 7.7 em coordenadas cartesianas, mostre que a Equação (59) está correta.

8

Forças Magnéticas, Materiais e Indutância

Estamos agora prontos para desenvolver a segunda metade do problema dos campos magnéticos – aquela associada à determinação das forças e torques exercidos pelo campo magnético em outras cargas. O campo elétrico produz uma força que é exercida em uma carga que pode estar em repouso ou em movimento. Porém, vamos ver que o campo magnético estacionário consegue exercer uma força apenas em uma carga que estiver *em movimento*. Esse resultado parece bastante razoável; afinal, um campo magnético pode ser produzido por cargas em movimento e pode exercer forças em cargas em movimento, mas não pode ser produzido por cargas estacionárias e não pode exercer nenhuma força em uma carga estacionária.

Este capítulo inicialmente considerará as forças e torques em condutores de corrente, os quais podem ser de natureza filamentar ou possuir uma seção reta finita com uma distribuição de corrente conhecida. Os problemas associados à movimentação de partículas no vácuo são evitados ao máximo.

Com um entendimento dos efeitos fundamentais produzidos pelo campo magnético, consideraremos então os variados tipos de materiais magnéticos, a análise de circuitos magnéticos elementares, as forças nos materiais magnéticos e, finalmente, os importantes conceitos de indutância própria e indutância mútua que dizem respeito aos circuitos elétricos. ■

8.1 FORÇA EM UMA CARGA EM MOVIMENTO

Em um campo elétrico, a definição da intensidade de campo elétrico nos mostra que a força em uma partícula carregada é

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E} \tag{1}$$

A força está na mesma direção e sentido da intensidade de campo elétrico (para uma carga positiva), e é diretamente proporcional a ambos, $\mathbf{E}$ e Q. Se a carga estiver em movimento, a força em qualquer ponto na sua trajetória será dada pela Equação (1).

Sabe-se, por meio de experimentos, que uma partícula carregada em movimento, imersa em uma região onde existe um campo magnético de densidade de fluxo **B**, experimenta uma força cuja intensidade é proporcional ao produto das intensidades da carga Q, da sua velocidade **v**, da densidade de fluxo **B** e do seno do ângulo entre os vetores **v** e **B**. A direção da força é perpendicular a ambos, **v** e **B**, e seu sentido é dado por um vetor unitário que define o sentido de $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. A força pode então ser expressa como

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{2}$$

Uma diferença fundamental entre os efeitos dos campos elétrico e magnético em partículas carregadas é agora evidente, pois uma força que é sempre aplicada em uma direção que faz ângulos retos com a direção na qual a partícula está se deslocando não poderá nunca mudar a intensidade da velocidade da partícula. Em outras palavras, o vetor *aceleração* é sempre normal ao vetor velocidade. A energia cinética da partícula permanece inalterada, e como consequência o campo magnético estacionário é incapaz de transferir energia à carga em movimento. O campo elétrico, por outro lado, exerce uma força na partícula que é independente da direção na qual a partícula está se deslocando e, com isso, efetua uma transferência de energia entre o campo e a partícula de uma forma geral.

Os dois primeiros problemas no final deste capítulo ilustram os diferentes efeitos dos campos elétrico e magnético na energia cinética de uma partícula carregada que se move no espaço livre.

Em uma partícula em movimento, a força gerada pelos campos elétrico e magnético combinados é obtida facilmente por superposição*,

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{3}$$

Essa equação é conhecida como *equação de força de Lorentz*, e sua solução é necessária para determinar órbitas de elétrons no *magnetron*, caminhos dos prótons no cíclotron, características do plasma em um gerador magnetohidrodinâmico (MHD) ou, em geral, o movimento de partículas carregadas sob a ação de campos elétricos e magnéticos combinados.

EP8.1. A carga pontual $Q = 18$ nC tem uma velocidade de 5×10^6 m/s na direção e sentido $\mathbf{a}_v = 0{,}60\mathbf{a}_x + 0{,}75\mathbf{a}_y + 0{,}30\mathbf{a}_z$. Calcule a intensidade da força exercida na carga pelo campo: (*a*) $\mathbf{B} = -3\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + 6\mathbf{a}_z$ mT; (*b*) $\mathbf{E} = -3\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + 6\mathbf{a}_z$ kV/m; (*c*) **B** e **E** agindo conjuntamente.

Resp. 660 μN; 140 μN; 670 μN

* N. de T.: Deve ficar claro que os campos **E** e **B** *não* são gerados por Q. A carga Q é imersa em uma região onde existe **E** (gerado por uma distribuição estática de cargas) e **B** (gerado por uma distribuição de corrente contínua) e *sentirá* a presença desses campos por meio da força **F**, ou seja, surge **F** em Q devido à existência de **E** e **B**.

8.2 FORÇA EM UM ELEMENTO DIFERENCIAL DE CORRENTE

A força em uma partícula carregada que se move por meio de um campo magnético estacionário pode ser escrita como a força diferencial exercida em um elemento diferencial de carga,

$$d\mathbf{F} = dQ\,\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{4}$$

Fisicamente, o elemento diferencial de carga consiste em diversas cargas muito pequenas e discretas que ocupam um volume que, apesar de pequeno, é muito maior que a separação média entre as cargas. A força diferencial expressa pela Equação (4) é, então, simplesmente a soma das forças nas cargas individuais. Essa soma, ou força resultante, não é uma força aplicada em um objeto único. De maneira análoga, poderíamos considerar a força gravitacional diferencial experimentada por um pequeno volume retirado de um jato de areia. O pequeno volume contém diversos grãos de areia, e a força diferencial é a soma das forças nos grãos individuais dentro do pequeno volume.

Entretanto, se nossas cargas forem elétrons em movimento dentro de um condutor, podemos mostrar que a força é transferida ao condutor e que a soma desse número extremamente alto de forças extremamente pequenas tem importância prática. Em um condutor, elétrons estão em movimento por meio de uma região de íons positivos imóveis que formam uma rede cristalina, dando ao condutor propriedades de sólido. Um campo magnético que exerça forças nos elétrons tende a fazê-los mudar de posição ligeiramente e produzir um pequeno deslocamento entre os centros de "gravidade" das cargas positivas e negativas. As forças de Coulomb entre elétrons e íons positivos, contudo, tendem a resistir a esse deslocamento. Assim, qualquer tentativa de mover os elétrons resultará em uma força de atração entre elétrons e íons positivos da rede cristalina. A força magnética será então transferida à rede cristalina, ou ao próprio condutor. As forças de Coulomb são muito maiores que as forças magnéticas em bons condutores, e por isso o deslocamento real dos elétrons é quase imensurável. A separação de cargas resultante, entretanto, pode ser notada pela presença de uma pequena diferença de potencial ao longo da amostra do condutor na direção perpendicular tanto ao campo magnético quanto à velocidade das cargas. A tensão é conhecida como *tensão de Hall*, e o efeito propriamente dito é chamado de *efeito Hall*.

A Figura 8.1 ilustra a direção da tensão de Hall para ambas as cargas positiva e negativa em movimento. Na Figura 8.1*a*, $\mathbf{v}$ está na direção $-\mathbf{a}_x$, $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ está na direção $\mathbf{a}_y$ e Q é positivo, fazendo com que $\mathbf{F}_Q$ seja na direção $\mathbf{a}_y$. Logo, as cargas positivas se movem para a direita. Na Figura 8.1*b*, $\mathbf{v}$ está agora na direção $+\mathbf{a}_x$, $\mathbf{B}$ está ainda na direção $\mathbf{a}_z$, $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ está na direção $-\mathbf{a}_y$ e Q é negativo. Com isso, $\mathbf{F}_Q$ é de novo na direção $\mathbf{a}_y$. Logo, as cargas negativas terminam na borda direita. Em razão disso, correntes iguais geradas por lacunas e elétrons em semicondutores podem ser diferenciadas pelas suas tensões de Hall. Esse é um método usado para determinar se um dado semicondutor é do tipo *n* ou do tipo *p*.

Determinados dispositivos empregam o efeito Hall para medir a densidade de fluxo magnético e, em algumas aplicações nas quais pode-se considerar a corren-

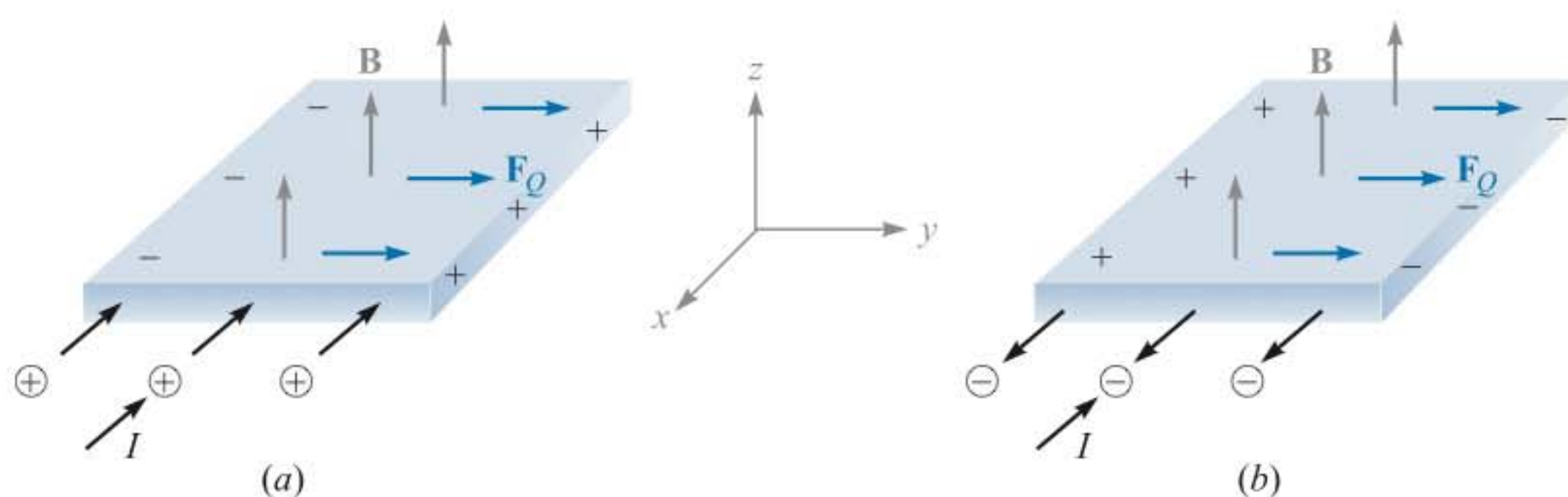



Figura 8.1 Correntes iguais injetadas no material são proporcionadas por cargas positivas que se movem para dentro em (*a*) e cargas negativas que se movem para fora em (*b*). Os dois casos podem ser distinguidos por tensões de Hall de sentidos opostos, conforme mostrado.

te que passa pelo dispositivo proporcional ao campo magnético transversal, servem como wattímetros eletrônicos, elementos quadratores etc.

Retornando para a Equação (4), podemos então dizer que se considerarmos um elemento de carga que se move em um feixe de elétrons, a força será simplesmente a soma das forças nos elétrons individuais naquele pequeno elemento de volume, mas se estivermos considerando um elemento de carga que se move dentro de um condutor, a força total será aplicada ao próprio condutor sólido. Vamos agora restringir nossa atenção às forças nos condutores de corrente.

No Capítulo 5 definimos densidade de corrente de convecção em relação à velocidade da densidade volumétrica de carga,

$$\mathbf{J} = \rho_\nu \mathbf{v}$$

O elemento diferencial de carga na Equação (4) também pode ser expresso pela densidade volumétrica de carga,[1]

$$dQ = \rho_\nu d\nu$$

Logo

$$d\mathbf{F} = \rho_\nu d\nu\, \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

ou

$$d\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}\, d\nu \tag{5}$$

Vimos no Capítulo 7 que $\mathbf{J}\, d\nu$ pode ser interpretado como um elemento diferencial de corrente, isto é,

$$\mathbf{J}\, d\nu = \mathbf{K}\, dS = I\, d\mathbf{L}$$

[1] Lembre-se que $d\nu$ é um elemento diferencial de volume, e não um aumento diferencial na velocidade.

e, por isso, a equação de força de Lorentz pode ser aplicada à densidade superficial de corrente,

$$d\mathbf{F} = \mathbf{K} \times \mathbf{B}\, dS \tag{6}$$

ou a um filamento diferencial de corrente,

$$d\mathbf{F} = I\, d\mathbf{L} \times \mathbf{B} \tag{7}$$

Integrando as Equações (5), (6) ou (7) em um volume, em uma superfície que pode ser aberta ou fechada (por quê?) e também em um caminho fechado, teremos, respectivamente, as seguintes equações integrais:

$$\mathbf{F} = \int_{\text{vol}} \mathbf{J} \times \mathbf{B}\, dv \tag{8}$$

$$\mathbf{F} = \int_{S} \mathbf{K} \times \mathbf{B}\, dS \tag{9}$$

e

$$\mathbf{F} = \oint I\, d\mathbf{L} \times \mathbf{B} = -I \oint \mathbf{B} \times d\mathbf{L} \tag{10}$$

Um resultado simples é obtido aplicando-se as Equações (7) ou (10) a um condutor retilíneo em um campo magnético uniforme,

$$\mathbf{F} = I\mathbf{L} \times \mathbf{B} \tag{11}$$

A intensidade da força é dada pela equação familiar

$$F = BIL \operatorname{sen} \theta \tag{12}$$

onde θ é o ângulo entre os vetores que representam a direção do fluxo de corrente e a direção da densidade de fluxo magnético. As Equações (11) ou (12) se aplicam apenas à porção do circuito fechado, e o resto do circuito deve ser considerado em qualquer problema prático.

EXEMPLO 8.1

Como um exemplo numérico dessas equações, considere a Figura 8.2. Temos uma espira quadrada no plano $z = 0$, na qual circula uma corrente de 2 mA no campo de um filamento infinito no eixo y, conforme mostrado. Desejamos a força total na espira.

Solução. O campo produzido no plano da espira pelo filamento retilíneo é

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi x}\mathbf{a}_z = \frac{15}{2\pi x}\mathbf{a}_z \text{ A/m}$$

Logo,

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = 4\pi \times 10^{-7}\mathbf{H} = \frac{3 \times 10^{-6}}{x}\mathbf{a}_z \text{ T}$$

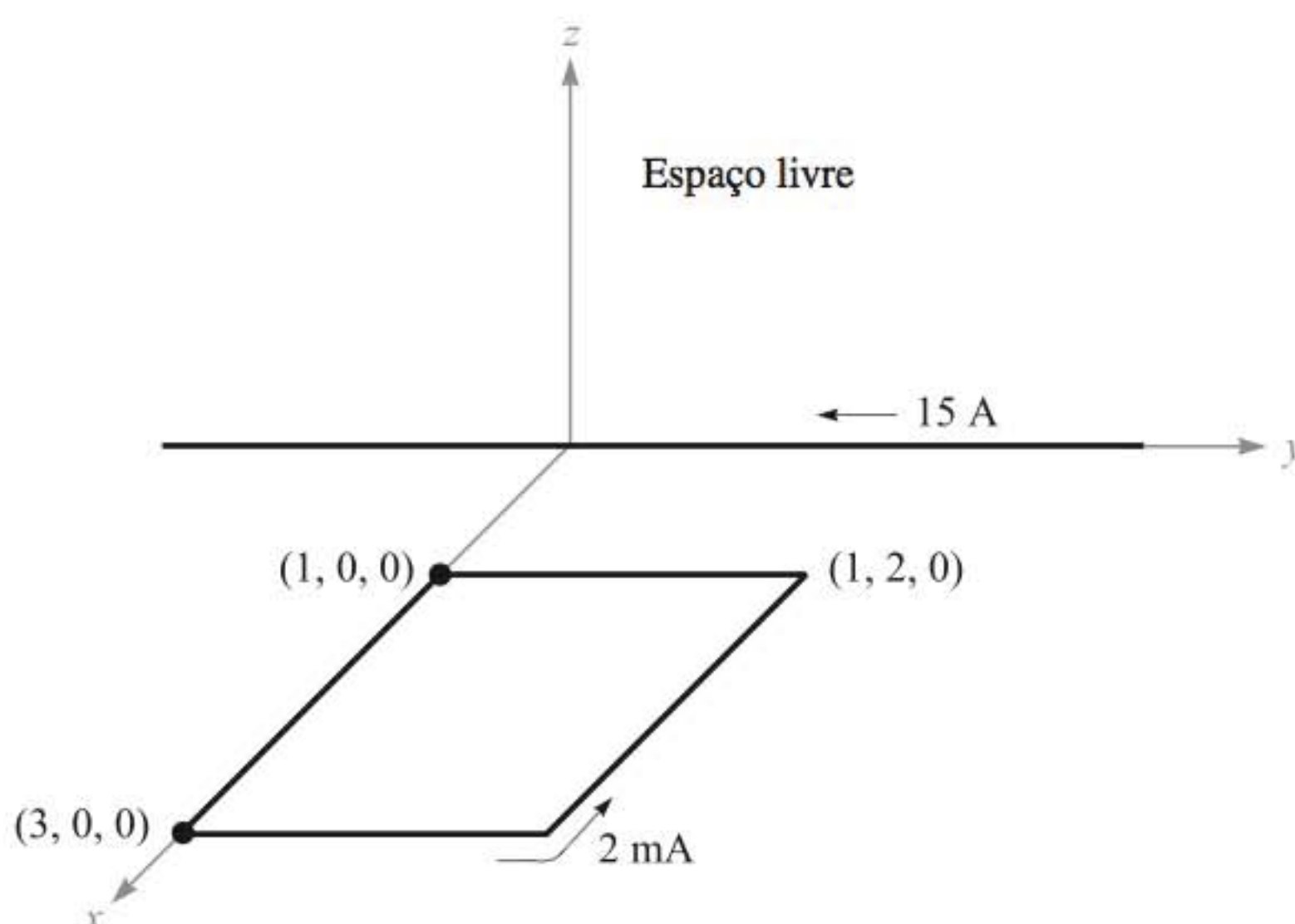



Figura 8.2 Uma espira quadrada no plano *xy* pela qual passa uma corrente de 2 mA é submetida a um campo **B** não uniforme.

Usamos a forma integral na Equação (10),

$$\mathbf{F} = -I \oint \mathbf{B} \times d\mathbf{L}$$

Vamos considerar uma espira rígida na qual a força total seja a soma das forças nos quatro lados. Começando pelo lado esquerdo:

$$\mathbf{F} = -2 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^{-6} \left[\int_{x=1}^{3} \frac{\mathbf{a}_z}{x} \times dx\, \mathbf{a}_x + \int_{y=0}^{2} \frac{\mathbf{a}_z}{3} \times dy\, \mathbf{a}_y + \int_{x=3}^{1} \frac{\mathbf{a}_z}{x} \times dx\, \mathbf{a}_x + \int_{y=2}^{0} \frac{\mathbf{a}_z}{1} \times dy\, \mathbf{a}_y \right]$$

$$= -6 \times 10^{-9} \left[\ln x \Big|_1^3 \mathbf{a}_y + \frac{1}{3} y \Big|_0^2 (-\mathbf{a}_x) + \ln x \Big|_3^1 \mathbf{a}_y + y \Big|_2^0 (-\mathbf{a}_x) \right]$$

$$= -6 \times 10^{-9} \left[(\ln 3)\mathbf{a}_y - \frac{2}{3}\mathbf{a}_x + \left(\ln \frac{1}{3} \right) \mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_x \right]$$

$$= -8\mathbf{a}_x \text{ nN}$$

Dessa forma, a força líquida na espira está na direção $-\mathbf{a}_x$.

EP8.2. O campo $\mathbf{B} = -2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$ mT está presente no espaço livre. Encontre o vetor força exercido em um fio retilíneo que conduz uma corrente de 12 A na direção $\mathbf{a}_{AB}$, dados $A(1, 1, 1)$ e: (*a*) $B(2, 1, 1)$; (*b*) $B(3, 5, 6)$.

Resp. $-48\mathbf{a}_y + 36\mathbf{a}_z$ mN; $12\mathbf{a}_x - 216\mathbf{a}_y + 168\mathbf{a}_z$ mN

EP8.3. A amostra de semicondutor mostrada na Figura 8.1 é um silício do tipo n, que possui uma seção reta retangular de 0,9 mm por 1,1 cm e um comprimento de 1,3 cm. Considere as mobilidades dos elétrons e das lacunas 0,13 e 0,03 $\text{m}^2/\text{V} \cdot \text{s}$, respectivamente, na temperatura de operação. Seja $B = 0{,}07$ T e a intensidade de campo elétrico na direção de circulação da corrente igual a 800 V/m. Calcule a intensidade de: (a) a tensão ao longo do comprimento da amostra; (b) a velocidade de deriva; (c) a força transversal, por coulomb de carga que se desloca, causada por B; (d) a intensidade de campo elétrico transversal; (e) a tensão de Hall.

Resp. 10,40 V; 104,0 m/s; 7,28 N/C; 7,28 V/m; 80,1 mV

8.3 FORÇA ENTRE ELEMENTOS DIFERENCIAIS DE CORRENTE

O conceito de campo magnético foi introduzido para dividir em duas partes o problema de se encontrar a interação de uma distribuição de corrente em uma segunda distribuição de corrente. É possível expressar a força em um elemento de corrente diretamente pelo segundo elemento de corrente, sem se calcular o campo magnético. Uma vez que afirmamos que o conceito de campo magnético simplifica nosso trabalho, então convém mostrar que evitar esse passo intermediário leva a expressões mais complicadas.

O campo magnético no ponto 2 gerado por um elemento de corrente no ponto 1 foi encontrado como

$$d\mathbf{H}_2 = \frac{I_1 d\mathbf{L}_1 \times \mathbf{a}_{R12}}{4\pi R_{12}^2}$$

Agora, a força diferencial em um elemento diferencial de corrente é

$$d\mathbf{F} = I\, d\mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

e a aplicamos ao nosso problema considerando $\mathbf{B}$ como $d\mathbf{B}_2$ (a densidade diferencial de fluxo no ponto 2 causada pelo elemento de corrente 1), identificando $I\,d\mathbf{L}$ como $I_2 d\mathbf{L}_2$, e simbolizando a quantidade diferencial de nossa força diferencial no elemento 2 por $d(d\mathbf{F}_2)$:

$$d(d\mathbf{F}_2) = I_2 d\mathbf{L}_2 \times d\mathbf{B}_2$$

Uma vez que $d\mathbf{B}_2 = \mu_0 d\mathbf{H}_2$, obtemos a força entre dois elementos diferenciais de corrente,

$$d(d\mathbf{F}_2) = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi R_{12}^2} d\mathbf{L}_2 \times (d\mathbf{L}_1 \times \mathbf{a}_{R12}) \qquad (13)$$

EXEMPLO 8.2

Como um exemplo que ilustra o uso (e mau uso) desses resultados, considere os dois elementos diferenciais de corrente mostrados na Figura 8.3. Procuramos a força diferencial em $d\mathbf{L}_2$.

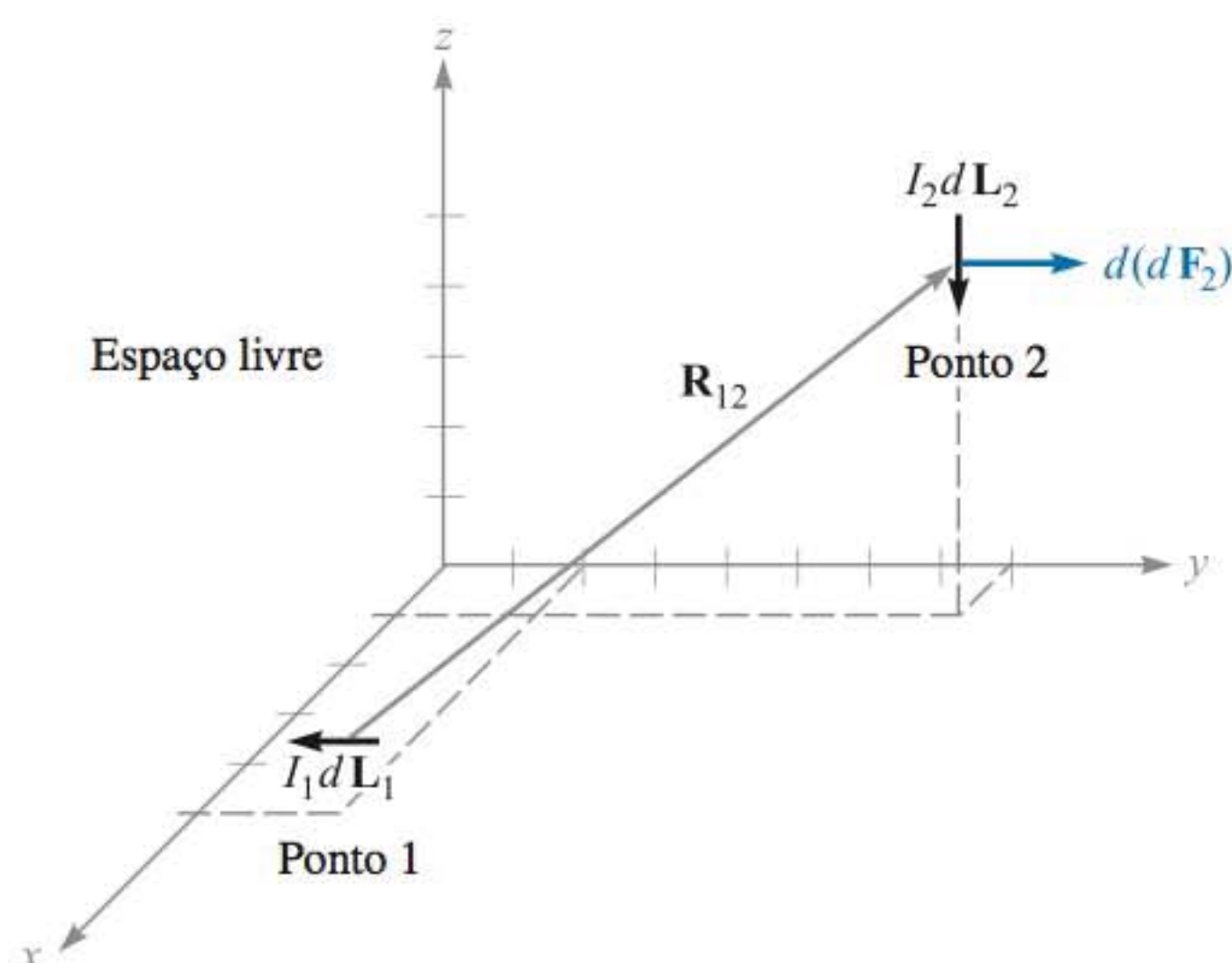



Figura 8.3 Dados $P_1(5, 2, 1)$, $P_2(1, 8, 5)$, $I_1\, d\mathbf{L}_1 = -3\mathbf{a}_y$ A · m e $I_2\, d\mathbf{L}_2 = -4\mathbf{a}_z$ A · m, a força em $I_2\, d\mathbf{L}_2$ é 8,56 nN na direção $\mathbf{a}_y$.

Solução. Temos $I_1\, d\mathbf{L}_1 = -3\mathbf{a}_y$ A · m em $P_1(5, 2, 1)$ e $I_2\, d\mathbf{L}_2 = -4\mathbf{a}_z$ A · m em $P_2(1, 8, 5)$. Logo, $\mathbf{R}_{12} = -4\mathbf{a}_x + 6\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$, e podemos substituir esses dados na Equação (13),

$$d(d\mathbf{F}_2) = \frac{4\pi 10^{-7}}{4\pi} \frac{(-4\mathbf{a}_z) \times [(-3\mathbf{a}_y) \times (-4\mathbf{a}_x + 6\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z)]}{(16 + 36 + 16)^{1,5}}$$
$$= 8{,}56\mathbf{a}_y \text{ nN}$$

Muitos capítulos atrás, quando discutimos sobre a força exercida por uma carga pontual em outra carga pontual, vimos que a força na primeira carga era o negativo daquela na segunda. Isto é, a força total no sistema era igual a zero. Esse não é o caso para os elementos diferenciais de corrente, e $d(d\mathbf{F}1) = -12{,}84\mathbf{a}_z$ nN no Exemplo 8.2. A razão para esse comportamento diferente reside na natureza não física do elemento de corrente. Enquanto cargas pontuais podem ser bem aproximadas por cargas pequenas, a continuidade da corrente requer que um circuito completo seja considerado. E é isso que vamos fazer agora.

A força total entre dois circuitos filamentares é obtida integrando duas vezes:

$$\mathbf{F}_2 = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint \left[d\mathbf{L}_2 \times \oint \frac{d\mathbf{L}_1 \times \mathbf{a}_{R12}}{R_{12}^2} \right]$$
$$= \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint \left[\oint \frac{\mathbf{a}_{R12} \times d\mathbf{L}_1}{R_{12}^2} \right] \times d\mathbf{L}_2 \qquad (14)$$

A Equação (14) é realmente complexa, mas a familiaridade com o campo magnético obtida no Capítulo 7 deve nos permitir reconhecer a integral interna como a integral necessária para se encontrar o campo magnético no ponto 2 produzido pelo elemento de corrente no ponto 1.

Embora iremos apenas apresentar o resultado, não é muito difícil fazer uso da Equação (14) para encontrar a força de repulsão entre dois condutores filamentares infinitamente longos, retilíneos e paralelos com separação d, nos quais circulam

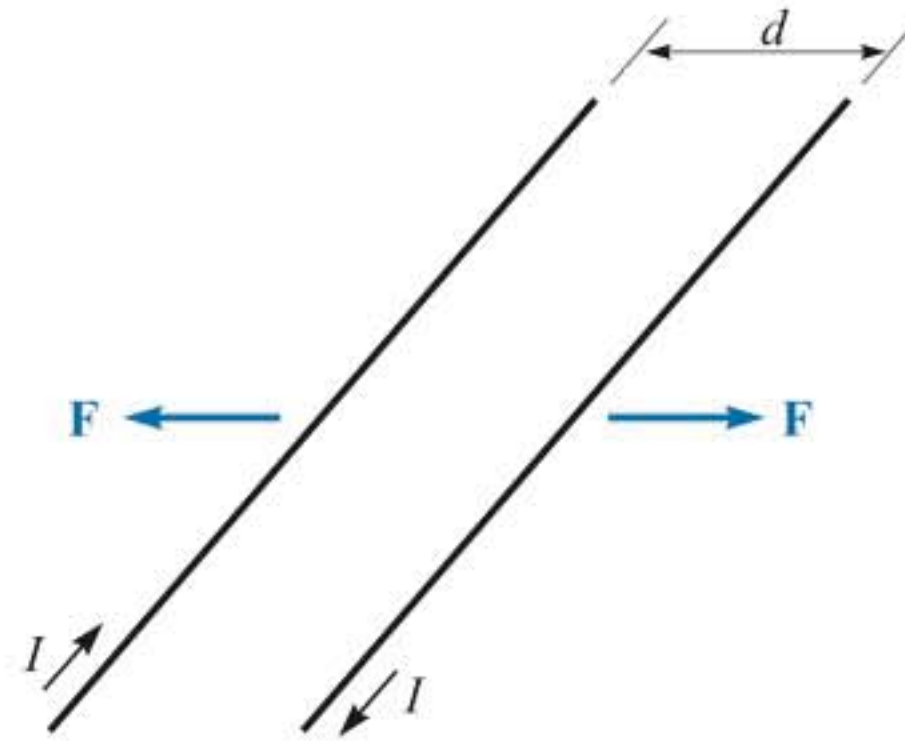



Figura 8.4 Dois filamentos infinitos paralelos com separação d e correntes iguais, mas de sentidos opostos experimentam uma força repulsiva de $\mu_0 I^2/(2\pi d)$ N/m.

correntes I iguais, mas em sentidos opostos, conforme mostrado na Figura 8.4. As integrações são simples, e a maioria dos erros são cometidos na determinação de expressões adequadas para $\mathbf{a}_{R12}$, $d\mathbf{L}_1$ e $d\mathbf{L}_2$. Entretanto, uma vez que a intensidade de campo magnético em cada fio causada pelo outro já é conhecida por $I/(2\pi d)$, percebe-se rapidamente que a resposta é uma força de $\mu_0 I^2/(2\pi d)$ newtons por metro de comprimento.

EP8.4. Dois elementos diferenciais de corrente, $I_1\Delta\mathbf{L}_1 = 3 \times 10^{-6}\mathbf{a}_y$ A · m em $P_1(1, 0, 0)$ e $I_2\Delta\mathbf{L}_2 = 3 \times 10^{-6}(-0{,}5\mathbf{a}_x + 0{,}4\mathbf{a}_y + 0{,}3\mathbf{a}_z)$ A · m em $P_2(2, 2, 2)$, estão posicionados no espaço livre. Encontre o vetor força exercido em: (*a*) $I_2\Delta\mathbf{L}_2$ por $I_1\Delta\mathbf{L}_1$; (*b*) $I_1\Delta\mathbf{L}_1$ por $I_2\Delta\mathbf{L}_2$.

Resp. $(-1{,}333\mathbf{a}_x + 0{,}333\mathbf{a}_y - 2{,}67\mathbf{a}_z)10^{-20}$ N; $(4{,}67\mathbf{a}_x + 0{,}667\mathbf{a}_z)10^{-20}$ N

8.4 FORÇA E TORQUE EM UM CIRCUITO FECHADO

Já obtivemos expressões gerais para as forças exercidas em sistemas de correntes. Porém, um caso especial é facilmente destacável, pois se tomarmos nossa relação para a força em um circuito fechado filamentar, conforme dado pela Equação (10), Seção 8.2,

$$\mathbf{F} = -I \oint \mathbf{B} \times d\mathbf{L}$$

e considerarmos uma densidade *uniforme* de fluxo magnético, $\mathbf{B}$ poderá ser removido da integral:

$$\mathbf{F} = -I\mathbf{B} \times \oint d\mathbf{L}$$

Entretanto, descobrimos durante nossa investigação sobre integrais de linha fechada em um campo potencial eletrostático que $\oint d\mathbf{L} = 0$, e assim a força em um circuito filamentar fechado em um campo magnético uniforme é zero.

Se o campo não for uniforme, a força total não precisa ser zero.

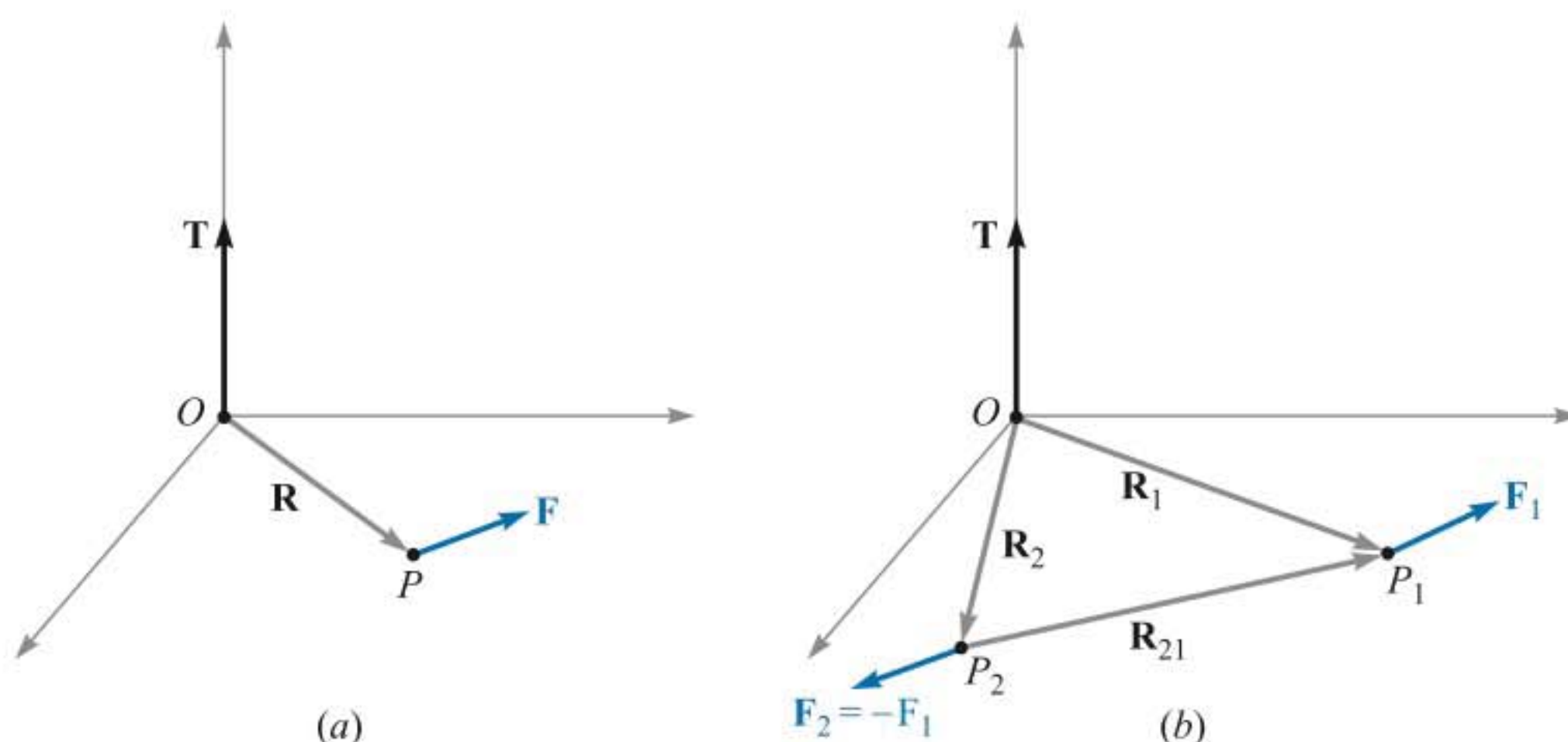



Figura 8.5 (*a*) Considere um braço de alavanca **R** que se estende da origem *O* ao ponto *P* onde a força **F** é aplicada. O torque em relação a *O* será $\mathbf{T} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}$. (*b*) Se $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$, então o torque $\mathbf{T} = \mathbf{R}_{21} \times \mathbf{F}_1$ é independente da escolha da origem para $\mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R}_2$.

Esse resultado para campos uniformes não precisa ficar restrito apenas a circuitos filamentares. O circuito pode conter correntes superficiais ou densidades volumétricas de corrente também. Se a corrente total for dividida em filamentos, a força em cada um será zero, conforme mostramos, assim como a força total – novamente zero. Logo, qualquer circuito fechado real pelo qual circulam correntes contínuas experimenta um vetor força total nulo em um campo magnético uniforme.

Embora a força seja zero, o torque normalmente é diferente de zero.

Na definição do *torque* (ou *momento*) de uma força, é necessário considerar tanto uma origem em relação à qual o torque deve ser calculado quanto o ponto no qual a força é aplicada. Na Figura 8.5*a*, aplicamos uma força **F** no ponto *P*, e estabelecemos uma origem em *O* com um braço de alavanca rígido **R** que se estende de *O* até *P*. O torque em relação ao ponto *O* é um vetor cuja intensidade é o produto das intensidades de **R**, de **F** e do seno do ângulo entre esses dois vetores. A direção do vetor torque **T** é normal tanto à força **F** quanto ao braço de alavanca **R**, e é orientado no sentido de avanço de um parafuso dextrogiro quando giramos o braço de alavanca em direção ao vetor força, pelo menor ângulo. O torque pode ser expresso como um produto vetorial*,

$$\mathbf{T} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}$$

Vamos agora supor que duas forças, $\mathbf{F}_1$ em P_1 e $\mathbf{F}_2$ em P_2, possuem braços de alavanca $\mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R}_2$ que se estendem a partir de uma origem comum *O*, conforme mostrado na Figura 8.5*b*. Elas são aplicadas a um objeto de formato fixo que não sofre translação. Logo, o torque em relação à origem é

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_2 \times \mathbf{F}_2$$

onde

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$$

* N. de T.: Assim, o sentido de **T** também pode ser dado pela "regra do tapa" entre **R** e **F**.

e assim

$$\mathbf{T} = (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \times \mathbf{F}_1 = \mathbf{R}_{21} \times \mathbf{F}_1$$

O vetor $\mathbf{R}_{21} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$ une o ponto de aplicação de $\mathbf{F}_2$ àquele de $\mathbf{F}_1$ e é independente da escolha da origem para os dois vetores $\mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R}_2$. Logo, o torque também é independente da escolha da origem, desde que a força total seja zero. Isso pode ser estendido a qualquer número de forças.

Considere a aplicação de uma força orientada verticalmente para cima no final de uma manivela horizontal em um automóvel antigo. Essa não pode ser a única força aplicada, pois se fosse, a manivela inteira seria acelerada em uma direção ascendente. Uma segunda força, igual em intensidade àquela exercida no final da manivela, é aplicada no outro sentido, para baixo, na extremidade fixa onde está o eixo de rotação. Para uma força de 40 N numa manivela de 0,3 m de comprimento, o torque é 12 N · m. Essa situação é obtida mesmo se considerarmos a origem no eixo de rotação (levando a 12 N · m mais 0 N · m), no ponto médio da manivela (levando a 6 N · m mais 6 N · m) ou em outro ponto que nem mesmo esteja na manivela ou na extensão dela.

Podemos, dessa forma, escolher a origem mais conveniente, e essa usualmente é a origem considerada no eixo de rotação e no plano que contém as forças aplicadas se as várias forças forem coplanares.

Com essa introdução ao conceito de torque, vamos agora considerar o torque em uma espira diferencial de corrente em um campo magnético $\mathbf{B}$. A espira pertence ao plano xy (Figura 8.6). Os lados da espira são paralelos aos eixos x e y e possuem comprimentos dx e dy. O valor do campo magnético no centro da espira é considerado

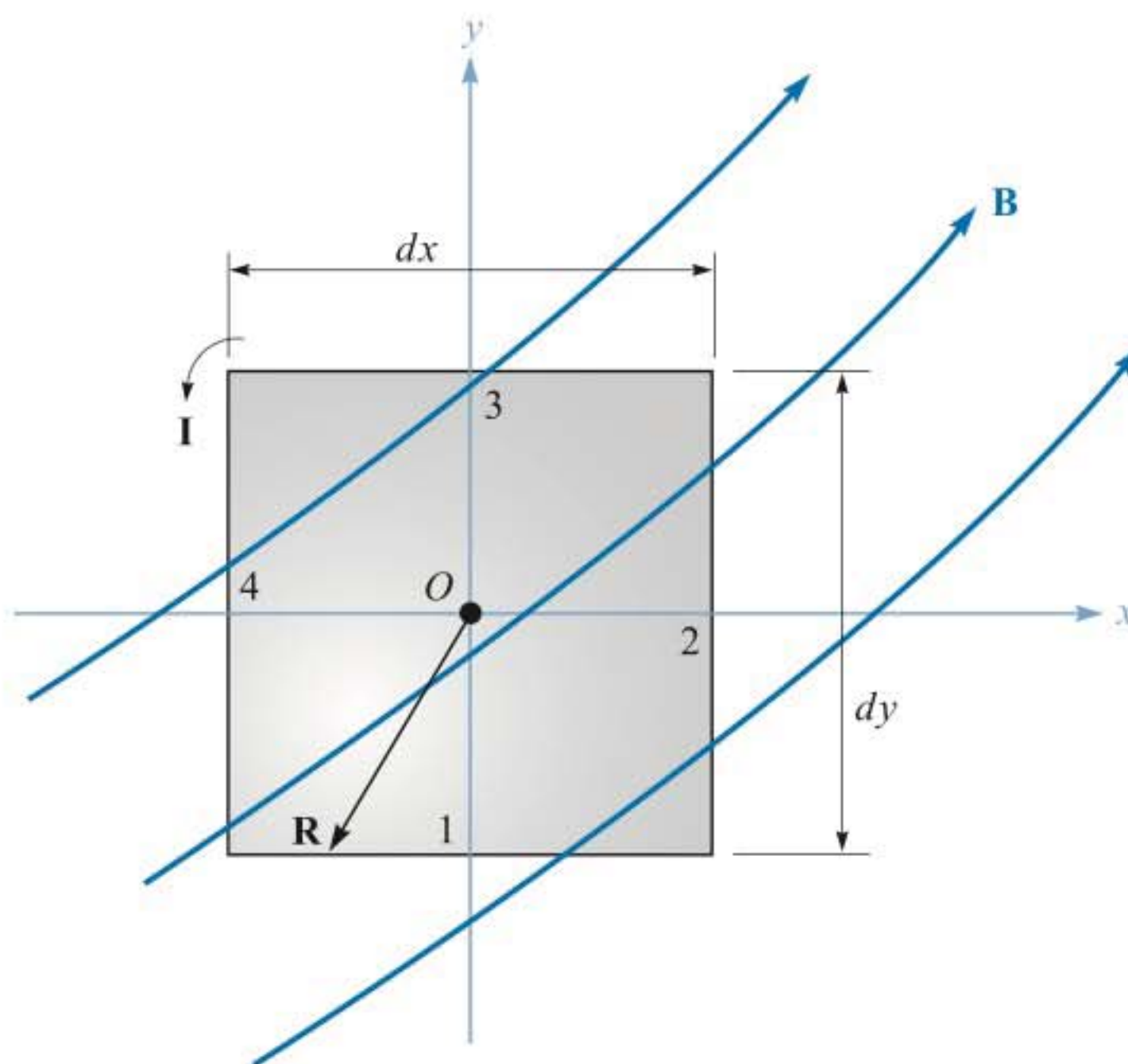



Figura 8.6 Uma espira diferencial de corrente em um campo magnético $\mathbf{B}$. O torque na espira é $d\mathbf{T} = I(dx\,dy\mathbf{a}_z) \times \mathbf{B}_0 = I\,d\mathbf{S} \times \mathbf{B}$.

$\mathbf{B}_0$. Uma vez que a espira é de tamanho diferencial, o valor de $\mathbf{B}$ em todos os pontos na espira pode ser tomado por $\mathbf{B}_0$ (por que isso não foi possível na discussão sobre rotacional e divergência?). Com isso, a força total na espira é zero, e ficamos livres para escolher a origem para o torque no centro da espira.

O vetor força no lado 1 é

$$d\mathbf{F}_1 = I\,dx\,\mathbf{a}_x \times \mathbf{B}_0$$

ou

$$d\mathbf{F}_1 = I\,dx(B_{0y}\mathbf{a}_z - B_{0z}\mathbf{a}_y)$$

Para esse lado da espira, o braço de alavanca $\mathbf{R}$ se estende da origem até o ponto médio do lado $\mathbf{R}_1 = -\frac{1}{2}dy\,\mathbf{a}_y$, e a contribuição ao torque total é

$$\begin{aligned} d\mathbf{T}_1 &= \mathbf{R}_1 \times d\mathbf{F}_1 \\ &= -\tfrac{1}{2}dy\,\mathbf{a}_y \times I\,dx(B_{0y}\mathbf{a}_z - B_{0z}\mathbf{a}_y) \\ &= -\tfrac{1}{2}dx\,dy\,I\,B_{0y}\mathbf{a}_x \end{aligned}$$

A contribuição ao torque no lado 3 será a mesma,

$$\begin{aligned} d\mathbf{T}_3 = \mathbf{R}_3 \times d\mathbf{F}_3 &= \tfrac{1}{2}dy\,\mathbf{a}_y \times (-I\,dx\,\mathbf{a}_x \times \mathbf{B}_0) \\ &= -\tfrac{1}{2}dx\,dy\,IB_{0y}\mathbf{a}_x = d\mathbf{T}_1 \end{aligned}$$

e

$$d\mathbf{T}_1 + d\mathbf{T}_3 = -dx\,dy\,IB_{0y}\mathbf{a}_x$$

Calculando o torque nos lados 2 e 4, encontramos

$$d\mathbf{T}_2 + d\mathbf{T}_4 = dx\,dy\,IB_{0x}\mathbf{a}_y$$

e assim o torque total é

$$d\mathbf{T} = I\,dx\,dy(B_{0x}\mathbf{a}_y - B_{0y}\mathbf{a}_x)$$

A grandeza dentro dos parênteses pode ser representada por um produto vetorial,

$$d\mathbf{T} = I\,dx\,dy(\mathbf{a}_z \times \mathbf{B}_0)$$

ou

$$\boxed{d\mathbf{T} = I\,d\mathbf{S} \times \mathbf{B}} \qquad (15)$$

onde $d\mathbf{S}$ é a área vetorial da espira diferencial de corrente e o subscrito em $\mathbf{B}_0$ foi removido.

Agora definiremos o produto da corrente da espira pela área vetorial da espira como o *momento de dipolo magnético diferencial* $d\mathbf{m}$, com unidades de $\mathrm{A \cdot m^2}$. Logo

$$\boxed{d\mathbf{m} = I\,d\mathbf{S}} \qquad (16)$$

e

$$d\mathbf{T} = d\mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (17)$$

Se estendermos os resultados que obtivemos na Seção 4.7 para o dipolo *elétrico* diferencial determinando o torque produzido no mesmo por um campo *elétrico*, teremos um resultado similar,

$$d\mathbf{T} = d\mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

As Equações (15) e (17) são resultados genéricos e se aplicam a espiras diferenciais de qualquer formato, e não apenas aos retangulares. O torque em uma espira circular ou triangular é também expresso pela superfície vetorial ou pelo momento, como nas Equações (15) ou (17).

Uma vez que selecionamos uma espira diferencial de corrente e consideramos **B** constante ao longo dela, o torque em uma espira *plana* de qualquer tamanho ou formato em um campo magnético *uniforme* será dado pela mesma expressão,

$$\mathbf{T} = I\mathbf{S} \times \mathbf{B} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (18)$$

Devemos notar que o torque na espira de corrente sempre tende a girar a espira de forma a alinhar o campo magnético produzido por ela com o campo magnético aplicado que está causando o torque. Essa é talvez a maneira mais fácil de determinar a direção e sentido do torque.

EXEMPLO 8.3

Para ilustrar alguns cálculos associados à força e ao torque, considere a espira retangular mostrada na Figura 8.7. Calcule o torque utilizando $\mathbf{T} = I\mathbf{S} \times \mathbf{B}$.

Solução. A espira tem dimensões de 1 m por 2 m e está imersa em um campo uniforme $\mathbf{B}_0 = -0{,}6\mathbf{a}_y + 0{,}8\mathbf{a}_z$ T. A corrente da espira é de 4 mA, um valor que é suficientemente pequeno para não gerar qualquer campo magnético que possa afetar $\mathbf{B}_0$.

Temos

$$\mathbf{T} = 4 \times 10^{-3}[(1)(2)\mathbf{a}_z] \times (-0{,}6\mathbf{a}_y + 0{,}8\mathbf{a}_z) = 4{,}8\mathbf{a}_x \text{ mN} \cdot \text{m}$$

Logo, a espira tende a girar em torno de um eixo paralelo ao eixo x positivo. O pequeno campo magnético produzido pela corrente de 4 mA da espira tende a se alinhar com $\mathbf{B}_0$.

EXEMPLO 8.4

Vamos agora encontrar o torque mais uma vez, desta vez calculando a força total e a contribuição do torque para cada lado.

Solução. No lado 1, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1 &= I\mathbf{L}_1 \times \mathbf{B}_0 = 4 \times 10^{-3}(1\mathbf{a}_x) \times (-0{,}6\mathbf{a}_y + 0{,}8\mathbf{a}_z) \\ &= -3{,}2\mathbf{a}_y - 2{,}4\mathbf{a}_z \text{ mN}\end{aligned}$$

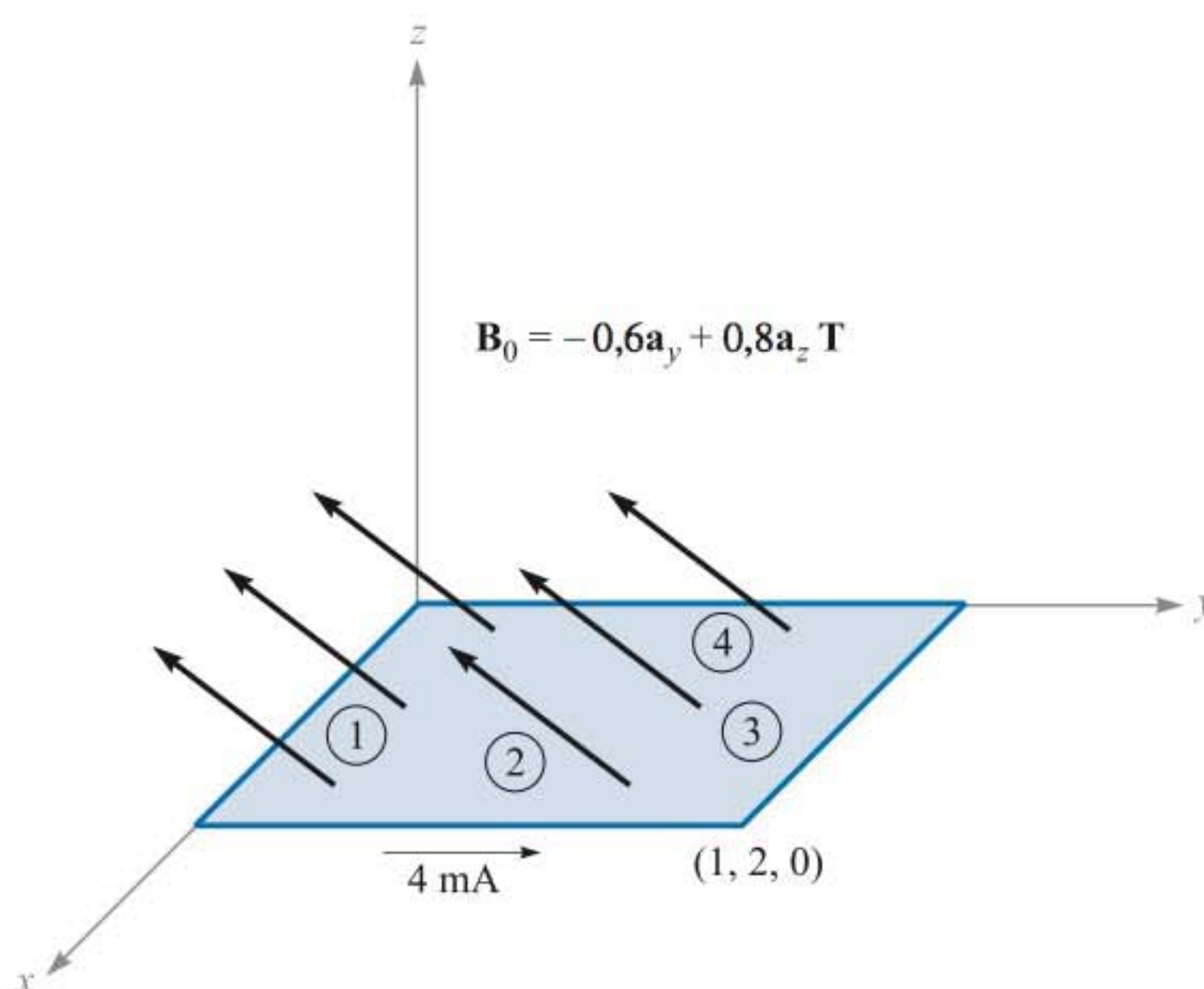



Figura 8.7 Uma espira retangular está imersa em uma densidade de fluxo magnético uniforme $\mathbf{B}_0$.

No lado 3, obtemos o valor negativo do resultado anterior,

$$\mathbf{F}_3 = 3{,}2\mathbf{a}_y + 2{,}4\mathbf{a}_z \text{ mN}$$

Em seguida, consideramos o lado 2:

$$\mathbf{F}_2 = I\mathbf{L}_2 \times \mathbf{B}_0 = 4 \times 10^{-3}(2\mathbf{a}_y) \times (-0{,}6\mathbf{a}_y + 0{,}8\mathbf{a}_z)$$
$$= 6{,}4\mathbf{a}_x \text{ mN}$$

e verificamos que o lado 4 novamente fornece o negativo desse resultado,

$$\mathbf{F}_4 = -6{,}4\mathbf{a}_x \text{ mN}$$

Uma vez que essas forças estão distribuídas uniformemente ao longo de cada um dos lados, tratamos cada uma como se fosse aplicada no centro do lado. A origem para o torque pode ser escolhida em qualquer lugar, uma vez que a soma das forças é zero; escolheremos o centro da espira. Com isso,

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_4 = \mathbf{R}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_2 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{R}_3 \times \mathbf{F}_3 + \mathbf{R}_4 \times \mathbf{F}_4$$
$$= (-1\mathbf{a}_y) \times (-3{,}2\mathbf{a}_y - 2{,}4\mathbf{a}_z) + (0{,}5\mathbf{a}_x) \times (6{,}4\mathbf{a}_x)$$
$$+ (1\mathbf{a}_y) \times (3{,}2\mathbf{a}_y + 2{,}4\mathbf{a}_z) + (-0{,}5\mathbf{a}_x) \times (-6{,}4\mathbf{a}_x)$$
$$= 2{,}4\mathbf{a}_x + 2{,}4\mathbf{a}_x = 4{,}8\mathbf{a}_x \text{ mN} \cdot \text{m}$$

Calcular o produto vetorial entre o momento da espira e a densidade de fluxo magnético é certamente mais fácil.

EP8.5. Um triângulo condutor filamentar une os pontos $A(3, 1, 1)$, $B(5, 4, 2)$ e $C(1, 2, 4)$. Pelo segmento AB passa uma corrente de 0,2 A na direção $\mathbf{a}_{AB}$. Está presente um campo magnético $\mathbf{B} = 0{,}2\mathbf{a}_x - 0{,}1\mathbf{a}_y + 0{,}3\mathbf{a}_z$ T. Calcule: (*a*) a força no segmento BC; (*b*) a força na espira triangular; (*c*) o torque na espira em relação a uma origem em A; (*d*) o torque na espira em relação a uma origem em C.

Resp. $-0{,}08\mathbf{a}_x + 0{,}32\mathbf{a}_y + 0{,}16\mathbf{a}_z$ N; 0; $-0{,}16\mathbf{a}_x - 0{,}08\mathbf{a}_y + 0{,}08\mathbf{a}_z$ N · m; $-0{,}16\mathbf{a}_x - 0{,}08\mathbf{a}_y + 0{,}08\mathbf{a}_z$ N · m

8.5 NATUREZA DOS MATERIAIS MAGNÉTICOS

Agora estamos em condições de combinar nosso conhecimento sobre a ação de um campo magnético em uma espira de corrente com um modelo simples de um átomo e obter alguma informação sobre a diferença no comportamento dos vários tipos de materiais na presença de campos magnéticos.

Apesar de resultados quantitativos exatos só poderem ser obtidos pelo uso da teoria quântica, o modelo atômico simples que supõe a existência de um núcleo central positivo cercado por elétrons em várias órbitas circulares fornece resultados quantitativos razoáveis e proporciona uma teoria qualitativa satisfatória. Um elétron em uma órbita é análogo a uma pequena espira de corrente (na qual a corrente circula no sentido oposto ao sentido de circulação do elétron) e, como tal, experimenta um torque em um campo magnético externo. O torque tende a alinhar o campo magnético produzido pelo elétron em órbita com o campo magnético externo. Se não houvesse outros momentos magnéticos a considerar, concluiríamos então que todos os elétrons em órbita no material deslocar-se-iam de modo a somar seus campos magnéticos ao campo aplicado, e assim o campo magnético resultante em qualquer ponto do material seria maior, naquele ponto, caso o material não estivesse presente.

Entretanto, há um segundo momento, atribuído ao *spin do elétron*. Apesar de ser tentador modelar esse fenômeno pressupondo que o elétron gira ao redor do seu eixo e assim gera um momento de dipolo magnético, resultados quantitativos satisfatórios não são obtidos dessa teoria. Em vez disso, é necessário assimilar a matemática da teoria quântica relativista para mostrar que um elétron pode ter um momento magnético de spin de aproximadamente $\pm 9 \times 10^{-24}$ A · m^2. Os sinais de mais e menos indicam que alinhamentos aditivos ou subtrativos ao campo magnético externo são possíveis. Em um átomo com muitos elétrons presentes, apenas os spins dos elétrons que estão em camadas não completamente preenchidas contribuirão para o momento magnético do átomo.

Uma terceira contribuição para o momento de um átomo é o *spin do núcleo*. Embora esse fator cause um efeito desprezível nas propriedades magnéticas dos materiais em geral, é a base do procedimento de mapeamento por ressonância magnética nuclear (MRI) disponibilizado por muitos dos grandes hospitais.

Dessa forma, cada átomo contém muitos componentes de momentos diferentes, e a combinação desses momentos determina as características magnéticas do material e proporciona sua classificação magnética geral. Vamos descrever, brevemente, seis tipos diferentes de materiais: diamagnéticos, paramagnéticos, ferromagnéticos, antiferromagnéticos, ferrimagnéticos e superparamagnéticos.

Primeiro, vamos considerar aqueles átomos nos quais os pequenos campos magnéticos produzidos pelo movimento dos elétrons em suas órbitas e aqueles produzidos pelo spin eletrônico se combinam para produzir um campo líquido igual a zero. Note que estamos considerando aqui os campos produzidos pela própria movimentação dos elétrons na ausência de qualquer campo magnético externo. Podemos também descrever esse material como aquele em que o momento magnético permanente $\mathbf{m}_0$ de cada átomo é zero; esse tal material é chamado de *diamagnético*. Assim somos levados a pensar que um campo magnético externo não produziria torque no átomo e nem realinhamento dos campos de dipolo e, consequentemente, um campo magnético interno igual ao campo aplicado. Com uma margem de erro de apenas uma parte em cem mil, isso está correto.

Vamos selecionar um elétron em órbita cujo momento $\mathbf{m}$ está na mesma direção do campo $\mathbf{B}_0$ aplicado (Figura 8.8). O campo magnético produz uma força para fora no elétron em órbita. Uma vez que o raio da órbita é quantizado e não pode mudar, a força de Coulomb de atração, direcionada para dentro, permanece também inalterada. Dessa forma, o desbalanço de forças criado pela força magnética para fora deve ser compensado por uma velocidade orbital menor. Com isso, o momento orbital diminui, resultando em um campo interno menor.

Se tivéssemos selecionado um átomo para o qual $\mathbf{m}$ e $\mathbf{B}_0$ fossem opostos, a força magnética seria direcionada para dentro, a velocidade aumentaria, o momento orbital aumentaria e um maior cancelamento de $\mathbf{B}_0$ ocorreria. Mais uma vez teríamos um campo interno menor.

O bismuto metálico mostra um efeito diamagnético maior que a maioria dos outros materiais diamagnéticos, dentre os quais estão o hidrogênio, o hélio, os outros gases "inertes", o cloreto de sódio, o cobre, o ouro, o silício, o germânio, o grafite e o enxofre. Devemos perceber também que o efeito diamagnético está presente em todos os materiais, porque ele é gerado por uma interação do campo magnético externo com todos os elétrons em órbita. Contudo, esse efeito fica encoberto pelos outros efeitos nos materiais que vamos considerar em seguida.

Consideremos agora um átomo no qual os efeitos do spin do elétron e do movimento orbital não se cancelam totalmente. O átomo em si tem um momento magnético pequeno, mas a orientação aleatória dos átomos em uma amostra maior produz um momento magnético *médio* nulo. O material não apresenta efeitos magnéticos

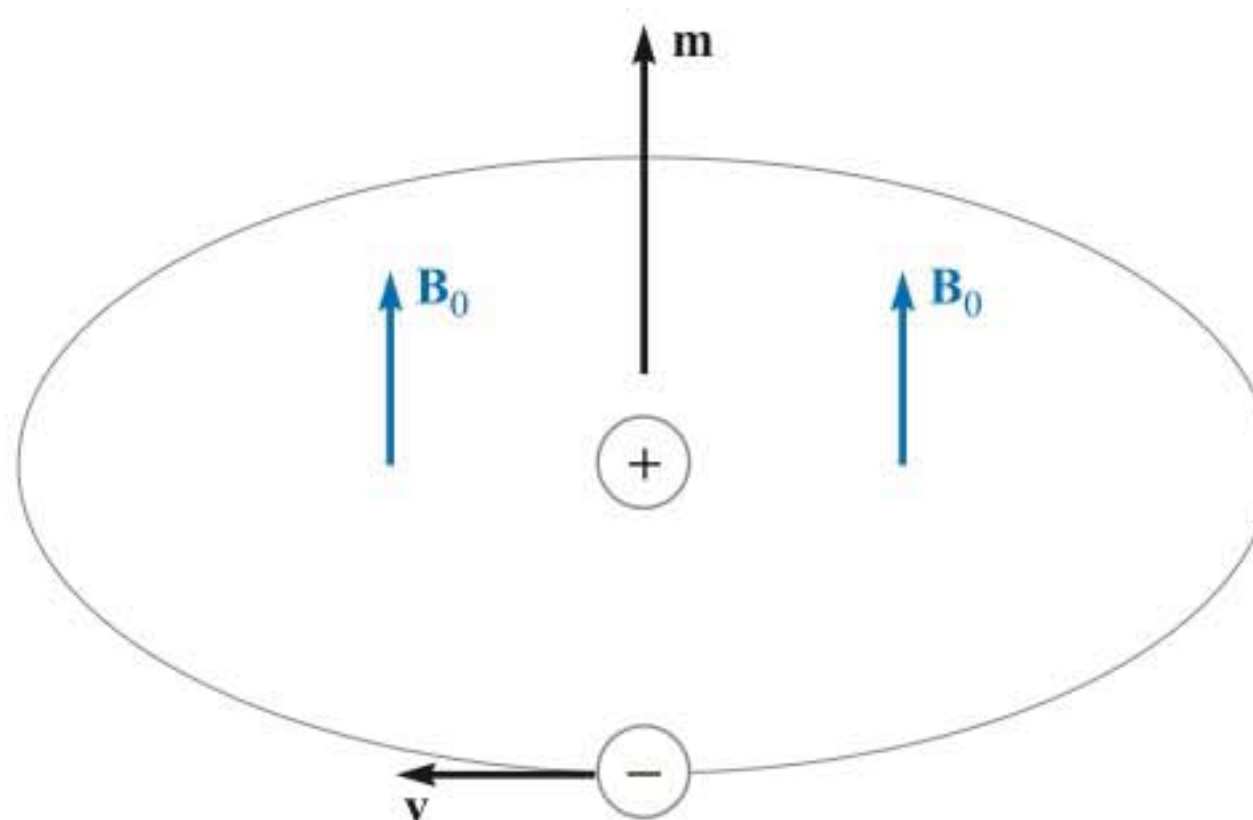



Figura 8.8 Um elétron em órbita tem um momento magnético $\mathbf{m}$ na mesma direção do campo $\mathbf{B}_0$ aplicado.

na ausência de um campo externo; contudo, quando um campo externo é aplicado, existe um pequeno torque em cada momento atômico, e esses momentos tendem a se alinhar com o campo externo. Esse alinhamento age no sentido de aumentar o valor de **B** dentro do material em relação ao valor exterior. Entretanto, o efeito diamagnético ainda está agindo nos elétrons em órbita e pode se opor a esse aumento. Se o resultado líquido for uma diminuição em **B**, o material ainda é chamado de diamagnético. Contudo, se há um aumento em **B**, o material é chamado de *paramagnético*. O potássio, o oxigênio, o tungstênio e os elementos raros da Terra e muitos dos seus sais, como cloreto de érbio, o óxido de neodímio e o óxido de ítrio, um dos materiais utilizados em *masers*, são exemplos de substâncias paramagnéticas.

As quatro classes restantes de materiais, os ferromagnéticos, antiferromagnéticos, ferrimagnéticos e superparamagnéticos, possuem momentos atômicos fortes. Além disso, a interação entre átomos adjacentes provoca o alinhamento aditivo ou subtrativo dos momentos magnéticos dos átomos.

WWW Animação

Em materiais *ferromagnéticos*, cada átomo possui um momento de dipolo relativamente grande, causado primariamente por momentos não compensados de spin de elétron. Forças interatômicas provocam o alinhamento desses momentos de forma paralela, em regiões que contêm diversos átomos. Essas regiões são chamadas de *domínios*, e podem apresentar tamanhos e formatos variados, desde um micrômetro até vários centímetros, dependendo do tamanho, do formato, do material e da história magnética da amostra. Materiais ferromagnéticos virgens possuirão domínios, e cada um apresentará um momento magnético forte. Os momentos dos domínios, entretanto, variam de direção de domínio para domínio. O efeito geral é então um cancelamento, e o material como um todo não possuirá momento magnético. Enretanto, com a aplicação de um campo magnético externo aqueles domínios que possuem momentos na direção do campo aplicado aumentam de tamanho à custa de seus vizinhos, e o campo magnético interno aumenta bastante em relação àquele aplicado externamente. Quando o campo externo é removido, geralmente não se alcança um alinhamento de domínios completamente aleatório, e um campo de dipolo residual, ou remanescente, permanece na estrutura macroscópica. O fato de o momento magnético do material ser diferente após o campo ser removido, ou o fato de o estado magnético do material ser uma função da sua história magnética, é chamado *histerese*, um assunto que será discutido novamente quando circuitos magnéticos forem estudados na Seção 8.8.

Materiais ferromagnéticos não são isotrópicos em cristais únicos, e por isso iremos limitar nossa discussão aos cristais policristalinos, exceto por mencionar que uma das características dos materiais magnéticos anisotrópicos é a magnetostrição, ou a mudança nas dimensões do cristal quando um campo magnético é aplicado a ele.

Os únicos elementos ferromagnéticos à temperatura ambiente são o ferro, o níquel e o cobalto, que perdem todas as suas características ferromagnéticas acima da temperatura de Curie, que vale 770 °C (1.043 K) para o ferro. Algumas ligas desses metais (entre si e com outros metais) também são ferromagnéticas, como o alnico, uma liga alumínio-níquel-cobalto com uma pequena quantidade de cobre. Em baixas temperaturas, alguns elementos raros da Terra, tais como o gadolínio e o disprósio, são ferromagnéticos. É interessante, também, que algumas ligas de metais não ferromagnéticos são ferromagnéticas, tal como o bismuto-manganês e o cobre-manganês-estanho.

Em materiais *antiferromagnéticos*, as forças entre átomos adjacentes fazem com que os momentos atômicos se alinhem de forma antiparalela. O momento magnético líquido é zero, e os materiais antiferromagnéticos são afetados apenas levemente pela presença de um campo magnético externo. Esse efeito foi primeiramente descoberto no óxido de manganês, mas várias centenas de materiais antiferromagnéticos foram identificadas desde então. Muitos óxidos, sulfetos e cloretos estão incluídos, como o óxido de níquel (NiO), o sulfeto de ferro (FeS) e o cloreto de cobalto ($CoCl_2$). O efeito antiferromagnético somente se faz presente em temperaturas relativamente baixas, usualmente bem abaixo da temperatura ambiente. Esse efeito não será importante para a engenharia nesse momento.

As substâncias *ferrimagnéticas* também apresentam alinhamento antiparalelo de momentos atômicos adjacentes, mas os momentos não são iguais. Uma resposta forte a um campo magnético externo ocorre dessa forma, apesar de não ser tão forte quanto aquela em materiais ferromagnéticos. O grupo mais importante de materiais ferrimagnéticos são os *ferrites*, nos quais a condutividade é baixa, várias ordens de magnitude menor que a condutividade dos semicondutores. O fato de essas substâncias terem maior resistência que os materiais ferromagnéticos resulta em uma corrente induzida muito menor no material quando campos alternados são aplicados, como por exemplo, nos núcleos de transformadores que operam em frequências mais altas. As correntes reduzidas (correntes parasitas) levam a menores perdas ôhmicas no núcleo do transformador. A magnetita, óxido de ferro (Fe_3O_4), um ferrite de níquel-zinco ($Ni_{1/2}Zn_{1/2}Fe_2O_4$) e um ferrite de níquel ($NiFe_2O_4$) são exemplos dessa classe de materiais. O ferrimagnetismo também desaparece acima da temperatura de Curie.

Materiais *superparamagnéticos* são compostos de um conjunto de partículas ferromagnéticas em uma matriz não ferromagnética. Embora os domínios existam dentro de cada partícula, suas paredes não conseguem penetrar no material intermediário da matriz existente entre partículas. Um exemplo importante é a fita magnética utilizada em gravadores de áudio ou de vídeo.

A Tabela 8.1 resume as características dos seis tipos de materiais magnéticos sobre os quais discutimos.

Tabela 8.1 Características dos materiais magnéticos

Classificação	Momentos magnéticos	Valores de B	Comentários
Diamagnético	$\mathbf{m}_{\text{órbita}} + \mathbf{m}_{\text{spin}} = 0$	$B_{\text{interno}} < B_{\text{aplicado}}$	$B_{\text{interno}} \doteq B_{\text{aplicado}}$
Paramagnético	$\mathbf{m}_{\text{órbita}} + \mathbf{m}_{\text{spin}} =$ pequeno	$B_{\text{interno}} > B_{\text{aplicado}}$	$B_{\text{interno}} \doteq B_{\text{aplicado}}$
Ferromagnético	$\lvert\mathbf{m}_{\text{spin}}\rvert \gg \lvert\mathbf{m}_{\text{órbita}}\rvert$	$B_{\text{interno}} \gg B_{\text{aplicado}}$	Domínios
Antiferromagnético	$\lvert\mathbf{m}_{\text{spin}}\rvert \gg \lvert\mathbf{m}_{\text{órbita}}\rvert$	$B_{\text{interno}} \doteq B_{\text{aplicado}}$	Momentos adjacentes opostos
Ferrimagnético	$\lvert\mathbf{m}_{\text{spin}}\rvert \gg \lvert\mathbf{m}_{\text{órbita}}\rvert$	$B_{\text{interno}} > B_{\text{aplicado}}$	Momentos adjacentes opostos desbalanceados; baixo σ.
Superparamagnético	$\lvert\mathbf{m}_{\text{spin}}\rvert \gg \lvert\mathbf{m}_{\text{órbita}}\rvert$	$B_{\text{interno}} > B_{\text{aplicado}}$	Matriz não magnética; fitas de gravação.

8.6 MAGNETIZAÇÃO E PERMEABILIDADE

Para colocarmos nossa descrição de materiais magnéticos em uma base mais quantitativa, vamos agora dedicar uma página ou mais para mostrar como os dipolos magnéticos agem como uma fonte distribuída de campo magnético. Nosso resultado será uma equação que se parece muito com a lei circuital de Ampère, $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$. A corrente, entretanto, será o movimento de cargas *ligadas* (elétrons em órbitas, spin dos elétrons e spin nuclear), e o campo, que possui dimensões de **H**, será chamado de magnetização **M**. A corrente produzida pelas cargas ligadas é chamada de *corrente ligada* ou *corrente de Ampère*.

Vamos começar definindo a magnetização **M** expressando-a pelo momento de dipolo magnético **m**. A corrente ligada I_b circula em volta de um caminho que envolve uma área diferencial $d\mathbf{S}$, estabelecendo um momento de dipolo ($\text{A} \cdot \text{m}^2$),

$$\mathbf{m} = I_b d\mathbf{S}$$

Se existem n dipolos magnéticos por unidade de volume e considerarmos um volume Δv, o momento de dipolo magnético total será encontrado pela soma vetorial

$$\mathbf{m}_{\text{total}} = \sum_{i=1}^{n\Delta v} \mathbf{m}_i \tag{19}$$

Cabe notar que cada um dos $\mathbf{m}_i$ podem ser diferentes. Em seguida, definiremos a *magnetização* **M** como o *momento de dipolo magnético por unidade de volume*,

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{n\Delta v} \mathbf{m}_i$$

e assim poderemos concluir que a unidade de **M** deve se a mesma unidade de **H**, ou seja, ampères por metro.

Agora, vamos considerar o efeito de algum alinhamento dos dipolos magnéticos como o resultado da aplicação de um campo magnético. Vamos investigar esse alinhamento ao longo de um caminho fechado parcialmente mostrado na Figura 8.9. A figura mostra vários momentos magnéticos **m** que fazem um ângulo θ com o elemento de caminho $d\mathbf{L}$. Cada momento consiste em uma corrente ligada I_b circulando ao redor de uma área $d\mathbf{S}$. Estamos, portanto, considerando um pequeno volume, $dS \cos \theta dL$, ou $d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{L}$, dentro do qual existem $n d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{L}$ dipolos magnéticos. Na mudança de uma orientação aleatória para esse alinhamento parcial, a corrente ligada que atravessa a superfície en-

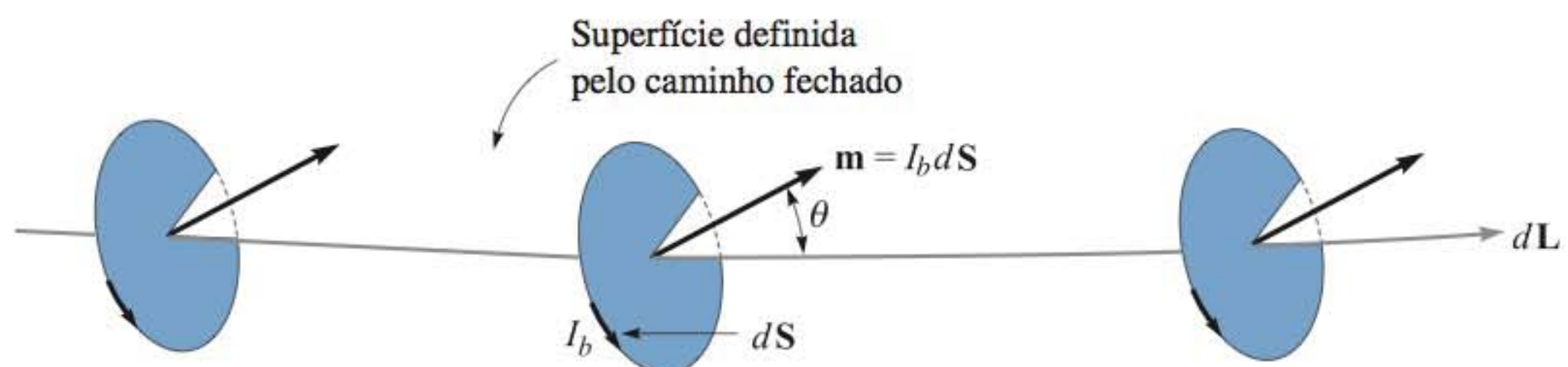



Figura 8.9 Uma seção $d\mathbf{L}$ de um caminho fechado ao longo do qual dipolos magnéticos foram parcialmente alinhados por algum campo magnético externo. O alinhamento fez com que a corrente ligada que passa através da superfície definida pelo caminho fechado aumentasse de $nI_b d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{L}$ ampères.

volvida pelo caminho (para nossa esquerda à medida que nos deslocamos na direção $\mathbf{a}_L$ na Figura 8.9) aumentou de I_b para cada um dos $nd\mathbf{S} \cdot d\mathbf{L}$ dipolos. Assim, a mudança diferencial na corrente ligada líquida I_B sobre o segmento d**L** será

$$dI_B = nI_b d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{L} = \mathbf{M} \cdot d\mathbf{L} \tag{20}$$

e dentro de um contorno fechado inteiro,

$$I_B = \oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{L} \tag{21}$$

A Equação (21) simplesmente informa que se nos deslocarmos em volta de um caminho fechado e encontrarmos momentos de dipolo apontando na mesma direção que a nossa, mais frequentemente do que apontam na direção oposta, haverá uma corrente correspondente composta, por exemplo, de elétrons em órbitas atravessando a superfície interior.

Essa última expressão tem alguma semelhança com a lei circuital de Ampère, e podemos agora generalizar a relação entre **B** e **H** de forma que ela se aplique para outros meios que não apenas o espaço livre. Nossa discussão presente é baseada nas forças e torques em espiras diferenciais de corrente localizadas no campo **B**, e com isso tomamos **B** como nossa grandeza fundamental e procuramos uma definição aprimorada para **H**. Com isso, escrevemos a lei circuital de Ampère expressando-a pela corrente *total*, ou seja, a ligada e também a livre,

$$\oint \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot d\mathbf{L} = I_T \tag{22}$$

onde

$$I_T = I_\mathbf{B} + I$$

e I é a corrente *livre* total envolvida pelo caminho fechado. Note que a corrente livre aparece sem subscrito, uma vez que é o tipo de corrente mais importante e será a única corrente que aparecerá nas equações de Maxwell.

Combinando essas últimas três equações, obtemos uma expressão para a corrente livre envolvida,

$$I = I_T - I_\mathbf{B} = \oint \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \cdot d\mathbf{L} \tag{23}$$

Podemos, agora, definir **H** expressando-o por **B** e **M**,

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \tag{24}$$

e vemos que $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ no espaço livre onde a magnetização é nula. Essa relação é normalmente escrita de uma forma que evita sinais de fração e de subtração:

$$\boxed{\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})} \tag{25}$$

Podemos agora utilizar nosso campo **H**, novamente definido, na Equação (23),

$$I = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \tag{26}$$

obtendo a lei circuital de Ampère em termos de correntes livres.

Utilizando as várias densidades de corrente, temos

$$I_{\mathbf{B}} = \int_S \mathbf{J}_B \cdot d\mathbf{S}$$

$$I_T = \int_S \mathbf{J}_T \cdot d\mathbf{S}$$

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

Com a ajuda do teorema de Stokes, podemos agora transformar as Equações (21), (26) e (22) nas relações de rotacional equivalentes:

$$\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}_B$$

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{J}_T$$

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}} \tag{27}$$

Devemos enfatizar apenas as Equações (26) e (27) no trabalho que se segue, as duas expressões que envolvem cargas livres.

A relação entre **B**, **H** e **M** expressa pela Equação (25) pode ser simplificada para meios isotrópicos e lineares, onde uma susceptibilidade magnética χ_m possa ser definida:

$$\boxed{\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}} \tag{28}$$

Logo, temos

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \chi_m \mathbf{H})$$
$$= \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$$

onde

$$\mu_r = 1 + \chi_m \tag{29}$$

é definida como a *permeabilidade relativa* μ_r. Em seguida, definimos a *permeabilidade* μ:

$$\mu = \mu_0 \mu_r \tag{30}$$

e isso nos permite escrever a relação simples entre **B** e **H**,

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \tag{31}$$

EXEMPLO 8.5

Dado um material ferrite operando de maneira linear com $B = 0{,}05$ T, considere também $\mu_r = 50$ e calcule valores para χ_m, M e H.

Solução. Uma vez que $\mu_r = 1 + \chi_m$, temos

$$\chi_m = \mu_r - 1 = 49$$

Também,

$$B = \mu_r \mu_0 H$$

e

$$H = \frac{0,05}{50 \times 4\pi \times 10^{-7}} = 796 \text{ A/m}$$

A magnetização é $M = \chi_m H$, ou 39.000 A/m. As formas alternativas de relacionar B e H são, primeiramente,

$$B = \mu_0(H + M)$$

ou

$$0,05 = 4\pi \times 10^{-7}(796 + 39.000)$$

mostrando que as correntes de Ampère produzem 49 vezes mais intensidade de campo magnético que as cargas livres produzem. E, em segundo lugar,

$$B = \mu_r \mu_0 H$$

ou

$$0,05 = 50 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 796$$

onde utilizamos uma permeabilidade de 50 e deixamos essa grandeza responder completamente pela noção de cargas ligadas. Deveremos enfatizar a última interpretação nos capítulos seguintes.

As primeiras duas leis que investigamos para os campos magnéticos foram a lei de Biot-Savart e a lei circuital de Ampère. Ambas estavam restritas ao espaço livre em suas aplicações. Vamos agora estender seus usos a qualquer material magnético homogêneo, linear e isotrópico que possa ser descrito por uma permeabilidade relativa μ_r.

Assim como nos materiais dielétricos anisotrópicos, a permeabilidade de um material magnético anisotrópico deve ser dada como uma matriz 3 × 3, enquanto **B** e **H** são ambos matrizes 3 × 1. Temos

$$B_x = \mu_{xx} H_x + \mu_{xy} H_y + \mu_{xz} H_z$$
$$B_y = \mu_{yx} H_x + \mu_{yy} H_y + \mu_{yz} H_z$$
$$B_z = \mu_{zx} H_x + \mu_{zy} H_y + \mu_{zz} H_z$$

Para materiais anisotrópicos, então, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ é uma equação matricial. Entretanto, $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ permanece válida, embora **B**, **H** e **M** não sejam mais paralelos de uma forma geral. O material magnético anisotrópico mais comum é um cristal ferromagnético simples, apesar de filmes magnéticos finos também apresentarem anisotropia. A maioria das aplicações de materiais ferromagnéticos, entretanto, envolve estruturas policristalinas que são muito mais fáceis de serem feitas.

Nossas definições de susceptibilidade e permeabilidade também dependem da condição de linearidade. Infelizmente, isso é verdade apenas nos materiais paramagnéticos e diamagnéticos, que são menos interessantes, para os quais a permeabilidade relativa raramente difere da unidade por mais que uma parte em mil. Eis alguns valores típicos de suscetibilidade para materiais diamagnéticos: hidrogênio, -2×10^{-5};

cobre, $-0{,}9 \times 10^{-5}$; germânio, $-0{,}8 \times 10^{-5}$; silício, $-0{,}3 \times 10^{-5}$ e grafite, -12×10^{-5}. Agora, algumas suscetibilidades paramagnéticas representativas: oxigênio, 2×10^{-6}; tungstênio, $6{,}8 \times 10^{-5}$; óxido de ferro (Fe_2O_3), $1{,}4 \times 10^{-3}$ e óxido de ítrio (Y_2O_3), $0{,}53 \times 10^{-6}$. Se simplesmente tomarmos a razão entre B e $\mu_0 H$ como a permeabilidade relativa de um material ferromagnético, valores típicos de μ_r variariam de 10 a 100.000. Materiais diamagnéticos, paramagnéticos e antiferromagnéticos normalmente são chamados de não magnéticos.

EP8.6. Encontre a magnetização em um material magnético onde: (*a*) $\mu = 1{,}8 \times 10^{-5}$ H/m e $H = 120$ A/m; (*b*) $\mu_r = 22$, no qual existem $8{,}3 \times 10^{28}$ átomos/m^3 e cada átomo tem um momento de dipolo de $4{,}5 \times 10^{-27}$ A $\cdot$ m^2; (*c*) $B = 300\ \mu$T e $\chi_m = 15$.

Resp. 1.599 A/m; 374 A/m; 224 A/m

EP8.7. A magnetização em um material magnético para o qual $\chi_m = 8$ é dada em certa região como $150z^2\mathbf{a}_x$ A/m. Em $z = 4$ cm, calcule a intensidade de: (*a*) $\mathbf{J}_T$; (*b*) $\mathbf{J}$; (*c*) $\mathbf{J}_B$.

Resp. 13,5 A/m^2; 1,5 A/m^2; 12 A/m^2

8.7 CONDIÇÕES DE FRONTEIRA MAGNÉTICAS

Não deveremos ter dificuldades em alcançar as condições de fronteira corretas a serem aplicadas a **B**, **H** e **M** na interface entre dois materiais magnéticos diferentes, pois já resolvemos problemas similares, tanto para materiais condutores quanto para dielétricos. Não precisamos de novas técnicas.

A Figura 8.10 mostra uma fronteira entre dois materiais lineares, homogêneos e isotrópicos com permeabilidades μ_1 e μ_2. A condição de fronteira para os componentes normais é determinada permitindo que a superfície corte uma pequena superfície gaussiana cilíndrica. Aplicando a lei de Gauss para o campo magnético da Seção 7.5,

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

encontramos que

$$B_{N1}\Delta S - B_{N2}\Delta S = 0$$

ou

$$\boxed{B_{N2} = B_{N1}} \qquad (32)$$

Logo

$$H_{N2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{N1} \qquad (33)$$

O componente normal de **B** é contínuo, mas o componente normal de **H** é descontínuo à razão de μ_1/μ_2.

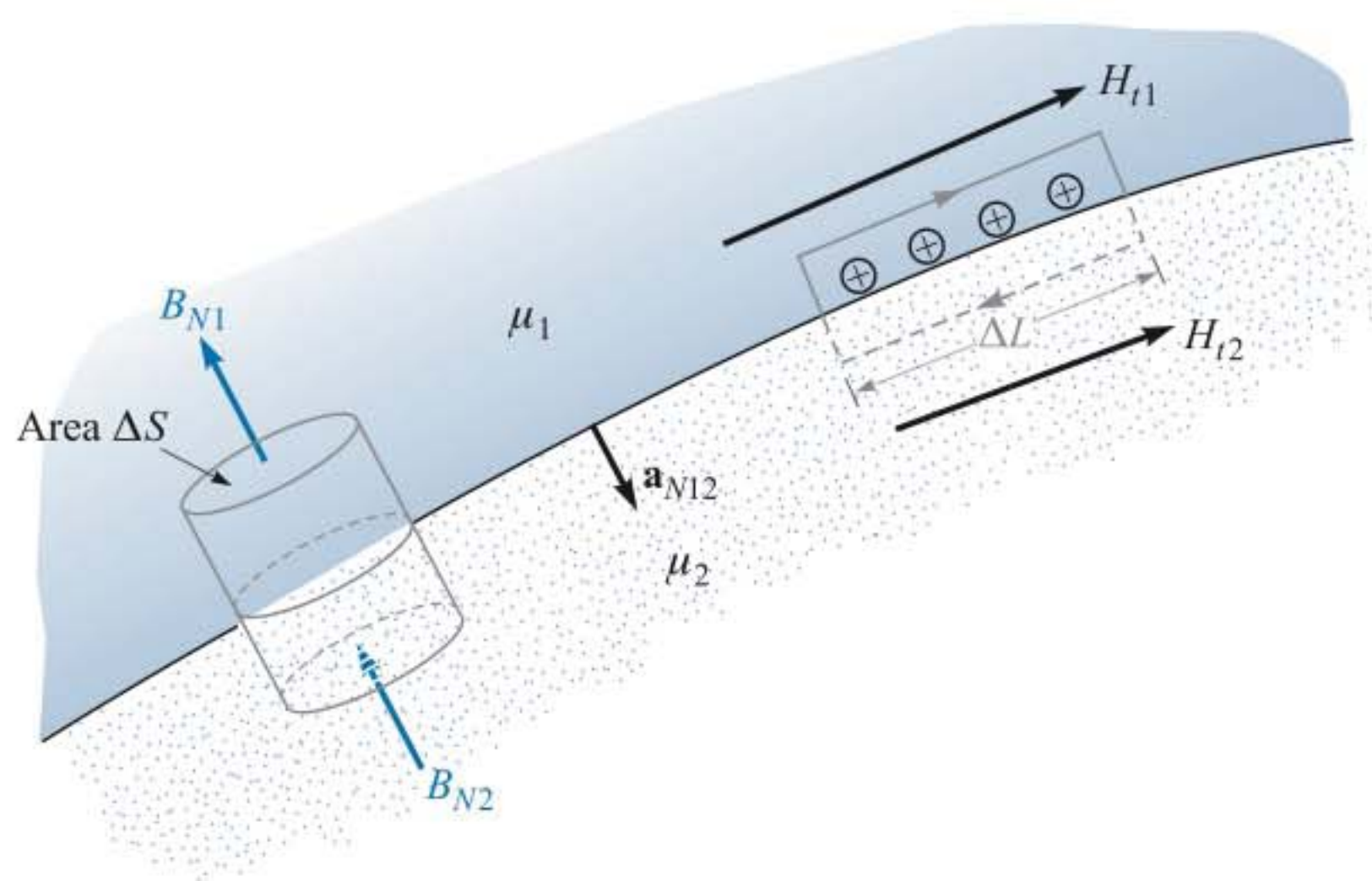



Figura 8.10 Uma superfície gaussiana e um caminho fechado são construídos na fronteira entre os meios 1 e 2, que possuem permeabilidades μ_1 e μ_2, respectivamente. Disso determinamos as condições de fronteira $B_{N1} = B_{N2}$ e $H_{t1} - H_{t2} = K$, o componente da densidade superficial de corrente que está direcionada para dentro da página.

A relação entre os componentes normais de **M** pode ser claramente prevista caso a relação entre os componentes normais de **H** seja conhecida. Para materiais magnéticos lineares, o resultado é escrito simplesmente como

$$M_{N2} = \chi_{m2}\frac{\mu_1}{\mu_2}H_{N1} = \frac{\chi_{m2}\mu_1}{\chi_{m1}\mu_2}M_{N1} \tag{34}$$

A seguir, a lei circuital de Ampère

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{L} = I$$

é aplicada ao longo de um pequeno caminho fechado em um plano normal à superfície de fronteira, conforme mostrado à direita na Figura 8.10. Completando a volta no sentido horário ao longo do caminho, temos

$$H_{t1}\Delta L - H_{t2}\Delta L = K\,\Delta L$$

onde assumimos que pela superfície pode circular uma corrente superficial **K**, cujo componente normal ao plano do caminho fechado é K. Logo

$$\boxed{H_{t1} - H_{t2} = K} \tag{35}$$

As direções são especificadas, mais exatamente, pelo uso do produto vetorial para identificar os componentes tangenciais,

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)\times\mathbf{a}_{N12} = \mathbf{K}$$

onde $\mathbf{a}_{N12}$ é o vetor unitário normal na fronteira direcionado da região 1 para a região 2. Uma formulação equivalente expressa pelos componentes tangenciais vetoriais pode ser mais conveniente para **H**:

$$\mathbf{H}_{t1} - \mathbf{H}_{t2} = \mathbf{a}_{N12}\times\mathbf{K}$$

Para **B** tangencial, temos

$$\frac{B_{t1}}{\mu_1} - \frac{B_{t2}}{\mu_2} = K \tag{36}$$

A condição de fronteira para o componente tangencial da magnetização para materiais lineares é, portanto,

$$M_{t2} = \frac{\chi_{m2}}{\chi_{m1}} M_{t1} - \chi_{m2} K \tag{37}$$

As últimas três condições de fronteira relativas aos componentes tangenciais serão obviamente muito mais simples se a densidade superficial de corrente for zero. Essa é uma densidade superficial de corrente livre, e deve ser zero se nenhum dos materiais for condutor.

EXEMPLO 8.6

Para ilustrar essas relações com um exemplo, vamos considerar $\mu = \mu_1 = 4\ \mu\text{H/m}$ na região 1 onde $z > 0$, enquanto $\mu_2 = 7\ \mu\text{H/m}$ na região 2 onde $z < 0$. Além disso, suponha $\mathbf{K} = 80\mathbf{a}_x$ A/m na superfície $z = 0$. Estabelecemos um campo, $\mathbf{B}_1 = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$ mT na região 1 e procuramos o valor de $\mathbf{B}_2$.

Solução. O componente normal de $\mathbf{B}_1$ é

$$\mathbf{B}_{N1} = (\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{a}_{N12})\mathbf{a}_{N12} = [(2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z) \cdot (-\mathbf{a}_z)](-\mathbf{a}_z) = \mathbf{a}_z \text{ mT}$$

Logo,

$$\mathbf{B}_{N2} = \mathbf{B}_{N1} = \mathbf{a}_z \text{ mT}$$

Em seguida, determinamos os componentes tangenciais:

$$\mathbf{B}_{t1} = \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_{N1} = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y \text{ mT}$$

e

$$\mathbf{H}_{t1} = \frac{\mathbf{B}_{t1}}{\mu_1} = \frac{(2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y)10^{-3}}{4 \times 10^{-6}} = 500\mathbf{a}_x - 750\mathbf{a}_y \text{ A/m}$$

Logo,

$$\mathbf{H}_{t2} = \mathbf{H}_{t1} - \mathbf{a}_{N12} \times \mathbf{K} = 500\mathbf{a}_x - 750\mathbf{a}_y - (-\mathbf{a}_z) \times 80\mathbf{a}_x$$
$$= 500\mathbf{a}_x - 750\mathbf{a}_y + 80\mathbf{a}_y = 500\mathbf{a}_x - 670\mathbf{a}_y \text{ A/m}$$

e

$$\mathbf{B}_{t2} = \mu_2 \mathbf{H}_{t2} = 7 \times 10^{-6}(500\mathbf{a}_x - 670\mathbf{a}_y) = 3{,}5\mathbf{a}_x - 4{,}69\mathbf{a}_y \text{ mT}$$

Logo,

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_{N2} + \mathbf{B}_{t2} = 3{,}5\mathbf{a}_x - 4{,}69\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z \text{ mT}$$

EP8.8. Considere a permissividade 5 μH/m na região A onde $x < 0$ e 20 μH/m na região B onde $x > 0$. Se existe uma densidade superficial de corrente $\mathbf{K} = 150\mathbf{a}_y - 200\mathbf{a}_z$ A/m em $x = 0$, e se $\mathbf{H}_A = 300\mathbf{a}_x - 400\mathbf{a}_y + 500\mathbf{a}_z$ A/m, calcule: (*a*) $|\mathbf{H}_{tA}|$; (*b*) $|\mathbf{H}_{NA}|$; (*c*) $|\mathbf{H}_{tB}|$; (*d*) $|\mathbf{H}_{NB}|$.

Resp. 640 A/m; 300 A/m; 695 A/m; 75 A/m

8.8 CIRCUITO MAGNÉTICO

Nesta seção, vamos fazer uma breve digressão para discutir as técnicas fundamentais envolvidas na solução de uma classe de problemas magnéticos conhecidos como circuitos magnéticos. Conforme veremos em breve, esses circuitos recebem esse nome devido à grande similaridade de sua análise com a análise de circuitos c.c, aos quais já devemos estar familiarizados. A única diferença importante reside na natureza não linear das porções ferromagnéticas do circuito magnético. Os métodos a serem adotados são similares àqueles necessários em circuitos elétricos não lineares que contêm diodos, termistores, filamentos incandescentes e outros elementos não lineares.

Como um conveniente ponto de partida, iremos identificar aquelas equações de campo nas quais a análise de circuitos resistivos está baseada. Ao mesmo tempo, vamos destacar ou derivar as equações análogas para o circuito magnético. Começamos com o potencial eletrostático e sua relação com a intensidade de campo elétrico,

$$\mathbf{E} = -\nabla V \tag{38a}$$

O potencial escalar magnético já foi definido, e sua relação análoga à intensidade de campo magnético é

$$\boxed{\mathbf{H} = -\nabla V_m} \tag{38b}$$

Quando lidamos com circuitos magnéticos, é conveniente denominar V_m de *força magnetomotriz*, ou fmm, e podemos perceber a analogia com a força eletromotriz, ou fem. Obviamente, as unidades da fmm são ampères, mas frequentemente são empregadas bobinas com muitos enrolamentos nas quais se utiliza o termo “ampère--espira”. Lembre-se que nenhuma corrente deve fluir em nenhuma região onde V_m está definido.

A diferença de potencial elétrico entre os pontos A e B pode ser escrita como

$$V_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \tag{39a}$$

e a relação correspondente entre a fmm e a intensidade de campo magnético,

$$\boxed{V_{mAB} = \int_A^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}} \tag{39b}$$

Essa relação foi desenvolvida no Capítulo 7, onde aprendemos que o caminho selecionado não deve atravessar a superfície limite escolhida.

A lei de Ohm para o circuito elétrico tem a forma pontual

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \tag{40a}$$

e vemos que a densidade de fluxo magnético será o análogo da densidade de corrente,

$$\boxed{\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}} \tag{40b}$$

Para encontrar a corrente total, devemos integrar:

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \tag{41a}$$

Uma operação correspondente é necessária para se encontrar o fluxo magnético total que passa pela seção reta de um circuito magnético:

$$\boxed{\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}} \tag{41b}$$

Assim, a resistência pode ser definida como a razão entre a diferença de potencial e a corrente, ou

$$V = IR \tag{42a}$$

Definiremos agora *relutância* ($\Re$) como a razão entre a força magnetomotriz e o fluxo total. Logo

$$\boxed{V_m = \Phi \Re} \tag{42b}$$

onde a relutância é medida em ampère-espiras por weber (Ae/Wb). Em resistores que são feitos de material homogêneo, isotrópico e linear, de condutividade σ, e que possuem seção reta uniforme de área S e comprimento d, a resistência total é

$$R = \frac{d}{\sigma S} \tag{43a}$$

Se tivermos sorte o bastante para lidarmos com tal material magnético homogêneo, isotrópico e linear, de comprimento d e seção reta uniforme S, a relutância total será

$$\boxed{\Re = \frac{d}{\mu S}} \tag{43b}$$

O único material desse tipo para o qual vamos comumente aplicar essa relação é o ar.

Finalmente, vamos considerar o análogo da fonte de tensão no circuito elétrico. Sabemos que a integral de linha fechada de **E** é zero,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

Em outras palavras, a lei das tensões de Kirchhoff determina que o aumento de potencial pela fonte é exatamente igual à queda de potencial na carga. A expressão para o fenômeno magnético toma uma forma ligeiramente diferente,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I_{\text{total}}$$

pois a integral de linha fechada não é zero. Uma vez que a corrente total envolvida pelo caminho é normalmente obtida quando se permite que uma corrente I circule por um enrolamento de N espiras, podemos expressar esse resultado como

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = NI \tag{44}$$

Em um circuito elétrico, a fonte de tensão é parte do caminho fechado. No circuito magnético, o enrolamento no qual a corrente circula irá envolver ou encadear o circuito magnético. Quando desenhamos um circuito magnético, podemos não ser capazes de identificar um par de terminais nos quais a força magnetomotriz está aplicada. A analogia é mais próxima, neste caso, a um par de circuitos acoplados, nos quais existem tensões induzidas (e nos quais veremos, no Capítulo 9, que a integral de linha fechada de **E** também não é zero).

Vamos experimentar algumas dessas novas ideias em um circuito magnético simples. Com o objetivo de evitar as complicações de lidar com materiais ferromagnéticos, desta vez vamos considerar um toroide com núcleo de ar, no qual há enrolamento de 500 espiras (envolvendo o toroide), uma área de seção reta de 6 cm^2, um raio médio de 15 cm, e uma bobina* com 4 A de corrente. Conforme já sabemos, o campo magnético está confinado no interior do toroide, e se considerarmos o caminho fechado de nosso circuito magnético ao longo do raio médio, encadearemos 2.000 Ae,

$$V_{m,\,\text{fonte}} = 2.000 \text{ Ae}$$

Embora o campo no toroide não seja totalmente uniforme, vamos considerá-lo uniforme para todos os fins práticos, e calcular a relutância total do circuito como

$$\mathfrak{R} = \frac{d}{\mu S} = \frac{2\pi(0{,}15)}{4\pi 10^{-7} \times 6 \times 10^{-4}} = 1{,}25 \times 10^9 \text{ Ae/Wb}$$

Logo,

$$\Phi = \frac{V_{m,\,fonte}}{\mathfrak{R}} = \frac{2.000}{1{,}25 \times 10^9} = 1{,}6 \times 10^{-6} \text{ Wb}$$

Esse valor para o fluxo total tem erro menor que 0,25%, em comparação com o valor obtido quando a distribuição exata de fluxo pela seção reta é utilizada.

Por isso,

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{1{,}6 \times 10^{-6}}{6 \times 10^{-4}} = 2{,}67 \times 10^{-3} \text{ T}$$

e finalmente

$$H = \frac{B}{\mu} = \frac{2{,}67 \times 10^{-3}}{4\pi 10^{-7}} = 2.120 \text{ Ae/m}$$

* N. de T.: Que corresponde ao conjunto de espiras.

Como verificação, podemos aplicar e lei circuital de Ampère diretamente neste problema simétrico,

$$H_\phi 2\pi r = NI$$

e obter

$$H_\phi = \frac{NI}{2\pi r} = \frac{500 \times 4}{6{,}28 \times 0{,}15} = 2.120 \text{ A/m}$$

no raio médio.

Nosso circuito magnético, nesse exemplo, não nos dá qualquer oportunidade de encontrar a fmm em elementos diferentes no circuito, pois existe apenas um tipo de material. O circuito elétrico análogo é, naturalmente, uma fonte única e um resistor único. Poderíamos torná-lo semelhante ao circuito da análise anterior, mas para isso teríamos que encontrar a densidade de corrente, a intensidade de campo elétrico, a corrente total, a resistência e a fonte de tensão.

Problemas mais interessantes e mais práticos aparecem quando materiais ferromagnéticos estão presentes no circuito. Vamos começar considerando a relação entre B e H nesses materiais. Suponha que estamos estabelecendo uma curva B *versus* H para uma amostra de material ferromagnético que está completamente desmagnetizado. Ambos, B e H, são zero. À medida que começamos a aplicar uma fmm, a densidade de fluxo também aumenta, mas não linearmente, conforme mostram os dados experimentais perto da origem na Figura 8.11. Após H atingir o valor de aproximadamente 100 Ae/m, a densidade de fluxo aumenta mais lentamente e começa a saturar quando H vale várias centenas de Ae/m. Alcançada essa saturação parcial, vamos agora nos voltar para a Figura 8.12, onde vamos continuar nosso experimento no ponto x, reduzindo H. À medida que assim o fizermos, os efeitos de histerese começarão a aparecer, e não traçaremos de volta a nossa curva original. Mesmo após H ser zero, $B = B_r$, a densidade de fluxo é remanescente. Quando H é invertido, é trazido de volta

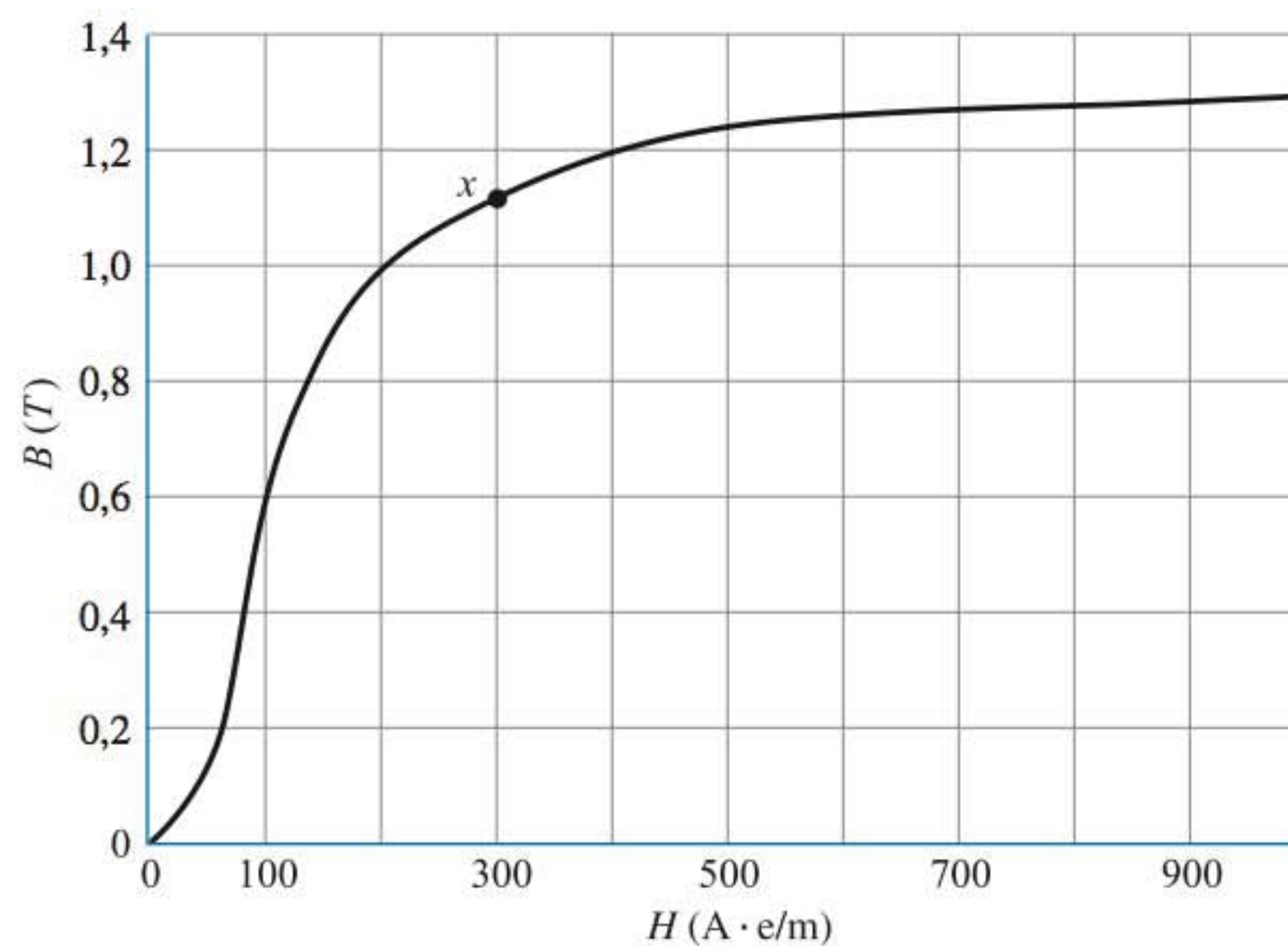



Figura 8.11 Curva de magnetização de uma amostra de lâmina de aço-silício.

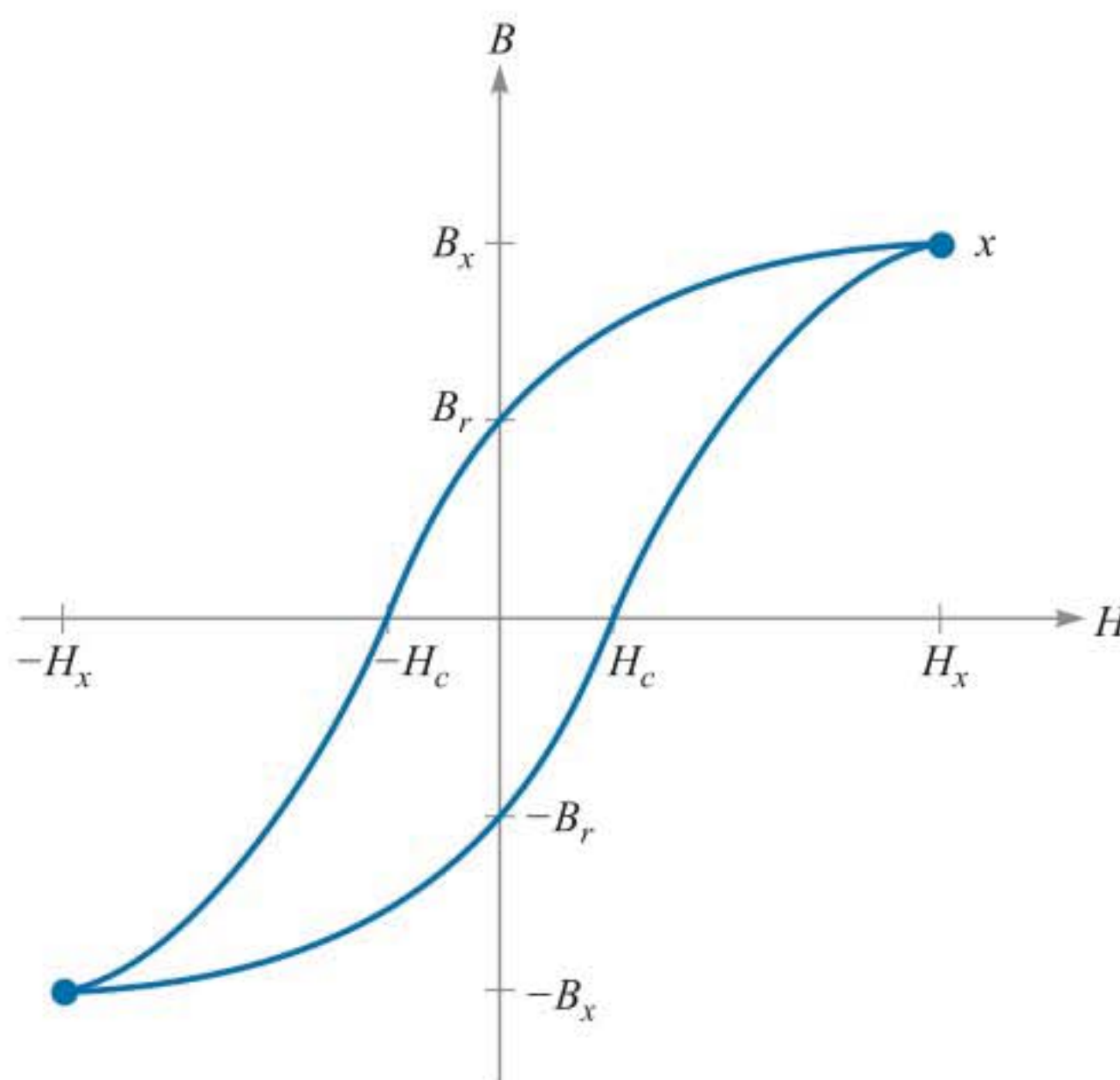



Figura 8.12 Um laço de histerese para o aço-silício. A força coerciva H_c e a densidade de fluxo remanescente B_r são indicadas

para zero e o ciclo completo traçado várias vezes, o laço de histerese da Figura 8.12 é obtido. A fmm necessária para reduzir a densidade de fluxo a zero é identificada como H_c, a "força" coerciva. Para valores máximos menores de H, laços menores de histerese são obtidos, e o lugar geométrico das pontas será, aproximadamente o mesmo da curva de magnetização virgem da Figura 8.11.

EXEMPLO 8.7

Vamos fazer uso da curva de magnetização para o aço-silício para resolver um problema de circuito magnético que é um pouco diferente do nosso exemplo anterior. Vamos utilizar um núcleo de aço no toroide, exceto por um *gap* de ar de 2 mm. Os gaps de ar são deliberadamente introduzidos em alguns dispositivos (como nos indutores, por exemplo, pelos quais devem circular altos valores de corrente contínua) porque são inevitáveis em outros dispositivos (tais como máquinas rotativas) ou por causa de problemas inevitáveis de montagem. Ainda existem 500 espiras em torno do toroide, e perguntamos que corrente é necessária para estabelecer uma densidade de fluxo de 1 T em todos os pontos no núcleo.

Solução. Esse circuito magnético é análogo a um circuito elétrico que contém uma fonte de tensão e dois resistores, um dos quais é não linear. Uma vez que nos foi dada a "corrente", é fácil encontrar a "tensão" sobre cada elemento em série, e com isso a "fem" total. No *gap* de ar,

$$\mathfrak{R}_{\text{ar}} = \frac{d_{\text{ar}}}{\mu S} = \frac{2 \times 10^{-3}}{4\pi 10^{-7} \times 6 \times 10^{-4}} = 2{,}65 \times 10^{6} \text{ Ae/Wb}$$

Conhecendo o fluxo total,

$$\Phi = BS = 1(6 \times 10^{-4}) = 6 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

o qual é o mesmo no aço e no ar, podemos achar a fmm necessária para o *gap*,

$$V_{m,\,\mathrm{ar}} = (6 \times 10^{-4})(2{,}65 \times 10^{6}) = 1.590 \text{ Ae}$$

Considerando a Figura 8.11, verificamos que uma intensidade de campo magnético de 200 Ae/m é necessária para produzir uma densidade de fluxo de 1 T no aço. Logo,

$$H_{\text{aço}} = 200 \text{ Ae}$$
$$V_{m,\,\text{aço}} = H_{\text{aço}}\, d_{\text{aço}} = 200 \times 0{,}30\pi$$
$$= 188 \text{ Ae}$$

A fmm total será 1.778 Ae, e uma corrente de 3,56 A na bobina é necessária.

Cabe notar que fizemos diversas aproximações na obtenção dessa resposta. Já mencionamos a falta de uma seção reta completamente uniforme, ou simetria cilíndrica. O caminho de toda linha de fluxo não tem o mesmo comprimento. Escolher um comprimento "médio" para o caminho pode ajudar a compensar esse erro em problemas que forem mais importantes que esse nosso exemplo. O fluxo desviado* no *gap* de ar é outra fonte de erro, e existem fórmulas disponíveis por meio das quais podemos calcular um comprimento e uma área de seção reta efetivos para o *gap*, os quais levarão a resultados mais exatos. Existe também uma dispersão de fluxo entre as voltas do fio, e em dispositivos que contêm bobinas concentradas em uma seção do núcleo, algumas poucas linhas de fluxo passam pelo interior do toroide. Desvio e dispersão são problemas que raramente aparecem em circuitos elétricos, porque a razão entre as condutividades do ar e dos materiais condutivos ou resistivos utilizados é muito grande. Em contraste, a curva de magnetização para o aço-silício mostra que a razão entre H e B no aço é de aproximadamente 200 até o "joelho" da curva de magnetização. Isso deve ser comparado com a razão no ar equivalente a aproximadamente 800.000. Logo, embora o fluxo prefira aço ao ar a uma razão de 4.000 para 1, isso não é muito próximo da razão de condutividades referentes a, por exemplo, 10^{15} para um bom condutor e um isolante confiável.

EXEMPLO 8.8

Como um último exemplo, vamos considerar o problema inverso. Considerando uma corrente na bobina de 4 A no circuito magnético do Exemplo 8.7, determine qual será a densidade de fluxo.

Solução. Primeiramente, tentaremos linearizar a curva de magnetização por uma linha reta da origem até $B = 1$, $H = 200$. Temos, então, $B = H/200$ no aço e $B = \mu_0 H$ no ar. As duas relutâncias são encontradas, e equivalem a $0{,}314 \times 10^6$ para o caminho no aço e $2{,}65 \times 10^6$ para o *gap* de ar, ou $2{,}96 \times 10^6$ Ae/Wb no total. Uma vez que V_m vale 2.000 Ae, o fluxo é $6{,}76 \times 10^{-4}$ Wb, e $B = 1{,}13$ T. Uma solução mais exata pode ser obtida ao admitirmos vários valores para B e calcular a fmm necessária. Um gráfico dos resultados nos permite determinar o valor real de B por interpolação. Com esse método, obtemos $B = 1{,}10$ T. A boa exatidão do modelo linear resulta do fato de a relutância do *gap* de ar em um circuito magnético ser, frequentemente, muito maior que a relutância da porção ferromagnética do circuito. Assim, uma aproximação relativamente pobre para o ferro ou para o aço pode ser tolerada.

* N. de T.: Este desvio de fluxo está associado ao fenômeno denominado "efeito de borda".

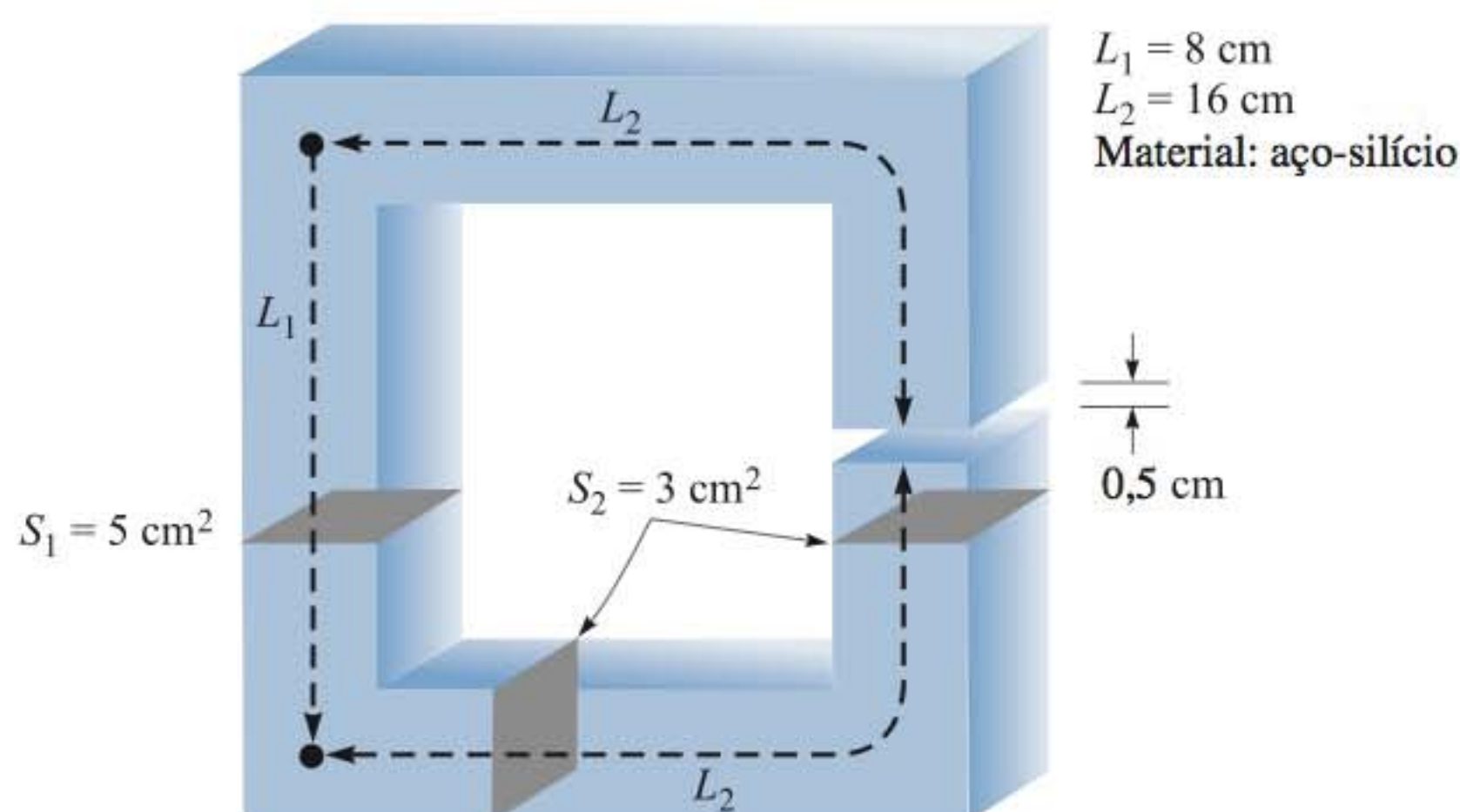



Figura 8.13 Ver Exercício Proposto 8.9.

EP8.9. Dado o circuito magnético da Figura 8.13, considere $B = 0{,}6$ T no ponto médio da perna esquerda e calcule: (*a*) $V_{m,\,\text{ar}}$; (*b*) $V_{m,\,\text{aço}}$; (*c*) a corrente necessária em uma bobina de 1.300 espiras enrolada na perna esquerda.

Resp. 3.980 Ae; 72 Ae; 3,12 A

EP8.10. A curva de magnetização para o material *X* sob condições normais de operação pode ser aproximada pela expressão $B = (H/160)(0{,}25 + e^{-H/320})$, onde *H* está em A/m e *B* está em *T*. Se um circuito magnético contém o material *X* com 12 cm de comprimento, assim como um *gap* de ar de 0,25 mm, considere uma seção reta uniforme de 2,5 cm^2 e calcule a fmm total necessária para produzir um fluxo de: (*a*) 10 μWb; (*b*) 100 μWb.

Resp. 8,58 Ae; 86,7 Ae

8.9 ENERGIA POTENCIAL E FORÇAS EM MATERIAIS MAGNÉTICOS

Quando estudamos o campo eletrostático, primeiramente introduzimos a carga pontual e a lei experimental da força entre cargas pontuais. Após definir os conceitos de intensidade de campo elétrico, densidade de fluxo elétrico e potencial elétrico, fomos capazes de encontrar uma expressão para a energia em um campo eletrostático estabelecendo o trabalho necessário para trazer cargas pontuais desde o infinito até seus pontos finais de repouso. A expressão genérica para energia é

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{\text{vol}} \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\,dv \tag{45}$$

onde uma relação linear entre **D** e **E** é assumida.

Isso não é tão facilmente feito para o campo magnético estacionário. Pode parecer que deveríamos somente considerar duas fontes simples, talvez duas lâminas de

corrente, encontrar a força em uma devido à outra, mover a lâmina de uma distância diferencial contra essa força e igualar o trabalho necessário à mudança na energia. Se assim fizéssemos, estaríamos errados, porque a lei de Faraday (que estudaremos no Capítulo 9) mostra que haverá uma tensão induzida na lâmina de corrente que se move contra a qual a corrente deve ser mantida. Qualquer que seja a fonte que esteja suprindo a lâmina de corrente, ela acabará por receber metade da energia que estamos injetando no circuito ao movê-lo.

Em outras palavras, a densidade de energia no campo magnético pode ser determinada mais facilmente depois que campos que variam no tempo forem abordados. Vamos desenvolver a expressão apropriada na discussão do teorema de Poynting no Capítulo 11.

Entretanto, uma abordagem alternativa seria possível neste momento, pois poderíamos definir um campo magnetostático baseado na consideração de polos magnéticos (ou "cargas magnéticas"). Utilizando o potencial escalar magnético, poderíamos então desenvolver uma expressão para a energia por meio de métodos similares àqueles utilizados na obtenção da relação para a energia eletrostática. Essas novas grandezas magnetostáticas que teríamos de introduzir representariam um preço muito grande a ser pago por um resultado simples, e por isso vamos apenas apresentar o resultado agora e mostrar, posteriormente, que a mesma expressão é derivada do teorema de Poynting. A energia total armazenada em um campo magnético estacionário no qual **B** está linearmente relacionado a **H** é

$$W_H = \frac{1}{2}\int_{\text{vol}} \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\,dv \qquad (46)$$

Considerando $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, temos as formulações equivalentes

$$W_H = \frac{1}{2}\int_{\text{vol}} \mu H^2 dv \qquad (47)$$

ou

$$W_H = \frac{1}{2}\int_{\text{vol}} \frac{B^2}{\mu} dv \qquad (48)$$

É novamente conveniente pensar que essa energia está distribuída pelo volume com uma densidade de energia de $\frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}$ J/m^3, embora não tenhamos justificativa matemática para tal afirmação.

Embora esses fatos sejam válidos apenas para meios lineares, vamos utilizá-los para calcular as forças em materiais magnéticos não lineares se focarmos nossa atenção nos meios lineares (normalmente o ar) que devem envolvê-los. Suponha que tenhamos um solenoide longo com um núcleo de aço-silício. Uma bobina contendo n espiras/m com uma corrente I está enrolada nele. A intensidade de campo magnético no núcleo é, portanto, nI Ae/m, e a densidade de fluxo magnético pode ser obtida pela curva de magnetização para o aço-silício. Vamos chamar esse valor de $B_{aço}$. Suponha ainda que o núcleo é composto de dois cilindros[2] semi-infinitos que se tocam. Agora, aplicaremos uma força mecânica para separar essas duas seções do núcleo, enquanto mantemos a

[2] Um cilindro semi-infinito é um cilindro de comprimento infinito que possui uma extremidade posicionada no espaço finito.

densidade de fluxo constante. Aplicamos uma força F por uma distância dL, realizando assim um trabalho $F\,dL$. A lei de Faraday não se aplica neste caso, pois os campos no núcleo não mudaram; dessa forma, podemos utilizar o princípio do trabalho virtual para determinar que o trabalho que realizamos no deslocamento de um núcleo aparece como energia armazenada no *gap* de ar que criamos. Pela Equação (48), esse aumento é

$$dW_H = F\,dL = \frac{1}{2}\frac{B_{\text{aço}}^2}{\mu_0}S\,dL$$

onde S é a área da seção reta do núcleo. Logo

$$F = \frac{B_{\text{aço}}^2 S}{2\mu_0}$$

Se a intensidade de campo magnético for suficiente para produzir saturação no aço, digamos aproximadamente 1,4 T, a força será

$$F = 7{,}80 \times 10^5\, S\ \text{N}$$

ou, aproximadamente, 7,94 kg_f/cm^2.

EP8.11. (*a*) Qual é a força que está sendo exercida nas faces junto ao *gap* do circuito descrito no Exercício Proposto 8.9 e na Figura 8.13? (*b*) A força está tentando abrir ou fechar o *gap* de ar?

Resp. 1.194 N; como Wilhelm Eduard Weber responderia, schliessen*, ou seja, a força está tentando fechar o *gap* de ar.

8.10 INDUTÂNCIA E INDUTÂNCIA MÚTUA

A indutância é o último dos três parâmetros familiares da teoria de circuitos que definiremos em termos mais gerais. A resistência foi definida no Capítulo 5 como a razão da diferença de potencial, entre duas superfícies equipotenciais de um material condutor, pela corrente total que atravessa uma das superfícies equipotenciais. A resistência é função apenas da geometria do condutor e da condutividade. A capacitância foi definida, no mesmo capítulo, como a razão entre a carga total em uma das duas superfícies condutoras equipotenciais e a diferença de potencial entre as superfícies. A capacitância é função apenas da geometria das duas superfícies condutoras e da permissividade do meio dielétrico entre ou ao redor delas.

WW Ilustração

Como uma introdução à definição de indutância, precisamos primeiramente introduzir o conceito de enlace de fluxo. Vamos considerar um toroide de N espiras no qual uma corrente I produz um fluxo total Φ. Consideremos inicialmente que esse fluxo envolve cada uma das N espiras, e também que cada uma das N espiras envolve o fluxo total Φ. O *enlace de fluxo* $N\Phi$ é definido como o produto do número de espiras N pelo fluxo Φ que envolve cada uma delas.[3] Para uma bobina que tem uma espira única, o enlace de fluxo é igual ao fluxo total.

* N. de R.T.: "Fechar" em alemão.

[3] O símbolo λ é comumente usado para enlace de fluxo. Entretanto, usaremos apenas ocasionalmente esse conceito, e vamos continuar a escrevê-lo como $N\Phi$.

Agora definimos *indutância* (ou indutância própria) como a razão entre o enlace total de fluxo e a corrente envolvida,

$$L = \frac{N\Phi}{I} \tag{49}$$

A corrente I que circula na bobina de N espiras produz um fluxo total Φ e $N\Phi$ enlaces de fluxo; assumiremos que o fluxo Φ envolve cada espira. Essa definição é aplicável apenas a meios magnéticos lineares, nos quais o fluxo é proporcional à corrente. Se materiais ferromagnéticos estiverem presentes, não existirá uma definição única para indutância que seja útil em todos os casos, e por isso vamos restringir nossa atenção a materiais lineares.

A unidade de indutância é o henry (H), equivalente a um weber-espira por ampère.

Vamos aplicar a Equação (49) de uma maneira direta para calcular a indutância, por metro de comprimento, de um cabo coaxial de raio interno a e raio externo b. Tomaremos a expressão para o fluxo total desenvolvida como a Equação (42) no Capítulo 7,

$$\Phi = \frac{\mu_0 Id}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

e obtemos a indutância rapidamente para um comprimento d,

$$L = \frac{\mu_0 d}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad \text{H}$$

ou, por unidade de comprimento,

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad \text{H/m} \tag{50}$$

Neste caso, $N = 1$ espira, e todo o fluxo envolve* toda a corrente.

No problema da bobina toroidal de N espiras e uma corrente I, mostrado na Figura 7.12*b*, temos

$$B_\phi = \frac{\mu_0 NI}{2\pi\rho}$$

Se as dimensões da seção reta são pequenas comparadas com o raio médio ρ_0 do toroide, então o fluxo total é

$$\Phi = \frac{\mu_0 NIS}{2\pi\rho_0}$$

onde S é a área da seção reta. Multiplicando o fluxo total por N, temos os enlaces de fluxo, e dividindo por I, temos a indutância

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{2\pi\rho_0} \tag{51}$$

Mais uma vez consideramos que todo o fluxo envolve todas as espiras, e essa é uma boa suposição para uma bobina toroidal de muitas espiras enroladas bem perto umas das outras. Suponha, entretanto, que nosso toroide apresente um espaçamento

* N. de T.: Ou a enlaça, termo também usado.

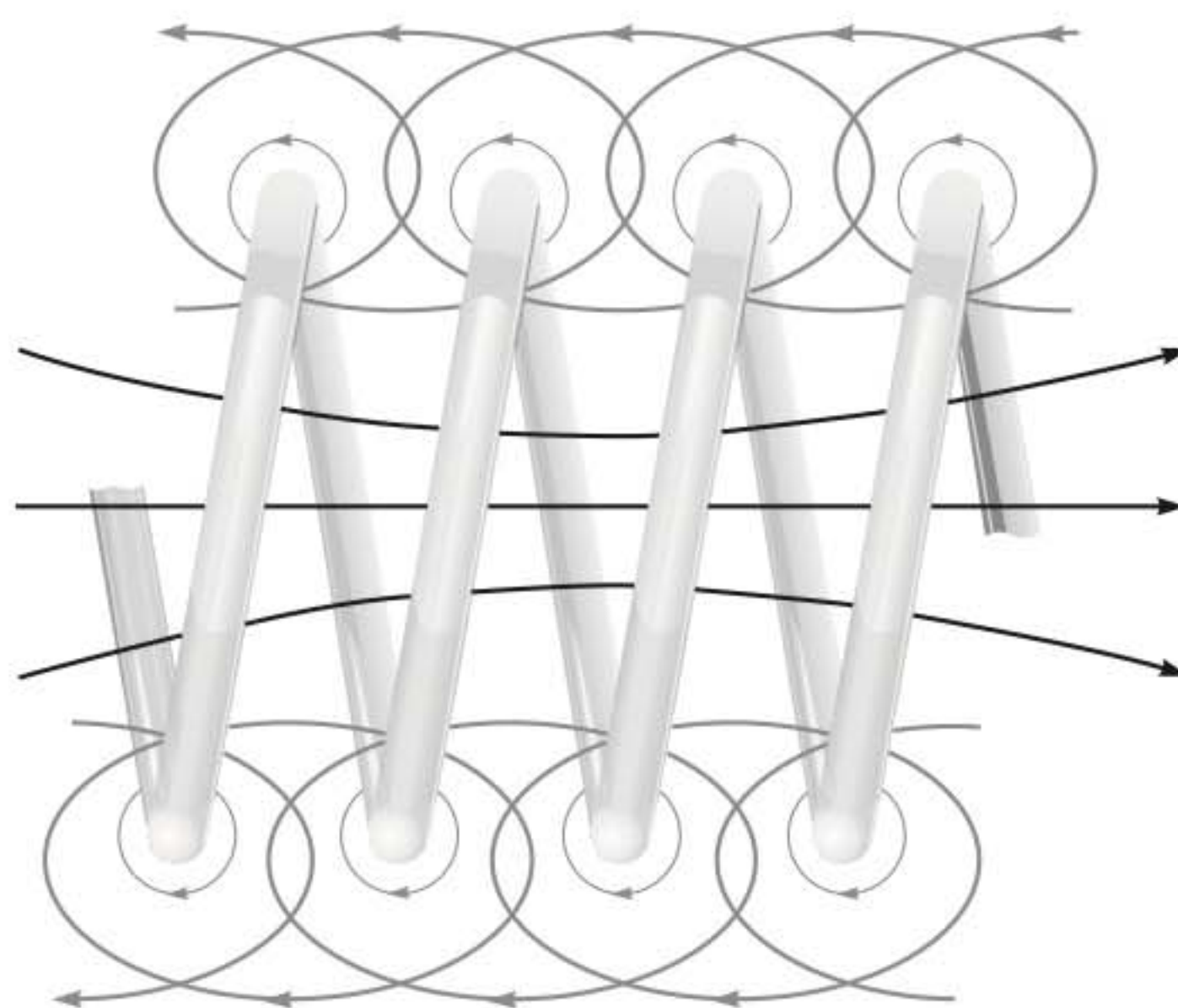



Figura 8.14 Uma porção de uma bobina mostrando enlaces de fluxos parciais. O enlace total de fluxo é obtido adicionando-se os enlaces de fluxo de cada volta.

apreciável entre espiras, e que uma pequena parte delas seja similar à Figura 8.14. Os enlaces de fluxo não são mais o produto do fluxo no raio médio e do número total de espiras. Com o objetivo de se calcular o enlace total de fluxo, devemos olhar para a bobina de espira em espira.

$$(N\Phi)_{\text{total}} = \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_i + \cdots + \Phi_N$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \Phi_i$$

onde Φ_i é o fluxo que enlaça a i-ésima espira. Em vez de fazermos isso, podemos confiar na experiência e em grandezas empíricas, denominadas fatores de enrolamento e de passo, para ajustar a fórmula básica e aplicá-la ao mundo físico real.

Uma definição equivalente de indutância pode ser feita usando o ponto de vista da energia,

$$\boxed{L = \frac{2W_H}{I^2}} \tag{52}$$

onde I é a corrente total que flui no caminho fechado e W_H é a energia no campo magnético produzido pela corrente. Após utilizar a Equação (52) para obter várias outras expressões genéricas para a indutância, vamos mostrar que ela é equivalente à Equação (49). Em primeiro lugar, expressamos a energia potencial W_H considerando os campos magnéticos,

$$L = \frac{\int_{\text{vol}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}\, dv}{I^2} \tag{53}$$

e, então, substituímos $\mathbf{B}$ por $\nabla \times \mathbf{A}$,

$$L = \frac{1}{I^2} \int_{\text{vol}} \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dv$$

A identidade vetorial

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \equiv \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \tag{54}$$

pode ser provada por expansão em coordenadas cartesianas. A indutância é, portanto,

$$L = \frac{1}{I^2} \left[\int_{\text{vol}} \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H})\, dv + \int_{\text{vol}} \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})\, dv \right] \tag{55}$$

Após aplicar o teorema da divergência na primeira integral e considerar $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ na segunda integral, temos

$$L = \frac{1}{I^2} \left[\oint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{vol}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}\, dv \right]$$

A integral de superfície é zero, uma vez que a superfície envolve o volume que contém toda a energia magnética, e isso requer que **A** e **H** sejam zero na superfície da fronteira. Assim, a indutância pode ser escrita como

$$L = \frac{1}{I^2} \int_{\text{vol}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}\, dv \tag{56}$$

A Equação (56) expressa a indutância considerando uma integral dos valores de **A** e **J** em todos os pontos. Uma vez que existe densidade de corrente apenas dentro do condutor, o integrando é zero em todos os pontos *fora* do condutor, e o potencial vetor magnético não precisa ser determinado lá. O potencial vetor é aquele que é criado pela corrente **J**, e qualquer outra fonte de corrente que contribua para um campo potencial vetor na região da densidade de corrente original deve ser ignorada no momento. Mais tarde veremos que isso leva a uma *indutância mútua*.

O potencial vetor magnético **A** devido a **J** é dado pela Equação (51) do Capítulo 7,

$$\mathbf{A} = \int_{\text{vol}} \frac{\mu \mathbf{J}}{4\pi R} dv$$

assim a indutância pode ser expressa mais basicamente como uma integral volumétrica dupla mais complexa,

$$L = \frac{1}{I^2} \int_{\text{vol}} \left(\int_{\text{vol}} \frac{\mu \mathbf{J}}{4\pi R} dv \right) \cdot \mathbf{J}\, dv \tag{57}$$

Uma expressão integral ligeiramente mais simples é obtida se restringirmos nossa atenção a filamentos de corrente de seções retas pequenas, para os quais $\mathbf{J}\, dv$ pode ser substituído por $I\, d\mathbf{L}$, e a integral volumétrica, por uma integral de linha fechada ao longo do eixo do filamento,

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{I^2} \oint \left(\oint \frac{\mu I\, d\mathbf{L}}{4\pi R} \right) \cdot I\, d\mathbf{L} \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{d\mathbf{L}}{R} \right) \cdot d\mathbf{L} \end{aligned} \tag{58}$$

Neste momento, nosso único interesse nas Equações (57) e (58) é sua implicação, segundo a qual a indutância é uma função da distribuição espacial de corrente ou da geometria da configuração de condutores.

Para obter nossa definição original de indutância, como visto na Equação (49), vamos considerar, por hipótese, uma distribuição de corrente uniforme em um condutor filamentar de seção reta pequena, de forma que $\mathbf{J}\,dv$ na Equação (56) se torne $I\,d\mathbf{L}$,

$$L = \frac{1}{I}\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{L} \tag{59}$$

Para uma seção reta pequena, $d\mathbf{L}$ pode ser tomado ao longo do centro do filamento. Agora, aplicamos o teorema de Stokes e obtemos

$$L = \frac{1}{I}\int_S (\nabla \times \mathbf{A})\cdot d\mathbf{S}$$

ou

$$L = \frac{1}{I}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$$

ou

$$L = \frac{\Phi}{I} \tag{60}$$

Revendo os passos seguidos na obtenção da Equação (60), vemos que o fluxo Φ é aquela porção do fluxo total que passa por toda e qualquer superfície cujo perímetro é o caminho filamentar de corrente.

Se agora fizermos o filamento dar N voltas idênticas em volta do fluxo total, uma idealização que pode ser conseguida razoavelmente em alguns tipos de indutores, a integral de linha fechada deve consistir em N voltas ao redor desse caminho comum, e a Equação (60) se torna

$$L = \frac{N\Phi}{I} \tag{61}$$

O fluxo Φ é agora o fluxo que atravessa qualquer superfície cujo perímetro seja o caminho ocupado por qualquer *uma* das N espiras. A indutância de uma bobina de N espiras pode ainda ser obtida da Equação (60), mas somente, se percebermos que o fluxo é aquele que atravessa a superfície complicada[4] cujo perímetro consiste em todas as N espiras.

A utilização de qualquer uma das expressões de indutância para um condutor filamentar real (que possua raio igual a zero) leva a um valor infinito de indutância, independentemente da configuração do filamento. Perto do condutor, a lei circuital de Ampère mostra que a intensidade de campo magnético varia inversamente com a distância ao condutor, e uma integração simples logo mostra que uma quantidade infinita de energia e uma quantidade infinita de fluxo estão contidas dentro de qualquer cilindro finito em torno do filamento. Essa dificuldade é eliminada especificando um pequeno raio para o filamento, que deve ser finito.

O interior de qualquer condutor também contém fluxo magnético, e esse fluxo envolve uma fração variável da corrente total, dependendo da sua localização. Esses enlaces de fluxo levam a uma *indutância interna*, que deve ser combinada com a

[4] Algo similar a uma rampa em espiral.

indutância externa para se obter a indutância total. A indutância interna de um fio longo e retilíneo, de seção reta circular de raio a e com distribuição uniforme de corrente, pode ser considerada

$$L_{a,\text{ interna}} = \frac{\mu}{8\pi} \quad \text{H/m} \tag{62}$$

um resultado solicitado no Problema 8.43 no final deste capítulo.

No Capítulo 11, veremos que a distribuição de corrente no condutor em altas frequências tende a se concentrar perto da superfície. O fluxo interno é reduzido, e normalmente basta considerar apenas a indutância externa. Em frequências mais baixas, entretanto, a indutância interna pode se tornar uma parte apreciável da indutância total.

Concluímos definindo a *indutância mútua* entre os circuitos 1 e 2, M_{12}, expressando-a pelos enlaces de fluxos mútuos,

$$M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1} \tag{63}$$

onde Φ_{12} significa o fluxo produzido por I_1, o qual envolve o caminho da corrente filamentar I_2, e N_2 é o numero de espiras no circuito 2. A indutância mútua, com isso, depende da interação magnética entre duas correntes. Com apenas uma das correntes, a energia total armazenada no campo magnético pode ser encontrada ao considerarmos uma indutância única, ou indutância própria. Com ambas as correntes possuindo valores diferentes de zero, a energia total é uma função das duas indutâncias próprias e da indutância mútua. Utilizando a energia mútua, pode ser mostrado que a Equação (63) é equivalente a

$$M_{12} = \frac{1}{I_1 I_2} \int_{\text{vol}} (\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{H}_2) dv \tag{64}$$

ou

$$M_{12} = \frac{1}{I_1 I_2} \int_{\text{vol}} (\mu \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2) dv \tag{65}$$

onde $\mathbf{B}_1$ é o campo resultante de I_1 (com $I_2 = 0$) e $\mathbf{H}_2$ é o campo gerado por I_2 (com $I_1 = 0$). A troca dos subscritos entre si não muda o lado direito da Equação (65), e com isso

$$M_{12} = M_{21} \tag{66}$$

A indutância mútua é também medida em henrys, e confiamos nos contextos para nos permitir diferenciá-la da magnetização, também representada por M.

EXEMPLO 8.9

Calcule as indutâncias próprias e mútuas entre dois solenoides coaxiais de raios R_1 e R_2, considerando $R_2 > R_1$, os quais são percorridos por correntes I_1 e I_2 com n_1 e n_2 espiras/m, respectivamente.

Solução. Primeiramente, abordamos as indutâncias mútuas. Da Equação (15), definida no Capítulo 7, consideramos $n_1 = N/d$, e obtemos

$$\mathbf{H}_1 = n_1 I_1 \mathbf{a}_z \quad (0 < \rho < R_1)$$
$$= 0 \quad (\rho > R_1)$$

e

$$\mathbf{H}_2 = n_2 I_2 \mathbf{a}_z \quad (0 < \rho < R_2)$$
$$= 0 \quad (\rho > R_2)$$

Logo, para esse campo uniforme

$$\Phi_{12} = \mu_0 n_1 I_1 \pi R_1^2$$

e

$$M_{12} = \mu_0 n_1 n_2 \pi R_1^2$$

Similarmente,

$$\Phi_{21} = \mu_0 n_2 I_2 \pi R_1^2$$
$$M_{21} = \mu_0 n_1 n_2 \pi R_1^2 = M_{12}$$

Se $n_1 = 50$ espiras/cm, $n_2 = 80$ espiras/cm, $R_1 = 2$ cm e $R_2 = 3$ cm, então

$$M_{12} = M_{21} = 4\pi \times 10^{-7}(5.000)(8.000)\pi(0{,}02^2) = 63{,}2 \text{ mH/m}$$

As indutâncias próprias são facilmente encontradas. O fluxo produzido na bobina 1 por I_1 é

$$\Phi_{11} = \mu_0 n_1 I_1 \pi R_1^2$$

e com isso,

$$L_1 = \mu_0 n_1^2 S_1 d \ \text{ H}$$

A indutância por unidade de comprimento é, então

$$L_1 = \mu_0 n_1^2 S_1 \ \text{ H/m}$$

ou

$$L_1 = 39{,}5 \text{ mH/m}$$

De forma similar,

$$L_2 = \mu_0 n_2^2 S_2 = 22{,}7 \ \text{ mH/m}$$

Dessa forma, verificamos que existem muitos métodos disponíveis para o cálculo da indutância própria e da indutância mútua. Infelizmente, até problemas que possuem um alto grau de simetria apresentam integrais cujo cálculo é bastante desafiador, e disponibilizaremos apenas alguns problemas para que treinemos nossa habilidade.

A indutância referente aos circuitos será discutida no Capítulo 10.

EP8.12. Calcule a indutância própria de: (*a*) 3,5 m de cabo coaxial com $a = 0{,}8$ mm e $b = 4$ mm, preenchido com material para o qual $\mu_r = 50$; (*b*) uma bobina toroidal de 500 espiras, enrolada em uma fibra de vidro que possui seção reta quadrada de $2{,}5 \times 2{,}5$ cm e um raio interno de 2 cm; (*c*) um solenoide que possui 500 espiras em torno de um núcleo cilíndrico de 2 cm de raio no qual $\mu_r = 50$ para $0 < \rho < 0{,}5$ cm e $\mu_r = 1$ para $0{,}5 < \rho < 2$ cm. O comprimento do solenoide é de 50 cm.

Resp. 56,3 μH; 1,01 mH, 3,2 mH

EP8.13. Um solenoide tem 50 cm de comprimento, 2 cm de diâmetro e contém 1.500 espiras. O núcleo cilíndrico tem um diâmetro de 2 cm e uma permeabilidade relativa de 75. Essa bobina é coaxial com um segundo solenoide, também de 50 cm de comprimento, mas com um diâmetro de 3 cm e 1.200 espiras. Calcule: (*a*) L para o solenoide interno; (*b*) L para o solenoide externo; (*c*) M entre os dois solenoides.

Resp. 133,2 mH; 192 mH; 106,6 mH

REFERÊNCIAS

1. Krauss, J. D., and D. A. Fleish. (Ver Referências do Capítulo 3). Exemplos de cálculo de indutância são dados nas páginas 99-108.
2. Matsch, L. W. (Ver Referências do Capítulo 6). O Capítulo 3 é dedicado a circuitos magnéticos e materiais ferromagnéticos.
3. Paul, C. R., K. W. Whites, and S. Y. Nasar. (Ver Referências do Capítulo 7). Circuitos magnéticos, incluindo aqueles com ímãs permanentes, são discutidos nas páginas 263-270.

PROBLEMAS

8.1 Uma carga pontual $Q = -0{,}3\ \mu$C e $m = 3 \times 10^{-16}$ kg move-se em uma região na qual existe um campo $\mathbf{E} = 30\mathbf{a}_z$ V/m. Use a Equação (1) e as leis de Newton para desenvolver as equações diferenciais apropriadas e resolvê-las, sujeitas às condições iniciais em $t = 0$, $\mathbf{v} = 3 \times 10^5\mathbf{a}_x$ m/s na origem. Em t = 3 μs, calcule: (*a*) a posição $P(x, y, z)$ da carga; (*b*) a velocidade $\mathbf{v}$; (*c*) a energia cinética da carga.

8.2 Compare as intensidades das forças elétrica e magnética exercidas sobre um elétron que atinge uma velocidade de 10^7 m/s. Considere uma intensidade de campo elétrico de 10^5 V/m e uma densidade de fluxo magnético associada à densidade do campo magnético da Terra em latitudes temperadas, equivalente a 0,5 gauss (G).

8.3 Uma carga pontual, para a qual $Q = 2 \times 10^{-16}$ C e $m = 5 \times 10^{-26}$ kg, está se movendo por uma região na qual existem os campos combinados $\mathbf{E} = 100\mathbf{a}_x - 200\mathbf{a}_y + 300\mathbf{a}_z$ V/m e $\mathbf{B} = -3\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$ mT. Se a velocidade

da carga em $t = 0$ é $\mathbf{v}(0) = (2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y - 4\mathbf{a}_z)10^5$ m/s: (*a*) calcule o vetor unitário que mostra a direção e o sentido em que a carga acelera em $t = 0$; (*b*) encontre a energia cinética da carga em $t = 0$.

8.4 Mostre que uma partícula carregada em um campo magnético uniforme descreve uma órbita circular com um período orbital que é independente do raio. Encontre a relação entre a velocidade angular e a densidade de fluxo magnético para um elétron (*a frequência ciclotron*).

8.5 Uma espira retangular de fio condutor no espaço livre une os pontos $A(1, 0, 1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(3, 0, 4)$, $D(1, 0, 4)$ e A. Pelo fio circula uma corrente de 6 mA na direção $\mathbf{a}_z$ de B para C. Uma corrente filamentar de 15 A circula ao longo de todo o eixo z na direção $\mathbf{a}_z$. (*a*) Calcule $\mathbf{F}$ no lado BC. (*b*) Calcule $\mathbf{F}$ no lado AB. (*c*) Calcule $\mathbf{F}_{\text{total}}$ na espira.

8.6 Mostre que o trabalho diferencial ao mover um elemento de corrente $I\,d\mathbf{L}$ ao longo de uma distância $d\mathbf{l}$ em um campo magnético $\mathbf{B}$, é o negativo do trabalho realizado no movimento do elemento $I\,d\mathbf{l}$ em uma distância $d\mathbf{L}$ no mesmo campo.

8.7 Lâminas uniformes de corrente estão posicionadas no espaço livre conforme se segue: $8\mathbf{a}_z$ A/m em $y = 0$, $-4\mathbf{a}_z$ A/m em $y = 1$ e $-4\mathbf{a}_z$ A/m em $y = -1$. Encontre o vetor força por metro de comprimento exercido em um filamento de corrente pelo qual circulam 7 mA na direção $\mathbf{a}_L$ se o filamento está posicionado em: (*a*) $x = 0$, $y = 0{,}5$ e $\mathbf{a}_L = \mathbf{a}_z$; (*b*) $y = 0{,}5$, $z = 0$ e $\mathbf{a}_L = \mathbf{a}_x$; (*c*) $x = 0$, $y = 1{,}5$ e $\mathbf{a}_L = \mathbf{a}_z$.

8.8 Duas fitas condutoras, de comprimentos infinitos na direção z, estão situadas no plano xz. Uma ocupa a região $d/2 < x < b + d/2$ e conduz uma densidade de corrente superficial $\mathbf{K} = K_0\mathbf{a}_z$, enquanto a outra está situada em $-(b + d/2) < x < -d/2$ e conduz uma densidade de corrente superficial igual a $-K_0\mathbf{a}_z$. (*a*) Encontre a força por unidade de comprimento em z que tende a separar as duas fitas. (*b*) Considere que b se aproxima de zero enquanto a corrente é mantida constante ($I = K_0\, b$), e mostre que a força por unidade de comprimento tende a $\mu_0 I^2/(2\pi d)$ N/m.

8.9 Uma corrente de $-100\mathbf{a}_z$ A/m circula no cilindro condutor $\rho = 5$ mm, e uma de $+500\mathbf{a}_z$ A/m está presente no cilindro condutor $\rho = 1$ mm. Calcule a intensidade da força total por metro de comprimento que está agindo para dividir o cilindro externo ao longo de seu comprimento.

8.10 Uma linha de transmissão plana consiste em dois planos condutores de largura b separados por d m no ar, pelos quais circulam correntes iguais e opostas de I A. Se $b \gg d$, encontre a força de repulsão por metro de comprimento entre os dois condutores.

8.11 (*a*) Use a Equação (14), da Seção 8.3, para mostrar que a força de atração por unidade de comprimento entre dois condutores filamentares no espaço livre, com correntes $I_1\mathbf{a}_z$ em $x = 0$, $y = d/2$ e $I_2\mathbf{a}_z$ em $x = 0$, $y = -d/2$, é $\mu_0 I_1 I_2/(2\pi d)$. (*b*) Mostre como um método mais simples pode ser utilizado para verificar o resultado da parte (*a*).

8.12 Dois anéis circulares condutores são paralelos, compartilham do mesmo eixo, possuem raio a e estão separados por uma distância d, onde $d << a$. Cada anel conduz uma corrente I. Determine a força de atração aproximada e indique as orientações relativas das correntes.

8.13 Uma corrente de 6 A flui de $M(2, 0, 5)$ a $N(5, 0, 5)$ em um condutor retilíneo e sólido, situado no espaço livre. Um filamento infinito de corrente situa-se ao longo do eixo z e é percorrido por 50 A na direção $\mathbf{a}_z$. Calcule o vetor torque no segmento de fio usando a origem em: (*a*) (0, 0, 5); (*b*) (0, 0, 0); (*c*) (3, 0, 0).

8.14 Um solenoide, com 25 cm de comprimento e 3 cm de diâmetro, conduz 4 A de corrente contínua em sua bobina de 400 espiras. Seu eixo é perpendicular a um campo magnético uniforme de 0,8 Wb/m^2 no ar. Usando uma origem no centro do solenoide, calcule o torque que age sobre ele.

8.15 Um filamento condutor sólido se estende de $x = -b$ até $x = b$ ao longo da linha $y = 2$, $z = 0$. Esse filamento é percorrido por uma corrente de 3 A na direção $\mathbf{a}_x$. Por um filamento infinito no eixo z circulam 5 A na direção $\mathbf{a}_z$. Obtenha uma expressão para o torque exercido no condutor finito em relação a uma origem posicionada em (0, 2, 0).

8.16 Suponha que um elétron esteja descrevendo uma órbita circular de raio a em volta de um núcleo carregado positivamente. (*a*) Selecionando uma corrente e uma área apropriadas, mostre que o momento de dipolo orbital equivalente é $ea^2\omega/2$, onde ω é a velocidade angular do elétron. (*b*) Mostre que o torque produzido por um campo magnético paralelo ao plano de órbita é $ea^2\omega B/2$. (*c*) Igualando as forças de Coulomb e centrífuga, mostre que ω é igual a $(4\pi\epsilon_0 m_e a^3/e^2)^{-1/2}$, onde m_e é a massa do elétron. (*d*) Encontre valores para a velocidade angular, torque e momento magnético orbital para o átomo de hidrogênio, onde a é aproximadamente 6×10^{-11} m. Considere $B = 0{,}5$ T.

8.17 O átomo de hidrogênio descrito no Problema 8.16 é agora submetido a um campo magnético cuja direção é a mesma do campo magnético de átomo. Mostre que as forças causadas por B resultam na diminuição da velocidade angular de $eB/(2m_e)$ e uma diminuição no momento orbital de $e^2a^2B/(4m_e)$. Quanto valem essas diminuições para o átomo de hidrogênio em partes por milhão para uma densidade de fluxo magnético externo de 0,5 T?

8.18 Calcule o vetor torque na espira quadrada mostrada na Figura 8.15 em relação a uma origem em A no campo $\mathbf{B}$, dados: (*a*) $A(0, 0, 0)$ e $\mathbf{B} = 100\mathbf{a}_y$ mT; (*b*) $A(0, 0, 0)$ e $\mathbf{B} = 200\mathbf{a}_x + 100\mathbf{a}_y$ mT; (*c*) $A(1, 2, 3)$ e $\mathbf{B} = 200\mathbf{a}_x + 100\mathbf{a}_y - 300\mathbf{a}_z$ mT; (*d*) $A(1, 2, 3)$ e $\mathbf{B} = 200\mathbf{a}_x + 100\mathbf{a}_y - 300\mathbf{a}_z$ mT para $x \geq 2$ e $\mathbf{B} = 0$ nos outros pontos.

8.19 Dado um material para o qual $\chi_m = 3{,}1$ e dentro do qual $\mathbf{B} = 0{,}4y\mathbf{a}_z$ T, calcule: (*a*) $\mathbf{H}$; (*b*) μ; (*c*) μ_r; (*d*) $\mathbf{M}$; (*e*) $\mathbf{J}$; (*f*) $\mathbf{J}_B$; (*g*) $\mathbf{J}_T$.

8.20 Calcule $\mathbf{H}$ em um material onde (*a*) $\mu_r = 4{,}2$, no qual existem $2{,}7 \times 10^{29}$ átomos/m^3 e cada átomo tem um momento de dipolo de $2{,}6 \times 10^{-30}\mathbf{a}_y$ $\text{A} \cdot \text{m}^2$; (*b*) $\mathbf{M} = 270\mathbf{a}_z$ A/m e $\mu = 2\ \mu$H/m; (*c*) $\chi_m = 0{,}7$ e $\mathbf{B} = 2\mathbf{a}_z$ T. (*d*) Calcule $\mathbf{M}$ em um material onde existem densidades superficiais

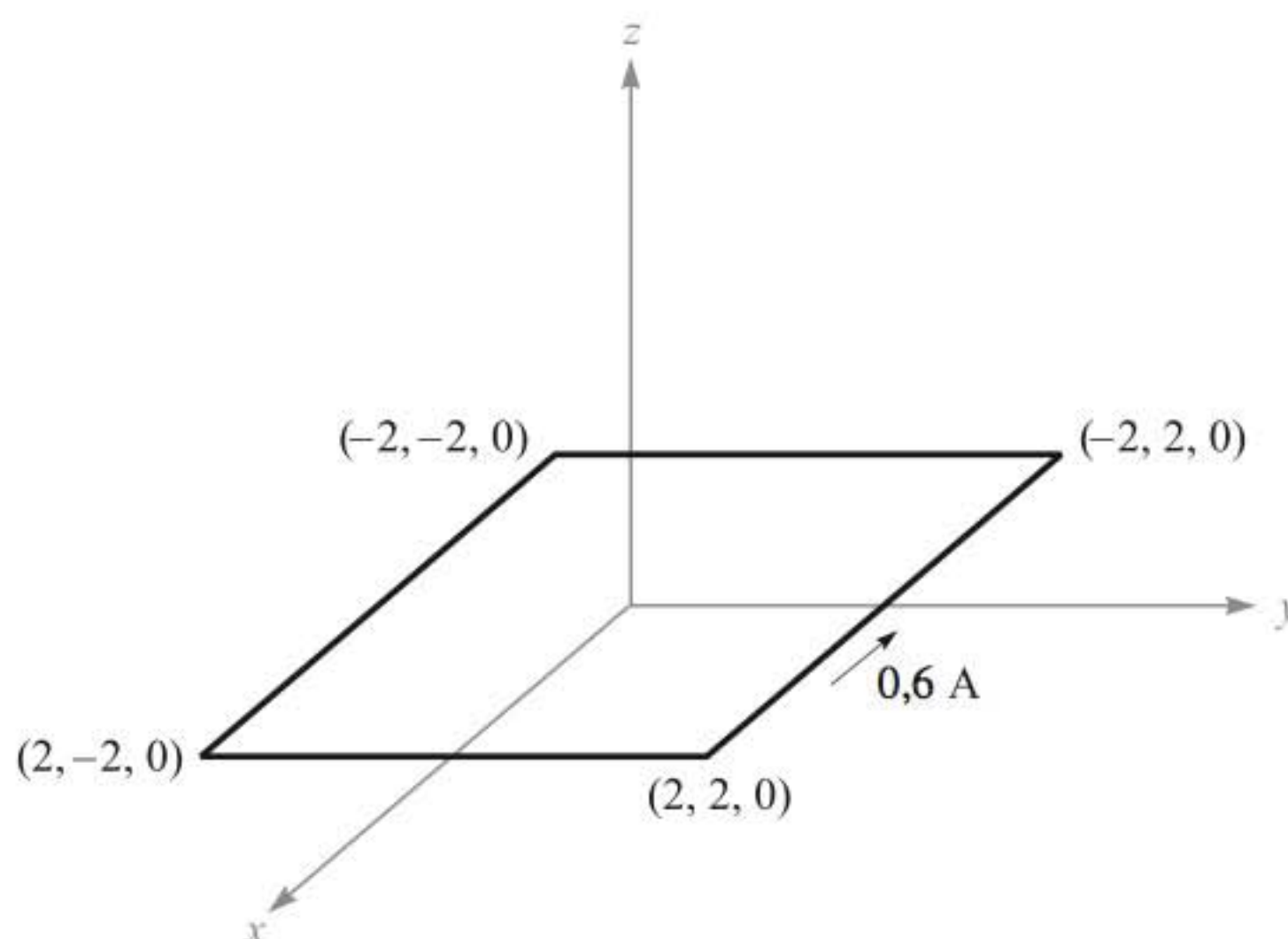



Figura 8.15 Ver Problema 8.18.

de corrente ligada de $12\mathbf{a}_z$ A/m e $-9\mathbf{a}_z$ A/m em $\rho = 0{,}3$ e 0,4 m, respectivamente.

8.21 Encontre a intensidade de magnetização em um material para o qual: (*a*) a densidade de fluxo magnético é 0,02 Wb/m^2; (*b*) a intensidade de campo magnético é 1.200 A/m e a permeabilidade relativa é 1,005; (*c*) existem $7{,}2 \times 10^{28}$ átomos por metro cúbico, cada um possuindo um momento de dipolo de 4×10^{-30} $\text{A}\cdot\text{m}^2$ na mesma direção, e a susceptibilidade magnética vale 0,003.

8.22 Sob certas condições, é possível aproximar os efeitos de materiais ferromagnéticos assumindo linearidade na relação entre **B** e **H**. Seja $\mu_r = 1.000$ para certo material do qual um fio cilíndrico de raio 1 mm é feito. Se $I = 1$ A e a distribuição de corrente é uniforme, calcule (*a*) **B**; (*b*) **H**, (*c*) **M**, (*d*) **J** e (*e*) $\mathbf{J}_B$ dentro do fio.

8.23 Calcule valores para H_ϕ, B_ϕ e M_ϕ em $\rho = c$ para um cabo coaxial com $a = 2{,}5$ mm e $b = 6$ mm se pelo mesmo circula uma corrente $I = 12$ A no condutor central, e $\mu = 3$ μH/m para 2,5 mm $< \rho <$ 3,5 mm, $\mu = 5$ μH/m para 3,5 mm $< \rho <$ 4,5 mm, e $\mu = 10$ μH/m para 4,5 mm $< \rho <$ 6 mm. Use $c =$: (*a*) 3 mm; (*b*) 4 mm; (*c*) 5 mm.

8.24 Duas lâminas de corrente, $K_0\mathbf{a}_y$ A/m em $z = 0$ e $-K_0\mathbf{a}_y$ A/m em $z = d$, estão separadas por um material não homogêneo, para o qual $\mu_r = az + 1$, onde a é uma constante. (*a*) Determine expressões para **H** e **B** no material. (*b*) Encontre o fluxo total que atravessa uma área de 1 m^2 no plano yz.

8.25 Por um filamento condutor em $z = 0$ circula uma corrente de 12 A na direção $\mathbf{a}_z$. Seja $\mu_r = 1$ para $\rho < 1$ cm, $\mu_r = 6$ para $1 < \rho < 2$ cm e $\mu_r = 1$ para $\rho > 2$ cm. Calcule: (*a*) **H** em todos os pontos; (*b*) **B** em todos os pontos.

8.26 Um solenoide longo tem raio de 3 cm, 5.000 espiras/m e conduz uma corrente $I = 0{,}25$ A. A região $0 < \rho < a$ no interior do solenoide tem $\mu_r = 5$, enquanto $\mu_r = 1$ para $a < \rho < 3$ cm. Determine a de maneira que:

(a) um fluxo total de 10 μWb esteja presente; (b) o fluxo seja igualmente dividido entre as regiões $0 < \rho < a$ e $a < \rho < 3$ cm.

8.27 Seja $\mu_{r1} = 2$ na região 1, definida por $2x + 3y - 4z > 1$, enquanto $\mu_{r2} = 5$ na região 2, onde $2x + 3y - 4z < 1$. Na região 1, $\mathbf{H}_1 = 50\mathbf{a}_x - 30\mathbf{a}_y + 20\mathbf{a}_z$ A/m. Calcule: (a) $\mathbf{H}_{N1}$; (b) $\mathbf{H}_{t1}$; (c) $\mathbf{H}_{t2}$; (d) $\mathbf{H}_{N2}$; (e) θ_1, o ângulo entre $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{a}_{N21}$; (f) θ_2, o ângulo entre $\mathbf{H}_2$ e $\mathbf{a}_{N21}$.

8.28 Para valores de B abaixo do joelho da curva de magnetização para o aço-silício, aproxime a curva por uma linha reta com $\mu = 5$ mH/m. O núcleo mostrado na Figura 8.16 possui áreas de 1,6 cm^2 e comprimentos de 10 cm em cada perna externa, e uma área de 2,5 cm^2 e comprimento de 3 cm na perna central. Uma bobina de 1.200 espiras, que conduz 12 mA, é enrolada na perna central. Calcule B na: (a) perna central; (b) perna central se um *gap* de ar de 0,3 mm está presente nessa perna.

8.29 No Problema 8.28, a aproximação linear sugerida no enunciado do problema leva a uma densidade de fluxo de 0,666 T na perna central. Utilizando esse valor de B e a curva de magnetização para o aço-silício, qual corrente é necessária na bobina de 1.200 espiras?

8.30 Um núcleo retangular tem permeabilidade $\mu_r >> 1$, uma seção reta quadrada de dimensões $a \times a$ e possui dimensões equivalentes a b e d ao longo da linha central, ao redor de seu perímetro. Bobinas 1 e 2, com N_1 e N_2 espiras, estão enroladas no núcleo. Considere um plano selecionado que contém a seção reta do núcleo, que coincide com o plano xy, tal que a superfície seja definida por $0 < x < a$, $0 < y < a$. (a) Com uma corrente I_1 na bobina 1, use a lei circuital de Ampère para encontrar a densidade de fluxo magnético como uma função da posição sobre a seção reta do núcleo. (b) Integre o resultado da parte (a) para determinar o fluxo magnético total no interior do núcleo. (c) Determine a indutância própria da bobina 1. (d) Determine a indutância mútua entre as bobinas 1 e 2.

8.31 Um toroide é construído de um material magnético e possui área da seção reta de 2,5 cm^2 e um comprimento efetivo de 8 cm. Existe também um pequeno *gap* de ar de 0,25 mm de comprimento e uma área efetiva de 2,8 cm^2. Uma fmm de 200 Ae é aplicada ao circuito magnético. Calcule o

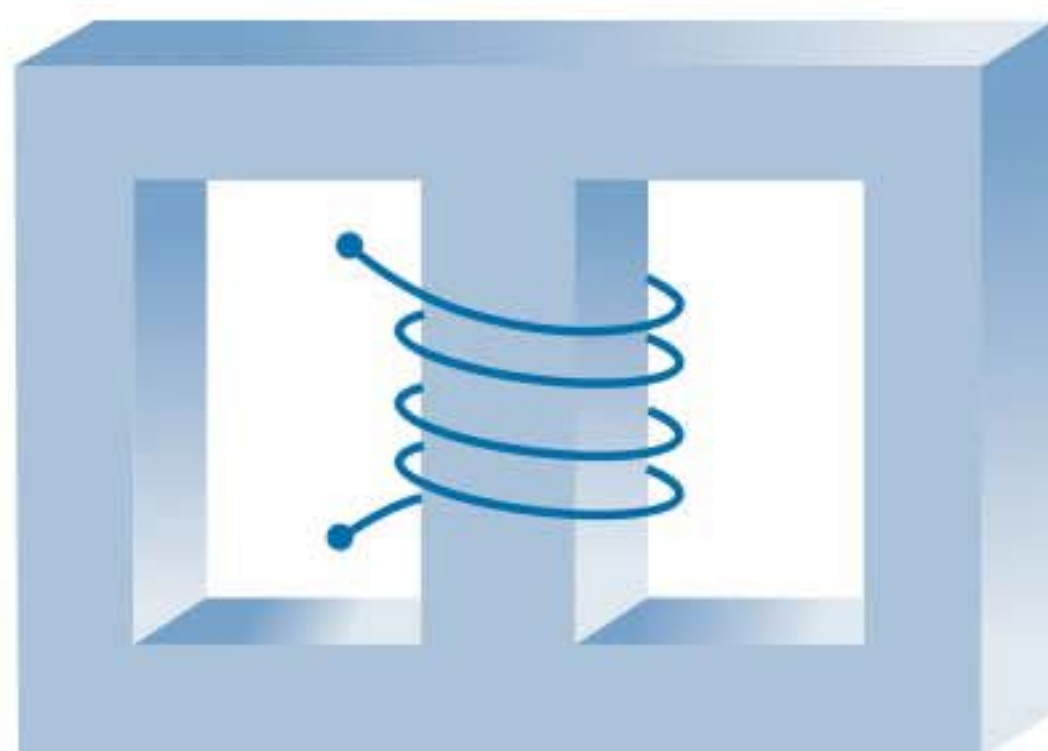



Figura 8.16 Ver Problema 8.28.

fluxo total no toroide se o material magnético: (*a*) tem uma permeabilidade infinita; (*b*) é considerada linear, com $\mu_r = 1.000$; (*c*) é de aço-silício.

8.32 (*a*) Encontre uma expressão para a energia magnética armazenada, por unidade de comprimento, em uma linha de transmissão coaxial, que consiste em luvas condutoras de espessura desprezível, de raios a e b. Um meio de permeabilidade relativa μ_r preenche a região entre os condutores. Suponha que uma corrente I flua em ambos os condutores, na mesma direção e em sentidos opostos. (*b*) Obtenha a indutância, L, por unidade de comprimento da linha, igualando a energia magnética a $(1/2)LI^2$.

8.33 Um núcleo toroidal tem uma seção reta quadrada, 2,5 cm $< \rho <$ 3,5 cm, $-0{,}5$ cm $< z <$ 0,5 cm. A metade superior do toroide, $0 < z < 0{,}5$ cm, é construída a partir de um material linear para o qual $\mu_r = 10$, enquanto a metade inferior, $-0{,}5$ cm $< z < 0$, possui $\mu_r = 20$. Uma fmm de 150 Ae estabelece um fluxo na direção $\mathbf{a}_\phi$. Para $z > 0$, calcule: (*a*) $H_\phi(\rho)$; (*b*) $B_\phi(\rho)$; (*c*) $\Phi_{z>0}$. (*d*) Repita para $z < 0$. (*e*) Calcule Φ_{total}.

8.34 Determine a energia armazenada por unidade de comprimento no campo magnético interno de um fio retilíneo infinitamente longo de raio a, pelo qual circula uma corrente I.

8.35 Os cones $\theta = 21°$ e $\theta = 159°$ são superfícies condutoras e nelas circulam correntes totais de 40 A, conforme mostrado na Figura 8.17. As correntes retornam por uma superfície esférica condutora de raio 0,25 m. (*a*) Calcule **H** na região $0 < r < 0{,}25$, $21° < \theta < 159°$, $0 < \phi < 2\pi$. (*b*) Quanta energia está armazenada nessa região?

8.36 As dimensões do condutor externo de um cabo coaxial são b e c, onde $c > b$. Considerando $\mu = \mu_0$, calcule a energia magnética armazenada por unidade de comprimento na região $b < \rho < c$ para uma corrente total I, uniformemente distribuída, que circula em sentidos opostos nos condutores interno e externo.

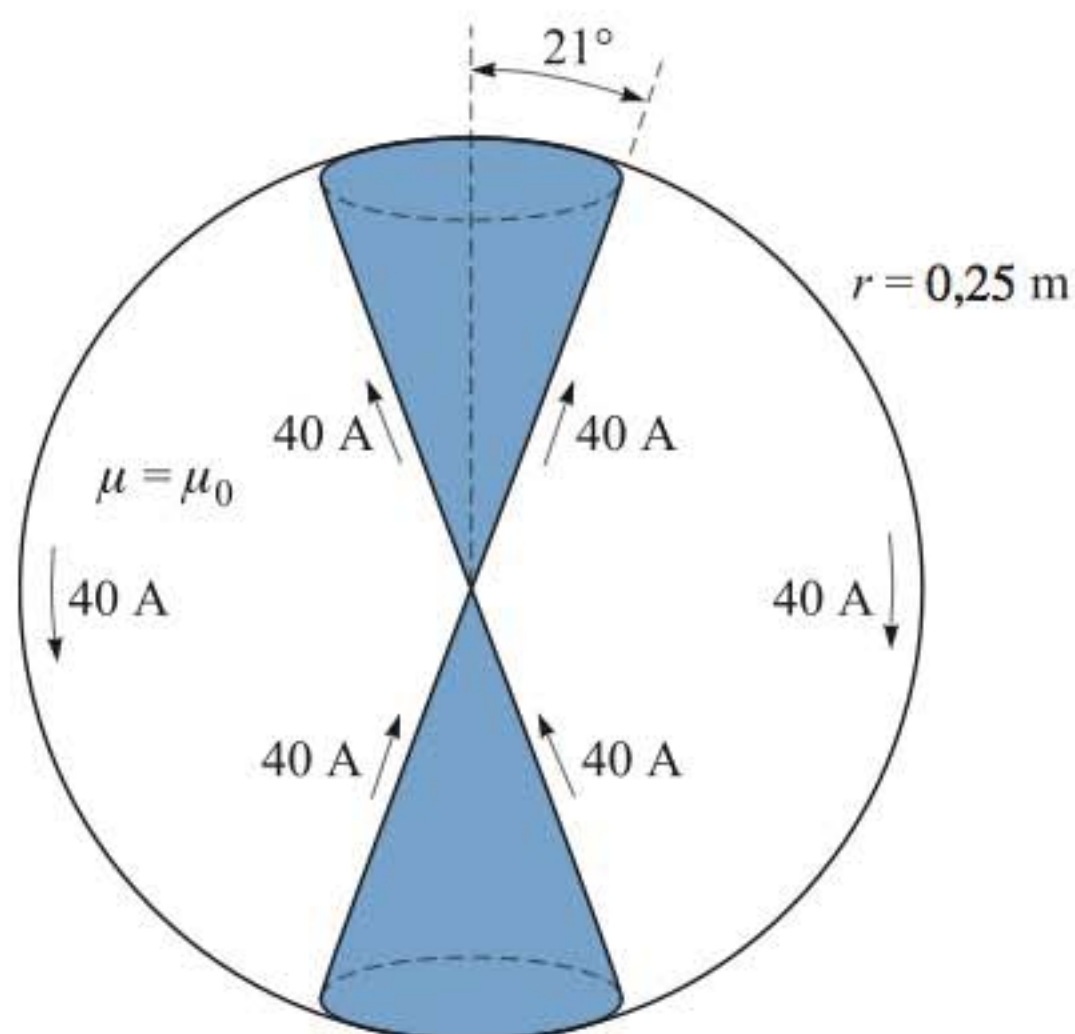



Figura 8.17 Ver Problema 8.35.

8.37 Calcule a indutância da configuração cone-esfera descrita no Problema 8.35 e Figura 8.17. A indutância é aquela oferecida na origem entre os vértices do cone.

8.38 Um núcleo toroidal tem uma seção reta retangular definida pelas superfícies $\rho = 2$ cm, $\rho = 3$ cm, $z = 4$ cm e $z = 4{,}5$ cm. O material do núcleo possui uma permeabilidade relativa de 80. Se o núcleo é enrolado por uma bobina que contém 8.000 espiras de fio, calcule a indutância.

8.39 Por planos condutores no ar em $z = 0$ e $z = d$ circulam correntes superficiais de $\pm K_0\mathbf{a}_x$ A/m. (*a*) Calcule a energia armazenada no campo magnético, por unidade de comprimento $(0 < x < 1)$, em uma largura w $(0 < y < w)$. (*b*) Calcule a indutância por unidade de comprimento dessa linha de transmissão por $W_H = \frac{1}{2}LI^2$, onde I é a corrente total em uma largura w em cada condutor. (*c*) Calcule o fluxo total que atravessa o retângulo $0 < x < 1$, $0 < z < d$, no plano $y = 0$, e deste resultado novamente encontre a indutância por unidade de comprimento.

8.40 Um cabo coaxial possui raios a e b, onde $a < b$. Um material de permeabilidade $\mu_r \neq 1$ existe na região $a < \rho < c$, enquanto a região $c < \rho < b$ é preenchida com ar. Determine uma expressão para a indutância por unidade de comprimento.

8.41 Uma bobina retangular é composta de 150 espiras de um condutor filamentar. Calcule a indutância mútua no espaço livre entre essa bobina e um filamento retilíneo infinito no eixo z, se os quatro vértices da bobina estão posicionados em: (*a*) (0, 1, 0), (0, 3, 0), (0, 3, 1) e (0, 1, 1); (*b*) (1, 1, 0), (1, 3, 0), (1, 3, 1) e (1, 1, 1).

8.42 Ache a indutância mútua entre dois filamentos que formam anéis circulares de raios a e Δa, onde $\Delta a \ll a$. O campo deve ser determinado por métodos aproximados. Os anéis são coplanares e concêntricos.

8.43 (*a*) Use relações de energia para mostrar que a indutância interna de um fio cilíndrico não magnético, de raio a, em que flui uma corrente I uniformemente distribuída, é $\mu_0/(8\pi)$ H/m. (*b*) Calcule a indutância interna se a porção do condutor para o qual $\rho < c < a$ for removida.

8.44 Mostre que a indutância externa por unidade de comprimento em uma linha de transmissão de dois fios, que conduzem correntes iguais e opostas, é aproximadamente igual a $(\mu/\pi)\ln(d/a)$ H/m, onde a é o raio de cada fio e d é o espaçamento entre os centros dos dois fios. Em que condição esta aproximação é válida?

9

Campos Variantes no Tempo e Equações de Maxwell

As relações básicas dos campos eletrostático e magnético estacionário foram obtidas nos oito capítulos anteriores, e estamos agora prontos para discutir campos que variam no tempo. A discussão será breve, pois a essa altura a análise e o cálculo vetoriais já devem ser ferramentas mais conhecidas. Algumas das relações permanecerão inalteradas, e a maioria das relações será modificada apenas ligeiramente.

Dois novos conceitos serão introduzidos: o campo elétrico produzido por um campo magnético variável* e o campo magnético produzido pelo campo elétrico variável. O primeiro desses conceitos resultou da pesquisa experimental de Michael Faraday, e o segundo, do trabalho teórico de James Clerk Maxwell.

Na realidade, Maxwell foi inspirado pelo trabalho experimental de Faraday e pelo modelo proporcionado pelas "linhas de força" que Faraday introduziu no desenvolvimento da sua teoria de eletricidade e magnetismo. Maxwell era 40 anos mais novo que Faraday, mas eles se conheceram durante os cinco anos que Maxwell passou em Londres como um professor novato, alguns anos após Faraday ter se aposentado. A teoria de Maxwell foi desenvolvida após esse período na universidade, enquanto estava trabalhando sozinho em sua casa, na Escócia. Este trabalho ocupou-lhe cinco anos de sua vida, entre os 35 e 40 anos de idade.

As quatro equações básicas da teoria eletromagnética apresentadas nesse capítulo levam seu nome. ■

9.1 LEI DE FARADAY

WWW Animação

Após Oersted[1] ter demonstrado em 1820 que uma corrente elétrica afetava uma agulha de bússola, Faraday declarou sua crença de que se uma corrente podia produzir campo magnético, então um campo magnético deveria ser capaz de produzir uma corrente. O conceito de "campo" não estava disponível naquele tempo, e o objetivo de Faraday era mostrar que uma corrente poderia ser produzida pelo "magnetismo".

---

* N. de T.: Variável no tempo.

[1] Hans Christian Oersted foi professor de física na Universidade de Copenhague na Dinamarca.

Ele trabalhou em seu problema intermitentemente por um período de 10 anos, até que finalmente teve sucesso em 1831.[2] Ele enrolou duas bobinas separadas em um toroide de aço e colocou um galvanômetro em um circuito e uma bateria no outro. Quando fechava o circuito da bateria, ele notava uma deflexão momentânea do galvanômetro. Uma deflexão similar, no sentido oposto, ocorria quando a bateria era desconectada. Isso, é claro, foi o primeiro experimento que ele realizou envolvendo um campo magnético *variável* e, em seguida, demonstrou que um campo magnético *em movimento* ou uma bobina em movimento poderiam também produzir uma deflexão no galvanômetro.

Considerando os campos, dizemos agora que um campo magnético variante no tempo produz uma *força eletromotriz* (fem) que pode estabelecer uma corrente em um circuito fechado adequado. Uma força eletromotriz é simplesmente uma tensão gerada por condutores em movimento em um campo magnético ou por campos magnéticos variáveis; vamos defini-la nesta seção. A lei de Faraday normalmente é enunciada como

$$\text{fem} = -\frac{d\Phi}{dt} \text{ V} \tag{1}$$

A Equação (1) implica a existência de um caminho fechado, mas não necessariamente um caminho fechado condutor. O caminho fechado, por exemplo, poderia incluir um capacitor ou poderia ser uma linha puramente imaginária no espaço. O fluxo magnético é aquele fluxo que passa por toda e qualquer superfície cujo perímetro seja o caminho fechado, e $d\Phi/dt$ é a taxa de variação temporal desse fluxo.

Um valor diferente de zero para $d\Phi/dt$ pode resultar de qualquer uma das seguintes situações:

1. Um fluxo variável no tempo que enlaça um caminho fechado estacionário;
2. Movimento relativo entre um fluxo estacionário e um caminho fechado;
3. Uma combinação dos dois.

O sinal de menos é uma indicação de que a fem está em uma *direção** tal que produz uma corrente** cujo fluxo, se adicionado ao fluxo original, reduziria a intensidade da fem. Essa afirmação de que a tensão induzida age de forma a produzir um fluxo oposto é conhecida como *lei de Lenz*.[3]

Se o caminho fechado for aquele tomado por um condutor filamentar de N espiras, geralmente podemos considerar as espiras como coincidentes e afirmar que

$$\text{fem} = -N\frac{d\Phi}{dt} \tag{2}$$

onde Φ é agora interpretado como o fluxo que passa por qualquer um dos N caminhos coincidentes.

[2] Joseph Henry produziu resultados similares na Albany Academy em Nova York, aproximadamente na mesma época.

[3] Henri Frederic Emile Lenz nasceu na Alemanha, mas trabalhou na Rússia. Ele publicou sua lei em 1834.

* N. de T.: Neste ponto, muito cuidado deve ser tomado em relação ao termo "direção", pois fem é uma grandeza escalar. Desta forma, este termo corresponde à polaridade da fem.

** N. de T.: Esta corrente é denominada "corrente induzida".

Precisamos agora definir fem, utilizada nas Equações (1) e (2). A fem é obviamente um escalar, e (talvez não tão obviamente) uma verificação dimensional mostra que ela é medida em volts. Definimos a fem como

$$\text{fem} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \tag{3}$$

e notamos que é a tensão em torno de um *caminho fechado* específico. Se qualquer parte do caminho é alterada, geralmente a fem também muda. A mudança em relação aos resultados estáticos é claramente mostrada pela Equação (3), pois uma intensidade de campo elétrico resultante de uma distribuição estática de carga deve levar a uma diferença de potencial nula em torno de um caminho fechado. Em eletrostática, a integral de linha leva a uma diferença de potencial. Com campos variáveis no tempo, o resultado é uma fem ou uma tensão.

Substituindo Φ na Equação (1) com a integral de superfície de **B**, temos

$$\text{fem} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \tag{4}$$

onde os dedos da nossa mão direita indicariam a direção do caminho fechado, e nosso polegar, a direção de $d\mathbf{S}$. Uma densidade de fluxo **B** na direção de $d\mathbf{S}$, a qual aumenta com o tempo, produz, desta forma, um valor médio de **E** que é *oposto* à direção positiva ao longo do caminho fechado. A relação dada pela regra da mão direita entre a integral de superfície e a integral pelo caminho fechado na Equação (4), deve sempre ser mantida em mente durante integrações de fluxo e determinações de fem.

Vamos dividir nossa investigação em duas partes, primeiramente encontrando a contribuição para a fem total dada por um campo variável em um caminho estacionário (fem transformadora*) e, em seguida, considerando um caminho se movimentando em um campo constante** (fem de movimento, ou geradora).

Primeiro, consideramos um caminho estacionário. O fluxo magnético é a única grandeza que varia com o tempo no lado direito da Equação (4), e uma derivada parcial pode ser levada para dentro do sinal de integração,

$$\text{fem} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \tag{5}$$

Antes de aplicarmos esse resultado simples a um exemplo, vamos obter a forma pontual dessa equação integral. Aplicando o teorema de Stokes à integral de caminho fechado, temos

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

onde as integrais de superfície podem ser tomadas sobre superfícies idênticas. As superfícies são perfeitamente genéricas e podem ser escolhidas como diferenciais,

* N. de T.: Também denominada “fem de transformador”.

** N. de T.: No caso de campos variáveis no tempo é necessário fazer uma distinção entre campos constante e uniforme. O primeiro refere-se à não variação com o tempo, enquanto o segundo, à não variação no espaço.

$$(\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

e

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{6}$$

Essa é uma das quatro equações de Maxwell, descrita em sua forma diferencial (ou pontual), forma na qual elas são mais genericamente utilizadas. A Equação (5) é a forma integral dessa equação e é equivalente à lei de Faraday quando aplicada a um caminho fixo. Se **B** não é uma função do tempo, as Equações (5) e (6), evidentemente, se reduzem às equações para a eletrostática.

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0 \quad \text{(eletrostática)}$$

e

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{(eletrostática)}$$

Como um exemplo da interpretação das Equações (5) e (6), considere um campo magnético simples que aumenta exponencialmente com o tempo dentro da região cilíndrica $\rho < b$,

$$\mathbf{B} = B_0 e^{kt} \mathbf{a}_z \tag{7}$$

onde $B_0 =$ constante. Escolhendo o caminho circular $\rho = a$, $a < b$, no plano $z = 0$, ao longo do qual E_ϕ deve ser constante, por questão de simetria, da Equação (5) teremos que

$$\text{fem} = 2\pi a E_\phi = -k B_0 e^{kt} \pi a^2$$

A fem ao longo desse caminho fechado é $-kB_0e^{kt}\pi a^2$. Ela é proporcional a a^2 porque a densidade de fluxo magnético é uniforme e o fluxo que passa pela superfície em qualquer instante é proporcional à área.

Se agora substituirmos a por ρ, considerando $\rho < b$, a intensidade de campo elétrico em qualquer ponto será

$$\mathbf{E} = -\tfrac{1}{2} k B_0 e^{kt} \rho \mathbf{a}_\phi \tag{8}$$

Agora tentaremos obter a mesma resposta a partir da Equação (6), que se torna

$$(\nabla \times \mathbf{E})_z = -k B_0 e^{kt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial \rho}$$

Multiplicando por ρ e integrando de 0 até ρ (tratando t como uma constante, uma vez que a derivada é uma derivada parcial),

$$-\tfrac{1}{2} k B_0 e^{kt} \rho^2 = \rho E_\phi$$

ou

$$\mathbf{E} = -\tfrac{1}{2} k B_0 e^{kt} \rho \mathbf{a}_\phi$$

mais uma vez.

Se B_0 é considerado positivo, um condutor filamentar de resistência R teria uma corrente circulando no sentido negativo de $\mathbf{a}_\phi$, e essa corrente estabeleceria um fluxo

dentro da espira circular no sentido negativo de $\mathbf{a}_z$. Uma vez que E_ϕ aumenta exponencialmente com o tempo, a corrente e o fluxo assim também o fazem e, dessa forma, tendem a reduzir a taxa temporal de aumento do fluxo aplicado e a fem resultante, de acordo com e lei de Lenz.

Antes de terminar esse exemplo, é bom destacar que o campo **B** dado não satisfaz todas as equações de Maxwell. Tais campos são geralmente assumidos (*sempre* em problemas de circuitos c.a.*) e não causam dificuldades quando interpretados corretamente. Entretanto, ocasionalmente eles causam surpresas. Esse campo em particular é mais discutido no Problema 9.19, no final do capítulo.

Agora, vamos considerar o caso de um fluxo constante (no tempo) e um caminho fechado que se move. Antes de derivarmos quaisquer resultados especiais da lei de Faraday, vista na Equação (1), vamos utilizar a lei básica para analisar o problema específico destacado na Figura 9.1. O circuito fechado consiste em dois condutores paralelos conectados por um voltímetro de alta resistência e de dimensões desprezíveis em uma extremidade, e por uma barra deslizante que se move numa velocidade **v** na outra. A densidade de fluxo magnético **B** é constante (no tempo) e uniforme (no espaço), e é normal ao plano que contém o caminho fechado.

Considere que a posição da barra de curto-circuito seja dada por y. O fluxo que passa pela superfície dentro do caminho fechado em qualquer tempo será

$$\Phi = Byd$$

Da Equação (1), obtemos

$$\text{fem} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\frac{dy}{dt}d = -Bvd \tag{9}$$

A fem é definida como $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$, e temos aqui um caminho condutor, de forma que realmente podemos determinar **E** em todos os pontos ao longo do caminho fechado. De acordo com os princípios da eletrostática, temos que o componente tangencial

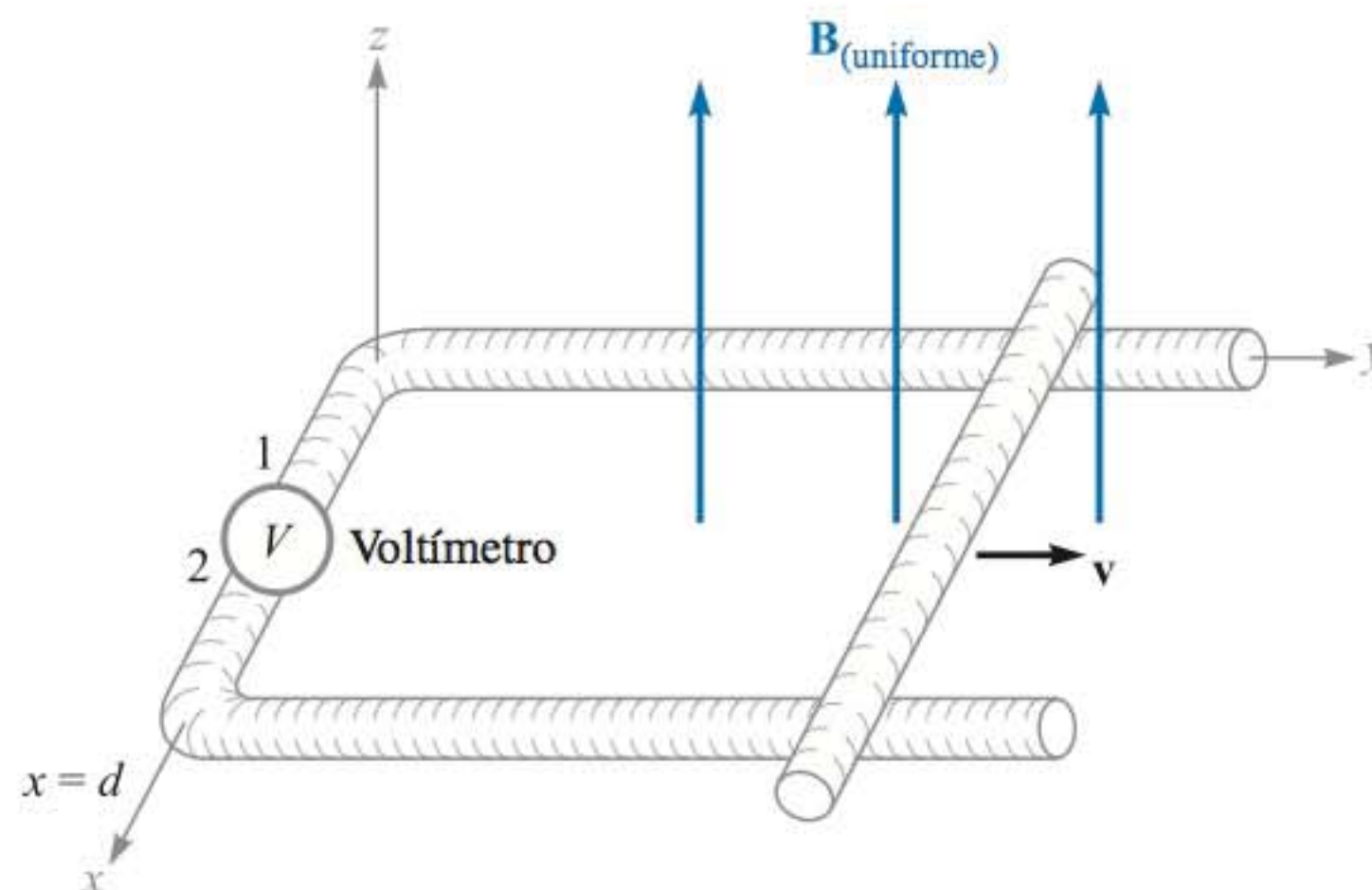



Figura 9.1 Um exemplo que ilustra a aplicação da lei de Faraday considerando uma densidade de fluxo magnético constante **B** e um caminho que se move. A barra de curto-circuito se move para a direita com uma velocidade **v**, e o circuito é completado por dois trilhos e por um voltímetro de resistência extremamente alta. A leitura do voltímetro é $V_{12} = -Bvd$.

* N. de T.: Circuitos c.a. = circuitos alimentados por corrente (ou tensão) alternada.

de **E** é zero na superfície de um condutor, e na Seção 9.4 vamos mostrar que o componente tangencial é zero na superfície de um condutor *perfeito* ($\sigma = \infty$) para todas as condições de variação no tempo. Isso é equivalente a dizer que um condutor perfeito é um "curto-circuito". O caminho fechado inteiro na Figura 9.1 pode ser considerado um condutor perfeito, com exceção do voltímetro. Por isso, o cálculo correto de $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$ não deve envolver qualquer contribuição ao longo da barra deslizante inteira, de ambos os trilhos e dos terminais do voltímetro. Uma vez que estamos integrando no sentido anti-horário (mantendo o interior do lado positivo da superfície na nossa esquerda, como geralmente fazemos), a contribuição $E\,\Delta L$ sobre o voltímetro deve ser $-Bvd$, mostrando que a intensidade de campo elétrico no instrumento está orientada do terminal 2 para o terminal 1. Portanto, para uma leitura em escala crescente (valores cada vez mais positivos), o terminal positivo do voltímetro deve ser o terminal 2.

A direção de circulação da pequena corrente resultante pode ser confirmada, notando-se que o fluxo envolvido é reduzido pela corrente no sentido horário, de acordo com a lei de Lenz. O terminal 2 do voltímetro é novamente visto como o terminal positivo.

Vamos agora considerar esse exemplo utilizando o conceito de *fem de movimento*. A força em uma carga Q que se move em uma velocidade **v** em um campo magnético **B** é

$$\boxed{\mathbf{F} = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}}$$

ou

$$\frac{\mathbf{F}}{Q} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{10}$$

A barra condutora deslizante é composta de cargas positivas e negativas, e cada uma experimenta essa força. A força por unidade de carga, dada pela Equação (10), é chamada de intensidade de campo elétrico *de movimento* $\mathbf{E}_m$,

$$\boxed{\mathbf{E}_m = \mathbf{v} \times \mathbf{B}} \tag{11}$$

Se o condutor que se move fosse levantado dos trilhos, essa intensidade de campo elétrico forçaria elétrons em direção a uma das extremidades da barra (a mais distante) até que o *campo estático* devido a essas cargas contrabalanceasse o campo induzido pela movimentação da barra. Assim, a intensidade de campo elétrico tangencial resultante seria zero ao longo do comprimento da barra.

A fem de movimento produzida pelo condutor em movimento então é fornecida por

$$\text{fem} = \oint \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{L} = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L} \tag{12}$$

onde a última integral pode ter um valor diferente de zero apenas ao longo daquela porção do caminho que está em movimento, ou ao longo daquela na qual **v** possui algum valor diferente de zero. Calculando o lado direito da Equação (12), obtemos

$$\oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L} = \int_d^0 vB\,dx = -Bvd$$

como anteriormente. Essa é a fem total, pois **B** não é uma função do tempo.

No caso de um condutor em movimento em um campo magnético uniforme e constante, podemos associar uma intensidade de campo elétrico de movimento $\mathbf{E}_m = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ a toda a porção do condutor em movimento, e calcular a fem resultante por

$$\text{fem} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \oint \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{L} = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L} \tag{13}$$

Se a densidade de fluxo magnético está também variando com o tempo, então devemos incluir ambas as contribuições, a fem transformadora na Equação (5) e a fem de movimento na Equação (12),

$$\text{fem} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L} \tag{14}$$

Essa expressão é equivalente à simples afirmativa

$$\text{fem} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{1}$$

e qualquer uma delas pode ser utilizada para se determinar essas tensões induzidas.

Embora a Equação (1) pareça simples, existem alguns exemplos elaborados nos quais sua aplicação é bastante difícil. Esses exemplos geralmente envolvem contatos deslizantes ou chaves, e sempre estão relacionados à substituição de uma parte do circuito por uma parte nova.[4] Como exemplo, considere o circuito simples da Figura 9.2, que contém diversos fios condutores perfeitos, um voltímetro ideal, um campo **B** uniforme e constante e uma chave. Quando a chave é aberta, obviamente passa a existir mais fluxo envolvido no circuito do voltímetro. Entretanto, ele continua a ler zero. A mudança no fluxo não foi produzida por um **B** variável no tempo [primeiro termo da Equação (14)] e nem por um condutor que se move através de um campo magnético [segunda parte da Equação (14)]. Em vez disso, um novo circuito substituiu o antigo. Portanto, é necessário ser cauteloso no cálculo das variações nos enlaces de fluxo.

A separação da fem em duas partes, conforme indicada pela Equação (14), uma devido à taxa de variação temporal de **B**, e a outra devido ao movimento do circuito, é de certa forma arbitrária, pois depende da velocidade relativa entre o *observador* e o

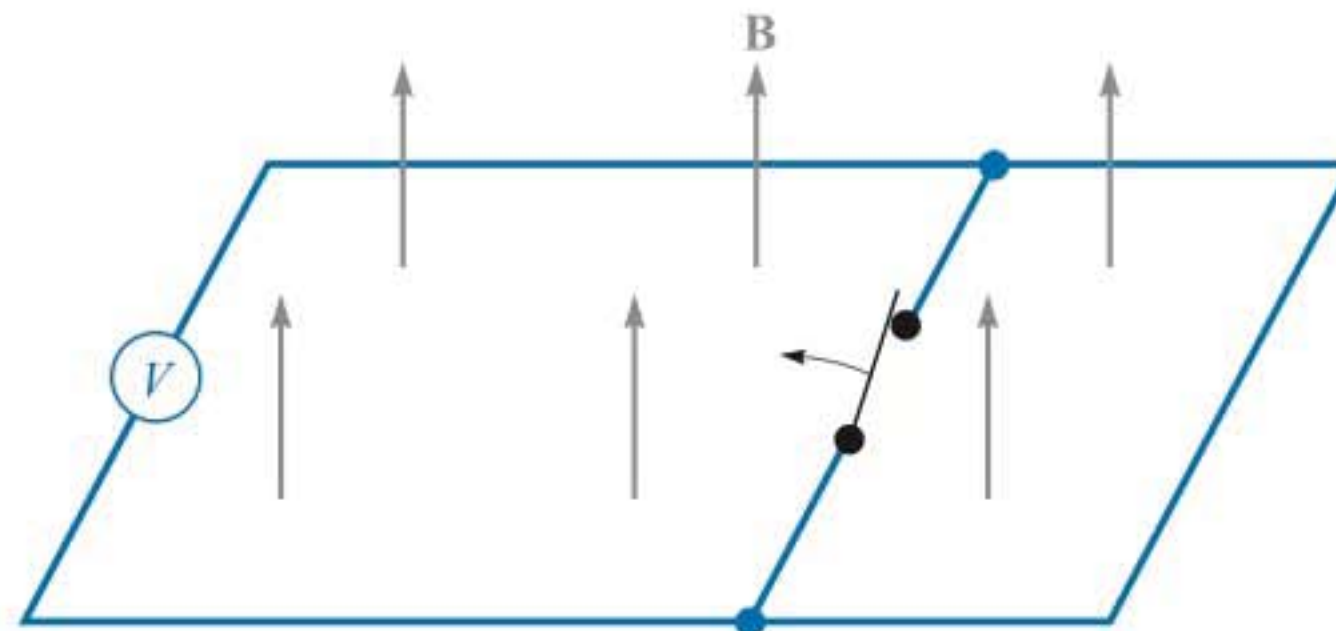



Figura 9.2 Um aumento aparente nos enlaces de fluxo não leva a uma tensão induzida quando uma parte do circuito é simplesmente substituída por outra pela abertura da chave. Nenhuma indicação será observada no voltímetro.

[4] Ver Bewley, nas Referências no final deste capítulo, particularmente as páginas 12-19.

sistema. Um campo que esteja variando simultaneamente no tempo e no espaço pode parecer constante para um observador que se mova com o campo. Essa linha de raciocínio é desenvolvida de forma mais profunda na aplicação da teoria da relatividade especial à teoria eletromagnética.[5]

EP9.1. Dentro de certa região, $\epsilon = 10^{-11}$ F/m e $\mu = 10^{-5}$ H/m. Se $B_x = 2 \times 10^{-4} \cos 10^5 t \operatorname{sen} 10^{-3} y$ T: (*a*) use $\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ para encontrar $\mathbf{E}$; (*b*) encontre o fluxo magnético total que atravessa a superfície $x = 0$, $0 < y < 40$ m, $0 < z < 2$ m, em $t = 1\ \mu$s; (*c*) calcule o valor da integral de linha fechada de $\mathbf{E}$ em volta do perímetro da superfície dada.

Resp. $-20.000 \operatorname{sen} 10^5 t \cos 10^{-3} y \mathbf{a}_z$ V/m; 0,318 mWb; –3,19 V

EP9.2. Com referência à barra deslizante mostrada na Figura 9.1, seja $d = 7$ cm, $\mathbf{B} = 0{,}3\mathbf{a}_z$ T e $\mathbf{v} = 0{,}1\mathbf{a}_y e^{20y}$ m/s. Considere $y = 0$ em $t = 0$. Calcule: (*a*) $v(t = 0)$; (*b*) $y(t = 0{,}1)$; (*c*) $v(t = 0{,}1)$; (*d*) V_{12} em $t = 0{,}1$.

Resp. 0,1 m/s; 1,12 cm; 0,125 m/s; –2,63 mV

9.2 CORRENTE DE DESLOCAMENTO

A lei experimental de Faraday foi utilizada para obter uma das equações de Maxwell na forma diferencial,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{15}$$

que mostra que um campo magnético variável no tempo produz um campo elétrico. Relembrando a definição de rotacional, vemos que esse campo elétrico possui a propriedade especial de circulação. Sua integral de linha ao longo de um caminho fechado genérico não é zero. Agora, vamos voltar nossa atenção ao campo elétrico variável no tempo.

Devemos, primeiramente, focar na forma pontual da lei circuital de Ampère quando aplicada a campos magnéticos estacionários,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \tag{16}$$

e mostrar sua inadequação para condições variáveis no tempo tomando seu divergente em cada lado,

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} \equiv 0 = \nabla \cdot \mathbf{J}$$

O divergente do rotacional é igual a zero*, de forma que $\nabla \cdot \mathbf{J}$ é também zero. Entretanto, a equação da continuidade,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_\nu}{\partial t}$$

[5] Isso é discutido em várias das referências listadas nas Referências no final do capítulo. Ver Panofsky e Phillips, pp. 142-51; Owen, pp. 231-45 e Harman, em várias páginas.

* N. de T.: Isso se constitui em uma identidade vetorial.

nos mostra que a Equação (16) pode ser verdadeira apenas se $\partial\rho_v/\partial t = 0$. Essa é uma limitação irreal, e a Equação (16) deve ser consertada antes de podermos aceitá-la para campos variantes no tempo. Suponha que somemos um termo desconhecido **G** à Equação (16),

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{G}$$

Tomando novamente o divergente, temos

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \mathbf{G}$$

Logo

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = \frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

Substituindo ρ_v por $\nabla \cdot \mathbf{D}$,

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{D}) = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

da qual obtemos a solução mais simples para **G**,

$$\mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

A lei circuital de Ampère na forma pontual se torna então

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{17}$$

A Equação (17) não foi derivada. É simplesmente uma forma que obtivemos que não entra em desacordo com a equação da continuidade. É também consistente com todos nossos outros resultados, e a aceitaremos assim como fizemos com cada lei experimental e com as equações delas derivadas. Estamos construindo uma teoria e defenderemos nossas equações *até que se prove que elas estejam erradas*. Isso ainda não foi feito.

Agora, temos a segunda das equações de Maxwell, e vamos investigar seu significado. O termo adicional $\partial\mathbf{D}/\partial t$ possui as dimensões de densidade de corrente, ampères por metro quadrado. Uma vez que ela resulta de uma densidade de fluxo elétrico variável no tempo (ou densidade de deslocamento), Maxwell chamou-a de *densidade de corrente de deslocamento*. Geralmente, vamos denotá-la por $\mathbf{J}_d$:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_d$$

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Essa é o terceiro tipo de densidade de corrente a que somos apresentados. Densidade de corrente de condução,

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

é a movimentação de cargas (geralmente elétrons) em uma região de densidade de carga líquida igual a zero, e densidade de corrente de convecção,

$$\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{v}$$

é a movimentação de densidade volumétrica de carga. Ambas são representadas por **J** na Equação (17). A densidade de corrente ligada está incluída, evidentemente, em **H**. Em um meio não condutor no qual não há densidade volumétrica de carga presente, $\mathbf{J} = 0$, e então

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{se } \mathbf{J} = 0) \tag{18}$$

Note a simetria entre as Equações (18) e (15):

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{15}$$

Novamente, a analogia entre os vetores intensidade **E** e **H** e os vetores densidade de fluxo **D** e **B** é aparente. Entretanto, não podemos colocar muita fé nessa analogia, porque ela falha quando investigamos forças em partículas. A força em uma carga está relacionada a **E** e a **B**, e alguns bons argumentos podem ser apresentados mostrando uma analogia entre **E** e **B** e entre **D** e **H**. Contudo, vamos omiti-los e simplesmente dizer que o conceito de corrente de deslocamento foi provavelmente sugerido a Maxwell pela simetria primeiramente mencionada neste parágrafo.[6]

A corrente de deslocamento total que atravessa qualquer superfície dada é expressa pela integral de superfície,

$$I_d = \int_S \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

e podemos obter a versão variável no tempo da lei circuital de Ampère integrando a Equação (17) pela superfície S,

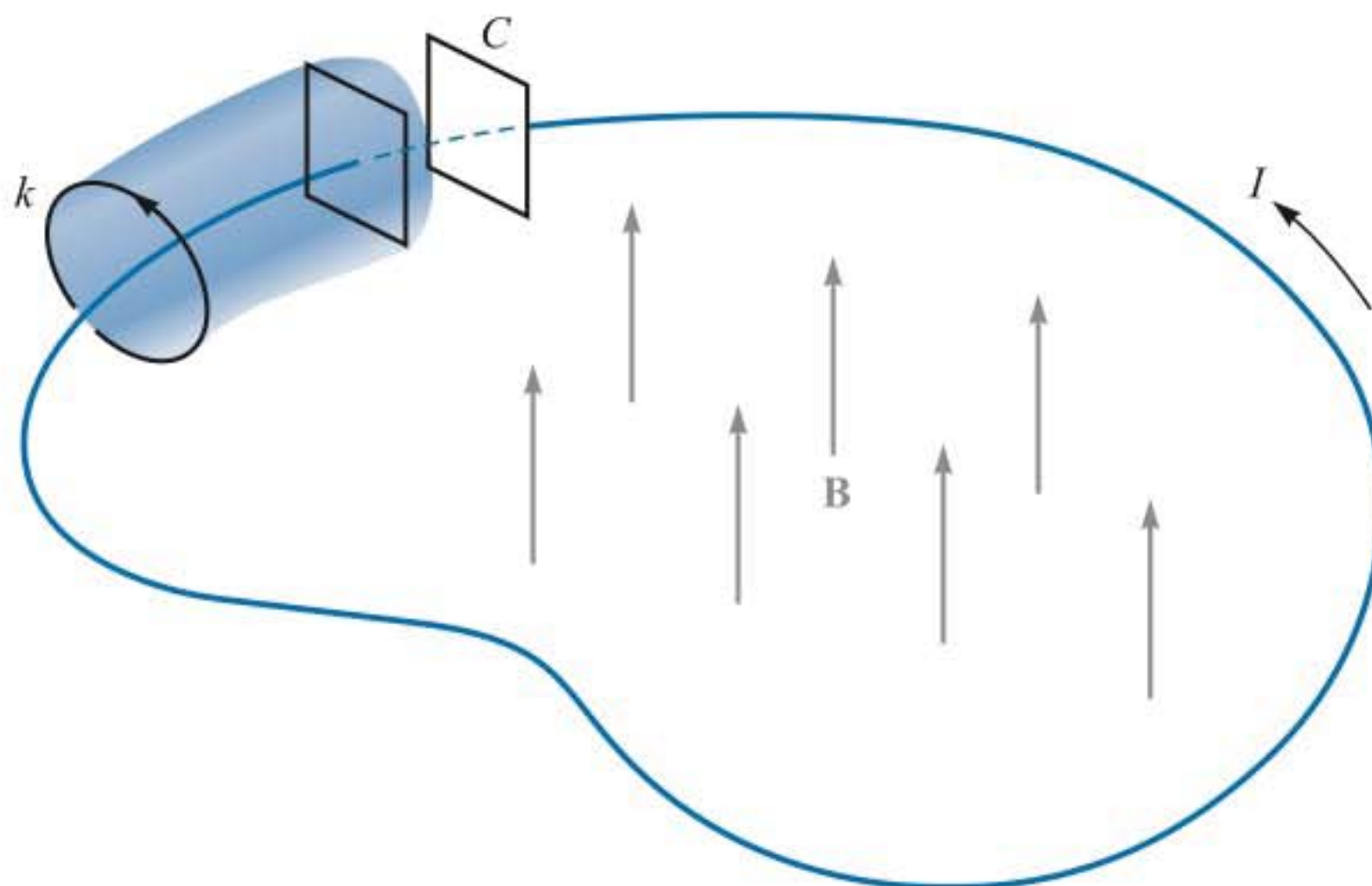



Figura 9.3 Um condutor filamentar forma uma espira conectando as duas placas de um capacitor de placas paralelas. Um campo magnético variável no tempo dentro do caminho fechado produz uma fem de $V_0 \cos \omega t$ ao longo do caminho fechado. A corrente de condução I é igual à corrente de deslocamento entre as placas do capacitor.

[6] A analogia que relaciona **B** a **D** e **H** a **E** é fortemente defendida por Fano, Chu, e Adler (ver Referências do Capítulo 6). O caso da comparação de **B** com **E** e **D** com **H** é apresentada em Halliday e Resnick (ver Referências deste capítulo).

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

e aplicando o teorema de Stokes,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I + I_d = I + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \tag{19}$$

Qual é a natureza da densidade de corrente de deslocamento? Vamos estudar o circuito simples da Figura 9.3, que contém uma espira filamentar e um capacitor de placas paralelas. Dentro da espira, um campo magnético variando senoidalmente com o tempo é aplicado para produzir uma fem ao longo do caminho fechado (o filamento mais a porção pontilhada entre as placas do capacitor), que devemos tomar como

$$\text{fem} = V_0 \cos \omega t$$

Utilizando a teoria elementar de circuitos e supondo que a espira possui resistência e indutância desprezíveis, podemos obter a corrente na espira como

$$\begin{aligned} I &= -\omega C V_0 \operatorname{sen} \omega t \\ &= -\omega \frac{\epsilon S}{d} V_0 \operatorname{sen} \omega t \end{aligned}$$

onde as grandezas ϵ, S e d estão associadas ao capacitor. Vamos aplicar a lei circuital de Ampère ao menor caminho fechado circular k e desconsiderar, por enquanto, a corrente de deslocamento:

$$\oint_k \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I_k$$

O caminho e o valor de **H** ao longo do caminho são grandezas definidas (apesar de difíceis de determinar), e $\oint_k \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$ é uma grandeza definida. A corrente I_k é aquela corrente através de todas as superfícies cujo perímetro seja o caminho k. Se escolhermos uma superfície simples perfurada pelo filamento, como a superfície plana circular definida pelo caminho circular k, a corrente é evidentemente a corrente de condução. Suponha, agora, que consideremos o caminho fechado k como a boca de uma sacola de papel cuja base passe entre as placas do capacitor. A sacola não é perfurada pelo filamento, e a corrente de condução é zero. Agora precisamos considerar a corrente de deslocamento, pois dentro do capacitor

$$D = \epsilon E = \epsilon \left(\frac{V_0}{d} \cos \omega t \right)$$

e então

$$I_d = \frac{\partial D}{\partial t} S = -\omega \frac{\epsilon S}{d} V_0 \operatorname{sen} \omega t$$

Esse é o mesmo valor encontrado na corrente de condução na espira filamentar. Logo, a aplicação da lei circuital de Ampère, incluindo a corrente de deslocamento, pelo caminho k, leva a um valor definido para a integral de linha de **H**. Esse valor deve ser igual à corrente total que atravessa a superfície escolhida. Para algumas

superfícies a corrente é quase completamente de condução, mas para aquelas superfícies que passam entre as placas do capacitor, a corrente de condução é zero, e é a corrente de deslocamento que agora é igual à integral de linha fechada de **H**.

Fisicamente, devemos notar que o capacitor armazena carga e que o campo elétrico entre as placas do capacitor é muito maior que pequenos campos nas suas bordas do lado de fora. Introduzimos, então, pouco erro quando desprezamos a corrente de deslocamento em todas aquelas superfícies que não passam entre as placas.

A corrente de deslocamento está associada com os campos elétricos variáveis no tempo e, portanto, existe em todos os condutores imperfeitos por onde circulam correntes de condução que variam no tempo. A última parte do exercício proposto a seguir indica a razão pela qual essa corrente adicional nunca foi descoberta experimentalmente.

EP9.3. Encontre a amplitude da densidade da corrente de deslocamento: (*a*) adjacente a uma antena de automóvel onde a intensidade de campo magnético de um sinal FM* é $H_x = 0{,}15\cos\,[3{,}12(3 \times 10^8 t - y)]$ A/m (*b*) no espaço aéreo em um ponto dentro de uma grande transformador de distribuição de potência onde $\mathbf{B} = 0{,}8\cos\,[1{,}257 \times 10^{-6}(3 \times 10^8 t - x)]\mathbf{a}_y$ T; (*c*) dentro de um grande capacitor de potência a óleo onde $\epsilon_r = 5$ e $\mathbf{E} = 0{,}9\cos\,[1{,}257 \times 10^{-6}(3 \times 10^8 t - z\sqrt{5})]\mathbf{a}_x$ MV/m; (*d*) em um condutor metálico a 60 Hz se $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\sigma = 5{,}8 \times 10^7$ S/m, e $\mathbf{J} = \text{sen}\,(377t - 117{,}1z)\mathbf{a}_x$ MA/m^2.

Resp. 0,468 A/m^2; 0,800 A/m^2; 0,0150 A/m^2; 57,6 pA/m^2

9.3 EQUAÇÕES DE MAXWELL NA FORMA PONTUAL

Já obtivemos duas das equações de Maxwell para campos variáveis no tempo,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{20}$$

e

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{21}$$

As formas das duas equações restantes permanecem inalteradas em relação àquelas das condições de não variação temporal:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \tag{22}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{23}$$

* N. de T.: FM é a abreviatura do termo inglês *Frequency Modulation*, que significa modulação em frequência.

A Equação (22) determina essencialmente que a densidade de carga é uma fonte (ou sorvedouro) de linhas de fluxo elétrico. Note que não mais podemos dizer que *todo* o fluxo elétrico começa e termina em cargas, pois segundo a forma pontual da lei de Faraday, mostrada na Equação (20), **E** e **D** (consequentemente) podem apresentar circulação se um campo magnético variável estiver presente. Com isso, as linhas de fluxo elétrico podem formar caminhos fechados. Entretanto, o inverso ainda é verdadeiro, e todo coulomb de carga deve ter um coulomb de fluxo elétrico dele divergindo.

A Equação (23) novamente reconhece o fato de que não se sabe sobre a existência de "cargas magnéticas", ou polos magnéticos. O fluxo magnético é sempre encontrado em caminhos fechados e nunca diverge de uma fonte pontual.

Essas quatro equações formam a base de toda teoria eletromagnética. Elas são equações diferenciais parciais e relacionam os campos elétrico e magnético um com o outro e com suas fontes, carga e densidade de corrente. As equações auxiliares que relacionam **D** e **E**,

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}} \tag{24}$$

relacionam **B** e **H**,

$$\boxed{\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}} \tag{25}$$

definem densidade de corrente de condução

$$\boxed{\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}} \tag{26}$$

e definem densidade de corrente de convecção, expressando-a pela densidade volumétrica de carga ρ_ν,

$$\boxed{\mathbf{J} = \rho_\nu \mathbf{v}} \tag{27}$$

são também necessárias para definir e relacionar as grandezas que aparecem nas equações de Maxwell.

Os potenciais V e **A** não foram incluídos porque eles não são estritamente necessários, apesar de serem extremamente úteis. Eles serão discutidos no final deste capítulo.

Se não temos materiais "adequados" com os quais trabalhar, devemos então substituir as Equações (24) e (25) pelas relações que envolvem os campos de polarização e magnetização,

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}} \tag{28}$$

$$\boxed{\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})} \tag{29}$$

Para materiais lineares, podemos relacionar **P** a **E**

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} \tag{30}$$

e **M** a **H**

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \tag{31}$$

Finalmente, por causa de sua importância fundamental, deveríamos incluir a equação de força de Lorentz, escrita na forma pontual como a força por unidade de volume,

$$\mathbf{f} = \rho_v(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{32}$$

Os capítulos seguintes são dedicados à aplicação das equações de Maxwell em diversos problemas simples.

EP9.4. Seja $\mu = 10^{-5}$ H/m, $\epsilon = 4 \times 10^{-9}$ F/m, $\sigma = 0$ e $\rho_v = 0$. Calcule k (incluindo as unidades) de forma que cada um dos seguintes pares de campos satisfaçam às equações de Maxwell: (*a*) $\mathbf{D} = 6\mathbf{a}_x - 2y\mathbf{a}_y + 2z\mathbf{a}_z$ nC/m², $\mathbf{H} = kx\mathbf{a}_x + 10y\mathbf{a}_y - 25z\mathbf{a}_z$ A/m; (*b*) $\mathbf{E} = (20y - kt)\mathbf{a}_x$ V/m, $\mathbf{H} = (y + 2 \times 10^6 t)\mathbf{a}_z$ A/m.

Resp. 15 A/m²; –2,5 × 10⁸ V/(m · s)

9.4 EQUAÇÕES DE MAXWELL NA FORMA INTEGRAL

As formas integrais das equações de Maxwell são normalmente mais fáceis de reconhecer se considerarmos as leis experimentais das quais foram obtidas por um processo de generalização. Experimentos devem tratar com grandezas físicas macroscópicas e por isso seus resultados devem ser expressos pelas relações integrais. Uma equação diferencial sempre representa uma teoria. Vamos agora agrupar as formas integrais das equações de Maxwell da Seção 9.3.

Integrando a Equação (20) sobre uma superfície e aplicando o teorema de Stokes, obtemos a lei de Faraday,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \tag{33}$$

e o mesmo processo aplicado à Equação (21) leva à lei circuital de Ampère,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \tag{34}$$

As leis de Gauss para os campos elétrico e magnético são obtidas integrando as Equações (22) e (23) por um volume e usando o teorema da divergência:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{vol}} \rho_v dv \tag{35}$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \tag{36}$$

Essas quatro equações integrais nos permitem encontrar as condições de fronteira para **B**, **D**, **H** e **E**, as quais são necessárias para calcular as constantes obtidas na solução das equações de Maxwell na forma diferencial parcial. Essas condições de fronteira são, em geral, as mesmas que aquelas para campos estáticos ou estacionários, e os mesmos métodos podem ser utilizados para obtê-las. Entre dois meios físicos reais quaisquer (onde **K** deve ser zero na superfície de fronteira), a Equação (33) possibilita relacionar os componentes tangenciais do campo E,

$$E_{t1} = E_{t2} \tag{37}$$

e da Equação (34), temos:

$$H_{t1} = H_{t2} \tag{38}$$

As integrais de superfície produzem as condições de fronteira para os componentes normais,

$$D_{N1} - D_{N2} = \rho_S \tag{39}$$

e

$$B_{N1} = B_{N2} \tag{40}$$

É frequentemente desejável idealizar um problema físico assumindo um condutor perfeito para o qual σ é infinito, mas **J** é finito. Assim, pela lei de Ohm, em um condutor perfeito,

$$\mathbf{E} = \mathbf{0}$$

e a partir da forma pontual da lei de Faraday,

$$\mathbf{H} = \mathbf{0}$$

para campos que variam no tempo. A forma pontual da lei circuital de Ampère mostra, então, que o valor finito de **J** é

$$\mathbf{J} = \mathbf{0}$$

e corrente deve circular pela superfície do condutor como uma corrente superficial **K**. Logo, se a região 2 é um condutor perfeito, as Equações (37) a (40) se tornam, respectivamente,

$$E_{t1} = 0 \tag{41}$$

$$H_{t1} = K \quad (\mathbf{H}_{t1} = \mathbf{K} \times \mathbf{a}_N) \tag{42}$$

$$D_{N1} = \rho_s \tag{43}$$

$$B_{N1} = 0 \tag{44}$$

onde $\mathbf{a}_N$ é um vetor unitário normal à superfície do condutor, no sentido para fora.

Note que a densidade superficial de carga é considerada uma possibilidade física para dielétricos, condutores perfeitos ou condutores imperfeitos, mas essa densidade superficial de *corrente* é considerada apenas conjuntamente com condutores perfeitos.

As condições de fronteira anteriores são uma parte muito necessária das equações de Maxwell. Todos os problemas físicos reais possuem fronteiras e requerem a solução das equações de Maxwell em duas ou mais regiões e também o casamento dessas

soluções nas fronteiras. No caso de condutores perfeitos, a solução das equações dentro do condutor é simples (todos os campos que variam com o tempo são zero), mas a aplicação das condições de fronteira das Equações (41) a (44) pode ser muito difícil.

Certas propriedades fundamentais da propagação de ondas são evidentes quando as equações de Maxwell são resolvidas para uma região *sem fronteiras*. Esse problema será tratado no Capítulo 11: ele representa a aplicação mais simples das equações de Maxwell porque é o único problema que não requer a consideração de nenhuma condição de fronteira.

EP9.5. O vetor unitário $0{,}64\mathbf{a}_x + 0{,}6\mathbf{a}_y - 0{,}48\mathbf{a}_z$ aponta da região 2 ($\epsilon_{r2} = 2$, $\mu_{r2} = 3$, $\sigma_2 = 0$) em direção à região 1 ($\epsilon_{r1} = 4$, $\mu_{r1} = 2$, $\sigma_1 = 0$). Se $\mathbf{B}_1 = (\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z)$ sen $300t$ T no ponto P na região 1 adjacente à fronteira, calcule a amplitude em P de: (*a*) $\mathbf{B}_{N1}$; (*b*) $\mathbf{B}_{t1}$; (*c*) $\mathbf{B}_{N2}$; (*d*) $\mathbf{B}_2$.

Resp. 2,00 T; 3,16 T; 2,00 T; 5,15 T

EP9.6. A superfície $y = 0$ é um plano condutor perfeito, enquanto a região $y > 0$ possui $\epsilon_r = 5$, $\mu_r = 3$ e $\sigma = 0$. Considerando $\mathbf{E} = 20\cos(2\times10^8 t - 2{,}58z)\mathbf{a}_y$ V/m para $y > 0$, calcule em $t = 6$ ns; (*a*) ρ_s em $P(2, 0, 0{,}3)$; (*b*) $\mathbf{H}$ em P; (*c*) $\mathbf{K}$ em P.

Resp. 0,81 nC/m^2; $-62{,}3\mathbf{a}_x$ mA/m; $-62{,}3\mathbf{a}_z$ mA/m

9.5 POTENCIAIS RETARDADOS

Animação

Os potenciais variáveis no tempo, geralmente chamados de potenciais *retardados* por uma razão que veremos brevemente, encontram suas maiores aplicações em problemas de radiação (a serem abordados no Capítulo 14), nos quais a distribuição da fonte é conhecida aproximadamente. Cabe lembrar que o potencial escalar elétrico V pode ser expresso por uma distribuição de cargas estáticas,

$$V = \int_{\text{vol}} \frac{\rho_v dv}{4\pi\epsilon R} \quad \text{(estático)} \tag{45}$$

e que o potencial vetor magnético pode ser obtido de uma distribuição de corrente que seja constante no tempo,

$$\mathbf{A} = \int_{\text{vol}} \frac{\mu \mathbf{J}\, dv}{4\pi R} \quad \text{(c.c.)} \tag{46}$$

As equações diferenciais satisfeitas por V,

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \quad \text{(estático)} \tag{47}$$

e $\mathbf{A}$,

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad \text{(c.c.)} \tag{48}$$

podem ser tratadas como as formas pontuais das Equações integrais (45) e (46), respectivamente.

Depois que encontramos V e $\mathbf{A}$, os campos fundamentais são simplesmente obtidos utilizando-se o gradiente,

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad \text{(estático)} \tag{49}$$

ou o rotacional,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{(c.c.)} \tag{50}$$

Agora desejamos definir potenciais variáveis no tempo adequados, os quais sejam consistentes com as expressões anteriores quando apenas cargas estáticas e correntes contínuas estiverem envolvidas.

A Equação (50), aparentemente, ainda é consistente com as equações de Maxwell. Essas equações determinam que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, e a divergência da Equação (50) leva à divergência do rotacional que é zero. Vamos considerar (como tentativa) que a Equação (50) é satisfatória para campos variantes no tempo, e voltar nossa atenção para a Equação (49).

A inadequação da Equação (49) é óbvia porque a aplicação da operação de rotacional a cada lado e o reconhecimento de que o rotacional do gradiente é zero confrontam-se com a definição $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. Entretanto, a forma pontual da lei de Faraday determina que $\nabla \times \mathbf{E}$ não é genericamente igual a zero; por isso, vamos tentar efetivar um melhoramento pela adição de um termo desconhecido à Equação (49),

$$\mathbf{E} = -\nabla V + \mathbf{N}$$

tomando o rotacional,

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 + \nabla \times \mathbf{N}$$

utilizando a forma pontual da lei de Faraday,

$$\nabla \times \mathbf{N} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

e utilizando a Equação (50), temos

$$\nabla \times \mathbf{N} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A})$$

ou

$$\nabla \times \mathbf{N} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

A solução mais simples para essa equação é

$$\mathbf{N} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

e isso leva a

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}} \tag{51}$$

Ainda temos que verificar as Equações (50) e (51) pela substituição das mesmas nas duas equações de Maxwell restantes:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$$

Fazendo isso, obtemos as expressões mais complicadas

$$\frac{1}{\mu}\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J} + \epsilon\left(-\nabla\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}\right)$$

e

$$\epsilon\left(-\nabla \cdot \nabla V - \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \mathbf{A}\right) = \rho_v$$

ou

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} - \mu\epsilon\left(\nabla\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}\right) \quad (52)$$

e

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (53)$$

Aparentemente, não há inconsistência nas Equações (52) e (53). Em condições estáticas ou de corrente contínua, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, e as Equações (52) e (53) se reduzem às Equações (48) e (47), respectivamente. Vamos, então, assumir que os potenciais variáveis no tempo possam ser definidos de forma que **B** e **E** possam ser obtidos por eles, mediante as Equações (50) e (51). Essas duas últimas equações, entretanto, não servem para definir **A** e *V completamente*. Elas representam condições necessárias, mas não suficientes. Nossa suposição inicial foi simplesmente que $\boldsymbol{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, e um vetor não pode ser definido fornecendo-se apenas seu rotacional. Suponha, por exemplo, que tenhamos um campo potencial vetor muito simples no qual A_y e A_z são zero. A expansão da Equação (50) leva a

$$B_x = 0$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z}$$

$$B_z = -\frac{\partial A_x}{\partial y}$$

e vemos que nenhuma informação está disponível sobre a maneira como A_x varia com x. Essa informação poderia ser encontrada se também soubéssemos o valor do divergente de **A**, pois em nosso exemplo

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

Finalmente, devemos notar que a informação que temos sobre **A** é dada apenas como derivadas parciais, e que um termo constante no espaço deve ser acrescentado. Em todos os problemas físicos nos quais a região de solução se estende até o infinito, esse termo constante deve ser zero, pois não pode haver campos no infinito.

Generalizando a partir desse exemplo simples, podemos dizer que um campo vetorial é definido completamente quando seu rotacional e seu divergente são ambos conhecidos e quando seu valor é dado em um ponto qualquer (incluindo no infinito). Assim, temos liberdade para especificar o divergente de **A**, e fazemos isso com base nas Equações (52) e (53), procurando pelas expressões mais simples. Definimos

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \tag{54}$$

e as Equações (52) e (53) se tornam

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \tag{55}$$

e

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \tag{56}$$

Essas equações estão relacionadas às equações de onda, as quais serão discutidas nos Capítulos 10 e 11; elas mostram simetria considerável, e deveríamos estar altamente satisfeitos com nossas definições de V e $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{50}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \tag{54}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{51}$$

As integrais equivalentes das Equações (45) e (46) para os potenciais variáveis no tempo são obtidas das definições nas Equações (50), (51) e (54), mas vamos apenas apresentar os resultados finais e indicar a natureza geral dos mesmos. No Capítulo 11, descobriremos que qualquer distúrbio eletromagnético viajará à velocidade

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

através de qualquer meio homogêneo descrito por μ e ϵ. No caso do espaço livre, essa velocidade é a velocidade da luz, aproximadamente 3×10^8 m/s. Dessa forma, é lógico suspeitar que o potencial em qualquer ponto não seja devido ao valor da densidade de carga em algum ponto distante no mesmo instante, mas que decorra do seu valor em algum tempo anterior, pois o efeito se propaga em uma velocidade finita. Logo, a Equação (45) se torna

$$V = \int_{\text{vol}} \frac{[\rho_v]}{4\pi\epsilon R} dv \tag{57}$$

onde $[\rho_v]$ indica que todo t que aparece na expressão para ρ_v foi substituído por um tempo *retardado*,

$$t' = t - \frac{R}{v}$$

Assim, se a densidade de carga pelo espaço era dada como

$$\rho_v = e^{-r} \cos \omega t$$

então

$$[\rho_v] = e^{-r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{R}{v} \right) \right]$$

onde R é a distância entre o elemento diferencial de carga considerado e o ponto no qual o potencial deve ser determinado.

O potencial vetor magnético retardado é dado por

$$\mathbf{A} = \int_{\text{vol}} \frac{\mu[\mathbf{J}]}{4\pi R} dv \qquad (58)$$

O uso de um tempo retardado resultou nos potencias variáveis no tempo, os quais foram chamados de potenciais retardados. No Capítulo 14 vamos aplicar a Equação (58) para a situação simples de um elemento diferencial de corrente no qual I é uma função senoidal do tempo. Outras aplicações simples da Equação (58) são consideradas em diversos problemas no final deste capítulo.

Podemos resumir o uso dos potenciais afirmando que um conhecimento da distribuição de ρ_v e $\mathbf{J}$ pelo espaço teoricamente nos permite determinar V e $\mathbf{A}$ a partir das Equações (57) e (58). Os campos elétrico e magnético serão então obtidos, pela aplicação das Equações (50) e (51). Se as distribuições de carga e corrente são desconhecidas, ou aproximações razoáveis não podem ser utilizadas para elas, esses potenciais geralmente não representam um caminho mais fácil para a solução do que a aplicação direta das equações de Maxwell.

EP9.7. Uma carga pontual de 4 cos $10^8\pi t$ μC está posicionada em $P_+(0, 0, 1{,}5)$, enquanto –4 cos $10^8\pi t$ μC está em $P_-(0, 0, -1{,}5)$, ambas no espaço livre. Calcule V em $P(r = 450, \theta, \phi = 0)$ em $t = 15$ ns para $\theta =$: (*a*) 0º; (*b*) 90°; (*c*) 45°.

Resp. 159,8 V; 0; 143 V

REFERÊNCIAS

1. Bewley, L. V. *Flux Linkages and Electromagnetic Induction*. New York: Macmillan, 1952. Esse pequeno livro discute muitos dos exemplos paradoxais envolvendo tensões induzidas.
2. Faraday, M. *Experimental Researches in Electricity*. London: B. Quaritch, 1839, 1855. Leitura muito interessante das primeiras descobertas científicas. Uma fonte mais recente e disponível é *Great Books of the Western World*, vol. 45, Encyclopaedia Britannica, Inc., Chicago, 1952.
3. Halliday, D., R. Resnick, and J. Walker. *Fundamentals of Physics*. 5. ed. New York: John Wiley & Sons, 1977. Esse texto é amplamente utilizado nos primeiros anos dos cursos universitários de física.
4. Harman, W. W. *Fundamentals of Electronic Motion*. New York: McGraw-Hill, 1953. Efeitos relativísticos são discutidos de uma maneira clara e interessante.
5. Nussbaum, A. *Electromagnetic Theory for Engineers and Scientists*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1965. Ver exemplo do *rocket-generator* que começa na página 211.
6. Owen, G. E. *Electromagnetic Theory*. Boston: Allyn and Bacon, 1963. A lei de Faraday é discutida no Capítulo 8.
7. Panofsky, W. K. H., and M. Phillips. *Classical Electricity and Magnetism*. 2. ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1962. A relatividade é tratada em um nível moderadamente avançado no Capítulo 15.

WWW Quizzes

PROBLEMAS

9.1 Na Figura 9.4, seja $B = 0{,}2 \cos 120\pi t$ T, e considere que o condutor que une as duas extremidades do resistor seja perfeito. O campo magnético produzido por $I(t)$ deve ser considerado desprezível. Calcule: (*a*) $V_{ab}(t)$; (*b*) $I(t)$.

9.2 No exemplo descrito pela Figura 9.1, substitua a densidade de fluxo magnético constante pela seguinte grandeza variável no tempo: $\mathbf{B} = B_0$ sen $\omega t\, \mathbf{a}_z$. Considere $\mathbf{v}$ constante, e a posição y da barra, zero em $t = 0$. Determine a fem em qualquer tempo t.

9.3 Dado $\mathbf{H} = 300\mathbf{a}_z \cos(3 \times 10^8 t - y)$ A/m no espaço livre, calcule a fem desenvolvida na direção e sentido genéricos $\mathbf{a}_\phi$ ao longo do caminho fechado que possui vértices em: (*a*) (0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0) e (0, 1, 0); (*b*) (0, 0, 0), $(2\pi, 0, 0)$, $(2\pi, 2\pi, 0)$ e $(0, 2\pi, 0)$.

9.4 Uma espira de fio retangular contém um voltímetro de alta resistência e seus vértices estão inicialmente em $(a/2, b/2, 0)$, $(-a/2, b/2, 0)$, $(-a/2, -b/2, 0)$ e $(a/2, -b/2, 0)$. A espira começa a rotacionar ao redor do eixo x com velocidade angular constante ω, com o primeiro vértice movendo-se na direção e sentido $\mathbf{a}_z$ em $t = 0$. Considere uma densidade de fluxo magnético uniforme $\mathbf{B} = B_0\mathbf{a}_z$. Determine a fem induzida na espira em rotação e especifique a direção da corrente.

9.5 A localização da barra deslizante na Figura 9.5 é dada por $x = 5t + 2t^3$, e a separação entre os dois trilhos é de 20 cm. Seja $\mathbf{B} = 0{,}8x^2\mathbf{a}_z$ T. Encontre a leitura do voltímetro em: (*a*) $t = 0{,}4$ s; (*b*) $x = 0{,}6$ m.

9.6 Considere que a espira de fio do Problema 9.4 esteja estacionária em sua posição em $t = 0$ e determine a fem induzida que resulta de uma densidade de fluxo magnético dada por $\mathbf{B}(y, t) = B_0 \cos(\omega t - \beta y)\mathbf{a}_z$, onde ω e β são constantes.

9.7 Cada trilho na Figura 9.6 possui uma resistência de 2,2 Ω/m. A barra se move para a direita a uma velocidade constante de 9 m/s em um campo magnético uniforme de 0,8 T. Calcule I(t), $0 < t < 1$ s, se a barra estiver em $x = 2$ m em $t = 0$ e: (*a*) um resistor de 0,3 Ω estiver presente na

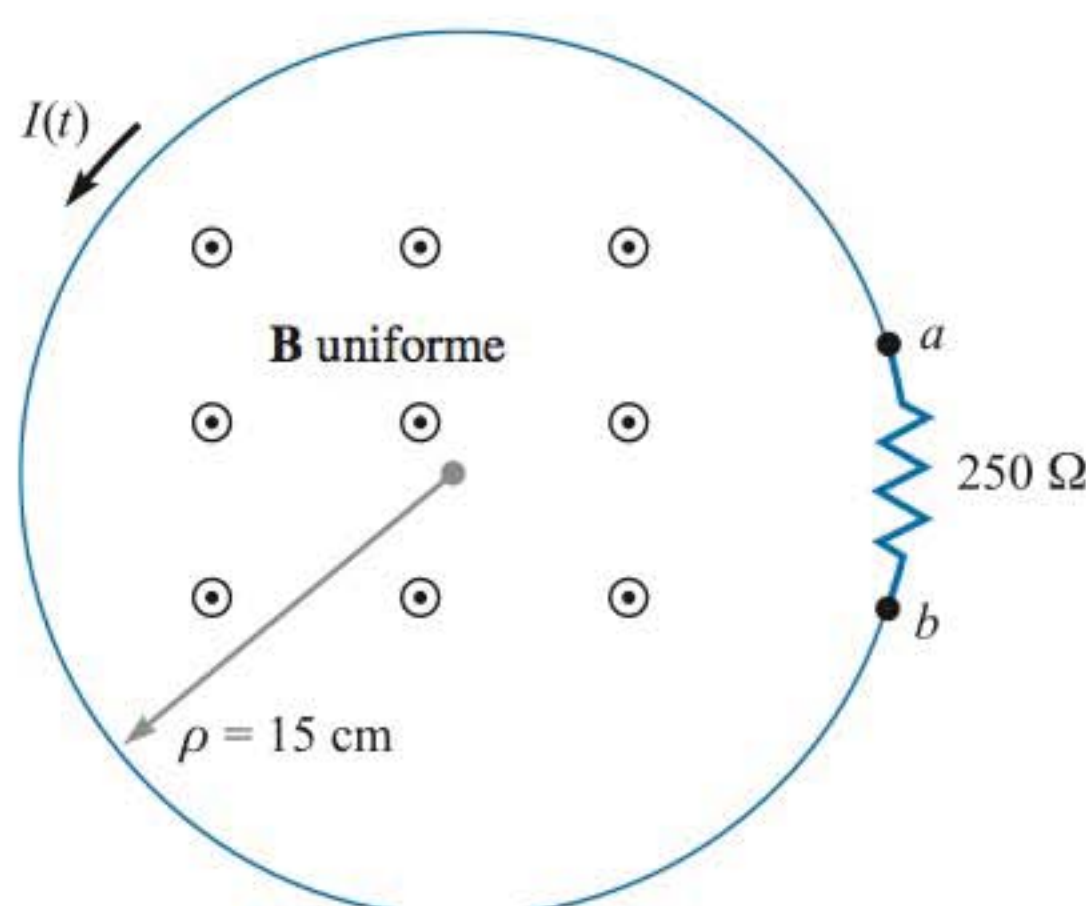



Figura 9.4 Ver Problema 9.1.

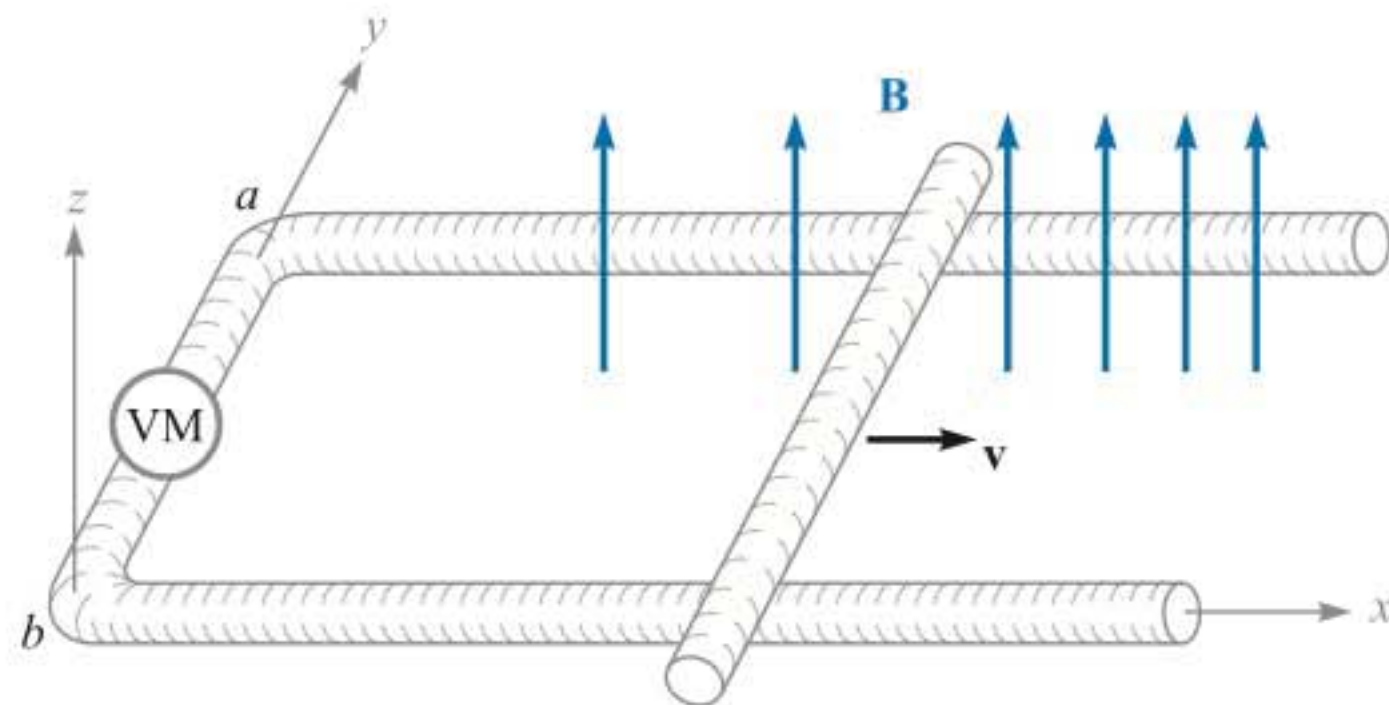



Figura 9.5 Ver Problema 9.5.

extremidade à esquerda, com a extremidade à direita aberta; (*b*) um resistor de 0,3 Ω estiver presente em cada extremidade.

9.8 Um filamento de condutor perfeito tem o formato de um anel circular de raio a. Em um ponto, uma resistência R é inserida no circuito, e em outro, uma bateria de tensão V_0. Considere que a corrente no anel produza um campo magnético desprezível. (*a*) Aplique a lei de Faraday vista na Equação (4), avaliando cada lado da equação de forma cuidadosa e independente, para mostrar a igualdade dos resultados; (*b*) repita a parte a, supondo que: a bateria é removida, o anel é novamente fechado e um campo **B** crescente de forma linear é aplicado em uma direção normal à superfície do anel.

9.9 Uma espira filamentar quadrada de fio possui 25 cm de lado e tem uma resistência de 125 Ω por metro de comprimento. A espira pertence ao plano $z = 0$ com seus vértices em (0, 0, 0), (0,25, 0, 0), (0,25, 0,25, 0) e (0, 0,25, 0) em $t = 0$. A espira está se movendo com uma velocidade $v_y = 50$ m/s no campo $B_z = 8 \cos(1{,}5 \times 10^8 t - 0{,}5x)$ μT. Encontre uma função do tempo que expresse a perda ôhmica (potência dissipada) que é entregue à espira.

9.10 (*a*) Mostre que a razão entre as amplitudes da densidade de corrente de condução e da densidade de corrente de deslocamento é $\sigma/\omega\epsilon$ para o campo aplicado $E = E_m \cos \omega t$. Considere $\mu = \mu_0$. (*b*) Qual é a razão entre as amplitudes se o campo aplicado for $E = E_m e^{-t/\tau}$, onde τ é real?

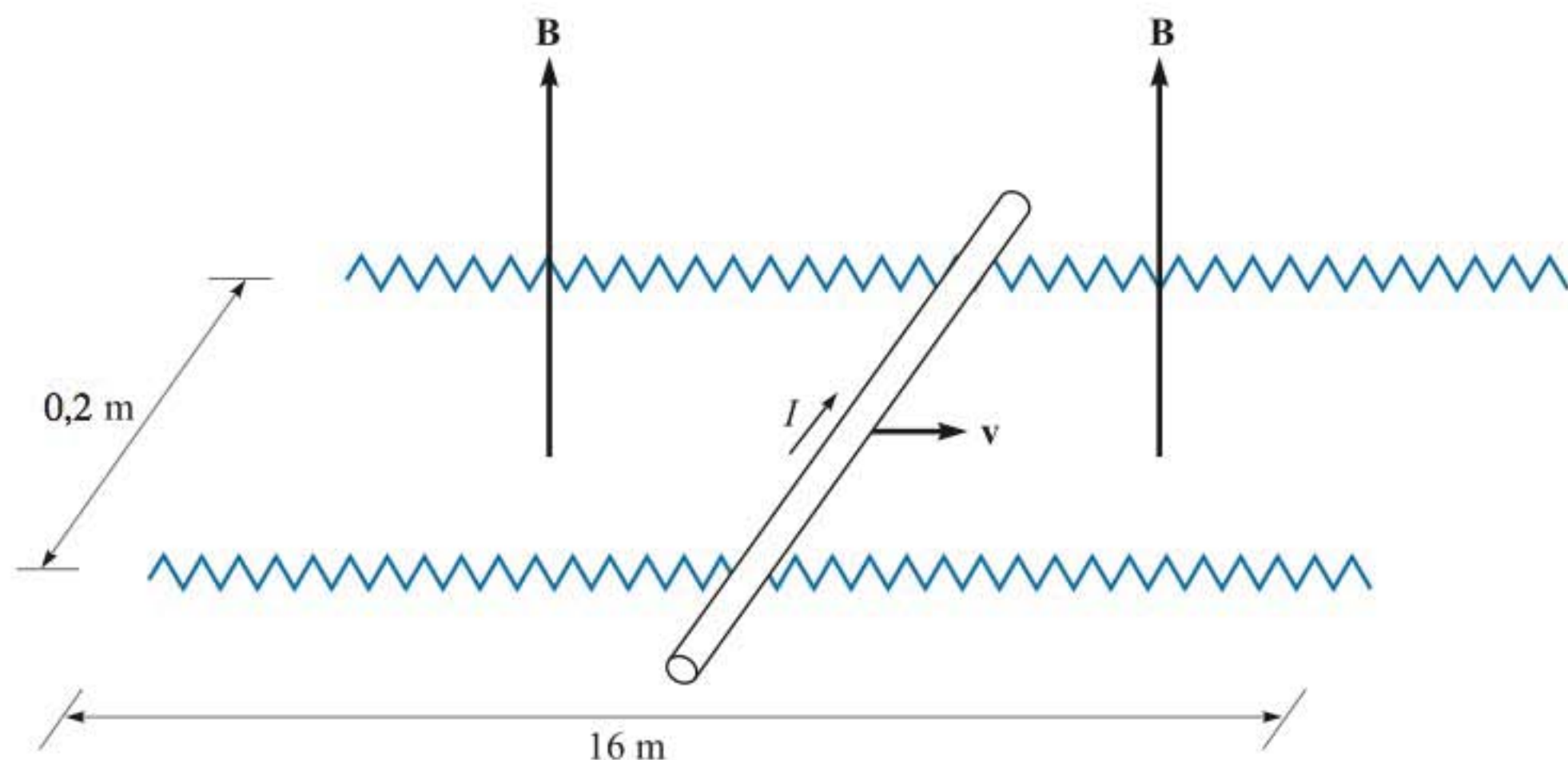



Figura 9.6 Ver Problema 9.7.

9.11 Sejam as dimensões internas de um capacitor coaxial $a = 1{,}2$ cm, $b = 4$ cm, e $l = 40$ cm. O material homogêneo dentro do capacitor possui os parâmetros $\epsilon = 10^{-11}$ F/m, $\mu = 10^{-5}$ H/m e $\sigma = 10^{-5}$ S/m. Se a intensidade de campo elétrico é $\mathbf{E} = (10^6/\rho) \cos 10^5 t\, \mathbf{a}_\rho$ V/m, calcule: (*a*) $\mathbf{J}$; (*b*) a corrente de condução total I_c pelo capacitor; (*c*) a corrente de deslocamento total I_d pelo capacitor; (*d*) a razão entre as amplitudes de I_d e de I_c, o fator de qualidade do capacitor.

9.12 Determine a densidade de corrente de deslocamento associada com o campo magnético $\mathbf{H} = A_1 \text{ sen } (4x) \cos (\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x + A_2 \cos (4x) \text{ sen } (\omega t - \beta z)\mathbf{a}_z$. Considere $\mathbf{J} = \mathbf{0}$.

9.13 Considere a região definida por $|x|$, $|y|$ e $|z| < 1$. Seja $\epsilon_r = 5$, $\mu_r = 4$ e $\sigma = 0$. Se $J_d = 20 \cos (1{,}5 \times 10^8 t - bx)\mathbf{a}_y$ μA/m^2: (*a*) Calcule $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$; (*b*) use a forma pontual da lei de Faraday e uma integração com relação ao tempo para encontrar $\mathbf{B}$ e $\mathbf{H}$; (*c*) use $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_d + \mathbf{J}$ para encontrar $\mathbf{J}_d$. (*d*) Qual é o valor numérico de b?

9.14 Uma fonte de tensão V_0 sen ωt é conectada entre duas esferas condutoras concêntricas, $r = a$ e $r = b$, $b > a$, e a região entre essas esferas é um material para o qual $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$ e $= 0$. Calcule a corrente de deslocamento total pelo dielétrico e compare-a com a corrente da fonte determinada pela capacitância (Seção 6.3) e pelos métodos de análise de circuitos.

9.15 Seja $\mu = 3 \times 10^{-5}$ H/m, $\epsilon = 1{,}2 \times 10^{-10}$ F/m e $\sigma = 0$ em todos os pontos. Se $\mathbf{H} = 2 \cos (10^{10} t - \beta x)\mathbf{a}_z$ A/m, use as equações de Maxwell para obter expressões para $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ e β.

9.16 Deduza a equação da continuidade a partir das equações de Maxwell.

9.17 A intensidade de campo elétrico na região $0 < x < 5$, $0 < y < \pi/12$, $0 < z < 0{,}06$ m, no espaço livre, é dada por $\mathbf{E} = C \text{ sen } 12y \text{ sen } az \cos 2 \times 10^{10} t\, \mathbf{a}_x$ V/m. Começando pela relação $\nabla \times \mathbf{E}$, use as equações de Maxwell para encontrar um valor numérico para a, sabendo-se que a é maior que zero.

9.18 A linha de transmissão de placas paralelas mostrada na Figura 9.7 possui dimensões $b = 4$ cm e $d = 8$ mm, enquanto o meio entre as placas é caracterizado por $\mu_r = 1$, $\epsilon_r = 20$ e $\sigma = 0$. Despreze os campos fora do dielétrico. Dado o campo $\mathbf{H} = 5 \cos (10^9 t - \beta z)\mathbf{a}_y$ A/m, use as equações de

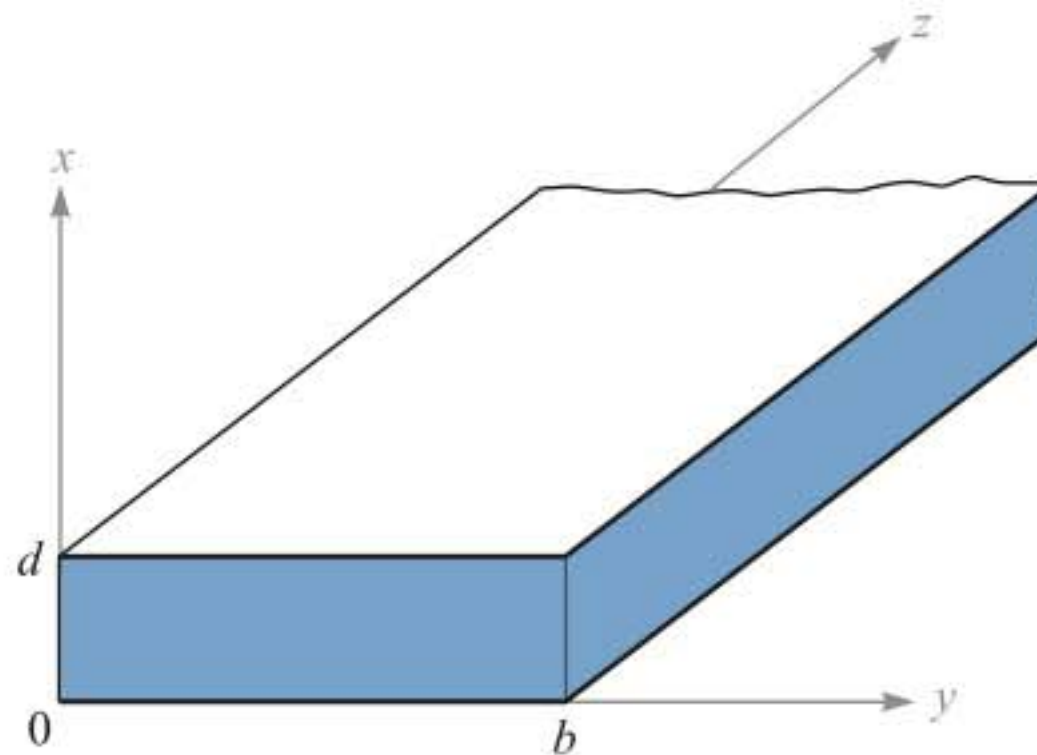



Figura 9.7 Ver Problema 9.18.

Maxwell para auxiliar a encontrar: (*a*) β, se $\beta > 0$; (*b*) a densidade de corrente de deslocamento em $z = 0$; (*c*) a corrente de deslocamento total que atravessa a superfície $x = 0{,}5d$, $0 < y < b$, $0 < z < 0{,}1$ m na direção e sentido $\mathbf{a}_x$.

9.19 Na Seção 9.1, a lei de Faraday foi utilizada para mostrar que o campo $\mathbf{E} = -\frac{1}{2} kB_0 e^{kt} \rho \mathbf{a}_\phi$ resulta do campo magnético variável $\mathbf{B} = B_0 e^{kt} \mathbf{a}_z$. (*a*) Mostre que esses campos não satisfazem a outra equação de Maxwell para o rotacional. (*b*) Se considerarmos $B_0 = 1$ T e $k = 10^6\ s^{-1}$, estabelecemos uma densidade de fluxo magnético consideravelmente alta em 1 μs. Use a equação para o $\nabla \times \mathbf{H}$ para mostrar que a taxa na qual B_z deveria variar com ρ (mas não varia) é de somente 5×10^{-6} T (aproximadamente) por metro no espaço livre em $t = 0$.

9.20 Considere as equações de Maxwell na forma pontual, suponha que todos os campos variam da forma e^{st} e escreva as equações sem envolver explicitamente o tempo.

9.21 (*a*) Mostre que sob condições de campo estático a Equação (55) se reduz à lei circuital de Ampère. (*b*) Verifique que a Equação (51) se torna a lei de Faraday quando tomamos seu rotacional.

9.22 Em um meio desprovido de fontes, onde $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ e $\rho_v = 0$, considere um sistema de coordenadas cartesianas no qual **E** e **H** são funções somente de z e t. O meio tem permissividade ϵ e permeabilidade μ. (*a*) Se $\mathbf{E} = E_x \mathbf{a}_x$ e $\mathbf{H} = H_y \mathbf{a}_y$, comece pelas equações de Maxwell e determine a equação diferencial parcial de segunda ordem que E_x deve satisfazer. (*b*) Mostre que $E_x = E_0 \cos(\omega t - \beta z)$ é uma solução daquela equação para um valor particular de β. (*c*) Calcule β como função dos parâmetros dados.

9.23 Na região 1, $z < 0$, $\epsilon_1 = 2 \times 10^{-11}$ F/m, $\mu_1 = 2 \times 10^{-6}$ H/m e $\sigma_1 = 4 \times 10^{-3}$ S/m. Na região 2, $z > 0$, $\epsilon_2 = \epsilon_1/2$, $\mu_2 = 2\mu_1$ e $\sigma_2 = \sigma_1/4$. É sabido que $\mathbf{E}_1 = (30\mathbf{a}_x + 20\mathbf{a}_y + 10\mathbf{a}_z) \cos 10^9 t$ V/m em $P_1(0, 0, 0^-)$. (*a*) Encontre $\mathbf{E}_{N1}$, $\mathbf{E}_{t1}$, $\mathbf{D}_{N1}$ e $\mathbf{D}_{t1}$ em P_1. (*b*) Calcule $\mathbf{J}_{N1}$ e $\mathbf{J}_{t1}$ em P_1. (*c*) Calcule $\mathbf{E}_{t2}$, $\mathbf{D}_{t2}$ e $\mathbf{J}_{t2}$ em $P_2(0, 0, 0^+)$. (*d*) (Mais difícil) Use a equação da continuidade para ajudar a mostrar que $J_{N1} - J_{N2} = \partial D_{N2}/\partial t - \partial D_{N1}/\partial t$, e então determine $\mathbf{D}_{N2}$, $\mathbf{J}_{N2}$ e $\mathbf{E}_{N2}$.

9.24 Um potencial vetor é dado como $\mathbf{A} = A_0 \cos(\omega t - kz)\mathbf{a}_y$. (*a*) Considerando o maior número possível de componentes como iguais a zero, encontre **H**, **E** e V. (*b*) Especifique k expressando-o por A_0, ω e as constantes do meio sem perdas, ϵ e μ.

9.25 Em uma região onde $\mu_r = \epsilon_r = 1$ e $\sigma = 0$, os potenciais retardados são dados por $V = x(z - ct)$ V e $\mathbf{A} = x\left(\frac{z}{c} - t\right)\mathbf{a}_z$ Wb/m, onde $c = 1/[(\mu_0\epsilon_0)^{1/2}]$. (*a*) Mostre que $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t}$. (*b*) Calcule **B**, **H**, **E** e **D**. (*c*) Mostre que esses resultados satisfazem as equações de Maxwell se **J** e ρ_v são zero.

9.26 Escreva as equações de Maxwell, na forma pontual, considerando **E** e **H** para um meio sem fontes, onde **J** e ρ_v são iguais a zero. Substitua ϵ por μ, μ por ϵ, **E** por **H** e **H** por –**E**, e mostre que as equações não são alteradas. Esta é uma expressão mais geral do *princípio da dualidade* em teoria de circuito.

10

Linhas de Transmissão

As linhas de transmissão são utilizadas para transmitir energia e sinais elétricos de um ponto para outro; mais especificamente, de uma fonte para uma carga. Exemplos incluem a conexão entre um transmissor e uma antena, conexões entre computadores em uma rede ou conexões entre uma usina hidrelétrica e uma subestação a várias centenas de quilômetros de distância. Outros exemplos familiares incluem a interconexão entre componentes em um sistema estéreo e a conexão entre um provedor de serviços a cabo e seu televisor. Exemplos menos familiares incluem as conexões entre dispositivos em uma placa de circuito impresso, os quais foram projetados para operar em alta frequência.

O que todos esses exemplos têm em comum é a distância pela qual os elementos a serem interconectados estão separados, geralmente da ordem de um comprimento de onda ou até muito mais – enquanto nos métodos de análise de circuitos básicos, o comprimento das conexões entre elementos é considerado desprezível. Essa última condição nos permitiu, por exemplo, tomar como verdadeiro que a tensão sobre um resistor de um lado do circuito estava exatamente em fase com a fonte de tensão do outro lado – ou, mais genericamente, que o tempo medido junto à fonte é precisamente o mesmo tempo medido em todos os outros pontos no circuito. Quando as distâncias são suficientemente grandes entre a fonte e o receptor*, o efeito de atraso no tempo se torna apreciável, o que leva a diferenças de fase induzidas por atraso. Resumindo, lidamos com o *fenômeno de ondas* em linhas de transmissão, da mesma maneira que lidamos com a propagação da energia de ponto a ponto no espaço livre ou nos dielétricos.

Os elementos básicos em um circuito, tais como resistores, capacitores, indutores e as conexões entre eles, são considerados elementos *concentrados* se o atraso de tempo na propagação pelos elementos for desprezível. Por outro lado, se os elementos ou interconexões são grandes o suficiente, pode ser necessário considerá-los elementos *distribuídos*. Isso significa que suas características resistivas, capacitivas e indutivas devem ser avaliadas em uma base de valor por unidade de distância. As linhas de transmissão, de uma forma geral, possuem essa propriedade e, assim, se transformam em elementos de circuitos distribuídos ao longo de sua extensão, os quais possuem impedâncias que contribuirão para o problema. A regra básica é

* N. de T.: Em alguns casos, os termos *fonte* e *transmissor* são utilizados como sinônimos, bem como *carga* e *receptor*.

considerar os elementos como distribuídos caso o atraso de tempo* ao longo das dimensões do elemento for da ordem do intervalo de tempo de interesse mais curto. No caso de variação harmônica no tempo, essa condição levaria a uma diferença de fase mensurável entre cada extremidade do dispositivo em questão.

Neste capítulo, investigamos o fenômeno de ondas em linhas de transmissão. Nossos objetivos incluem: (1) entender como tratar as linhas de transmissão como elementos de circuito que possuem impedâncias complexas, as quais são funções do comprimento da linha e da frequência, (2) entender a propagação de ondas em linhas de transmissão, incluindo os casos em que podem ocorrer perdas, (3) aprender métodos para combinar linhas de transmissão diferentes para se alcançar um objetivo desejado e (4) entender os fenômenos transientes** em linhas. ■

10.1 DESCRIÇÃO FÍSICA DA PROPAGAÇÃO EM LINHAS DE TRANSMISSÃO

Para se obter um primeiro entendimento sobre como se dá a propagação das ondas em linhas de transmissão, a seguinte demonstração pode ser útil. Considere uma linha *sem perdas*, conforme mostrado na Figura 10.1. *Sem perdas* significa que, no devido tempo, toda a potência injetada na linha na extremidade inicial chega em sua extremidade final. Uma bateria que possui tensão V_0 é conectada ao início da linha mediante o fechamento da chave S_1 no tempo $t = 0$. Quando a chave é fechada, o efeito é lançar uma tensão, $V^+ = V_0$. Essa tensão não aparece instantaneamente em todos os pontos da linha, mas começa a viajar da bateria em direção ao resistor de carga R, em certa velocidade. A *frente de onda*, indicada pela linha vertical pontilhada na Figura 10.1, representa a fronteira instantânea entre a seção da linha que já foi carregada de V_0 e a seção restante que está ainda para ser carregada. Ela também representa a fronteira entre a seção da linha pela qual está circulando a corrente de carga I^+ e a seção restante pela qual não circula corrente. A corrente e a tensão são descontínuas na frente de onda.

À medida que a linha se carrega, a frente de onda se move da esquerda para a direita com uma velocidade v, a ser determinada. Quando atinge a extremidade remota, uma fração ou a totalidade das ondas de tensão e corrente reflete, dependendo do

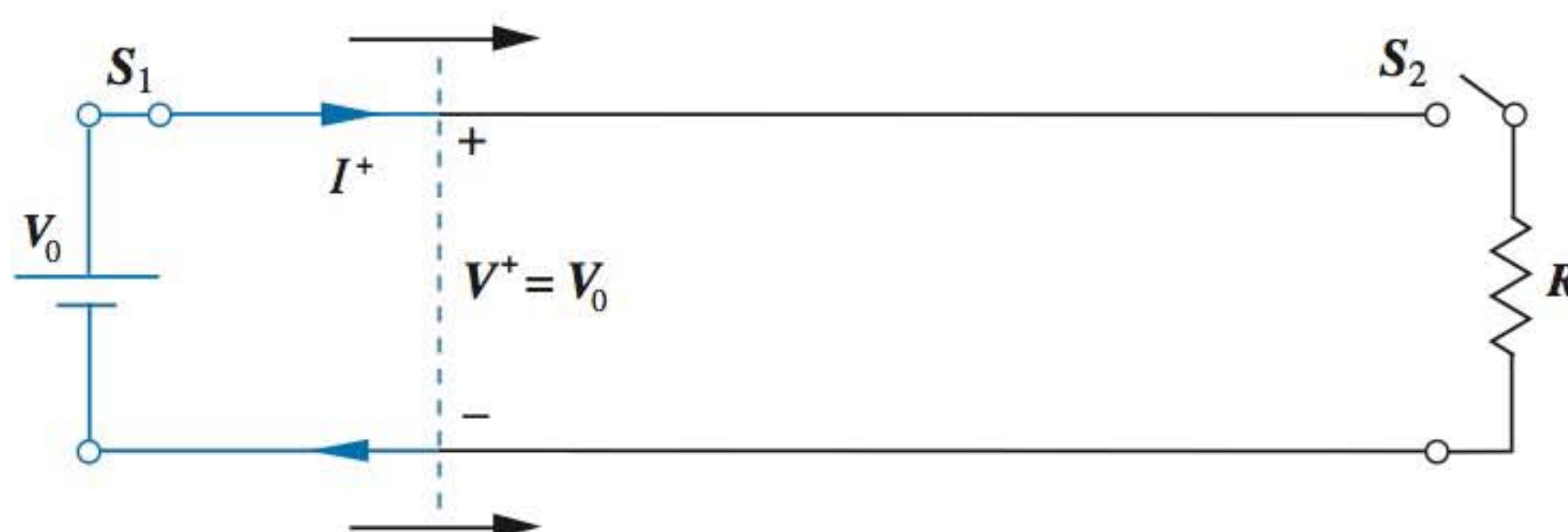



Figura 10.1 Circuito de uma linha de transmissão básica, mostrando ondas de tensão e corrente iniciadas pelo fechamento da chave S_1.

* N. de T.: Atraso de tempo associado ao fenômeno de propagação de ondas eletromagnéticas.

** N. de T.: Ou fenômenos transitórios.

tipo de carga que está conectada à linha. Por exemplo, se o resistor na extremidade remota é deixado desconectado (chave S_2 aberta), toda a frente de onda da tensão refletirá, e caso o resistor esteja conectado, alguma fração da tensão incidente refletirá. Os detalhes do fenômeno de reflexão serão tratados na Seção 10.9. O que interessa, no momento, são os fatores que determinam a velocidade da onda. O caminho para entender e quantificar isso é notar que a linha de transmissão condutora possuirá capacitância e indutância, as quais são expressas em uma base de valor por unidade de comprimento. Já derivamos expressões para esses parâmetros, calculados nos Capítulos 6 e 8, para algumas geometrias de linhas de transmissão. Conhecendo essas características das linhas, podemos construir um modelo para a linha de transmissão usando capacitores e indutores concentrados, conforme mostrado na Figura 10.2. A rede em forma de escada assim formada é chamada de *rede formadora de pulsos*, por razões que em breve ficarão claras.[1]

Considere agora o que acontece quando conectamos a mesma fonte de tensão com chave à rede. Referindo-se à Figura 10.2, com o fechamento da chave junto à bateria a corrente começa a aumentar em L_1, permitindo que C_1 se carregue. À medida que C_1 se aproxima da carga máxima, a corrente em L_2 começa a aumentar, permitindo que C_2 se carregue em seguida. Esse processo progressivo de carregamento continua ao longo da rede, até que todos os três capacitores estejam completamente carregados. Na rede, uma localização para "frente de onda" pode ser identificada como o ponto entre dois capacitores adjacentes que exibir a maior diferença entre seus níveis de carregamento. À medida que o processo de carregamento continua, a frente de onda se desloca da esquerda para a direita. Sua velocidade depende de quão rápido cada indutor consegue alcançar seu estado de corrente máxima e, simultaneamente, do quão rápido cada capacitor é capaz de se carregar até o máximo de tensão. A onda é mais rápida se os valores de L_i e C_i são menores. Com isso, esperamos que a velocidade da onda seja inversamente proporcional a uma função que envolva o produto da indutância pela capacitância. Na linha de transmissão sem perdas, tem-se (conforme será mostrado) que a velocidade da onda é dada por $\nu = 1/\sqrt{LC}$, onde L e C são especificados por unidade de comprimento.

Um comportamento similar é visto na linha e na rede quando uma das duas está *inicialmente carregada*. Nesse caso, a bateria permanece conectada, e um resistor pode ser conectado (por uma chave) na extremidade de saída, conforme mostrado na Figura 10.2. No caso da rede em escada, o capacitor mais próximo da extremidade com a carga (C_3) descarregará pelo resistor primeiramente, seguido do próximo

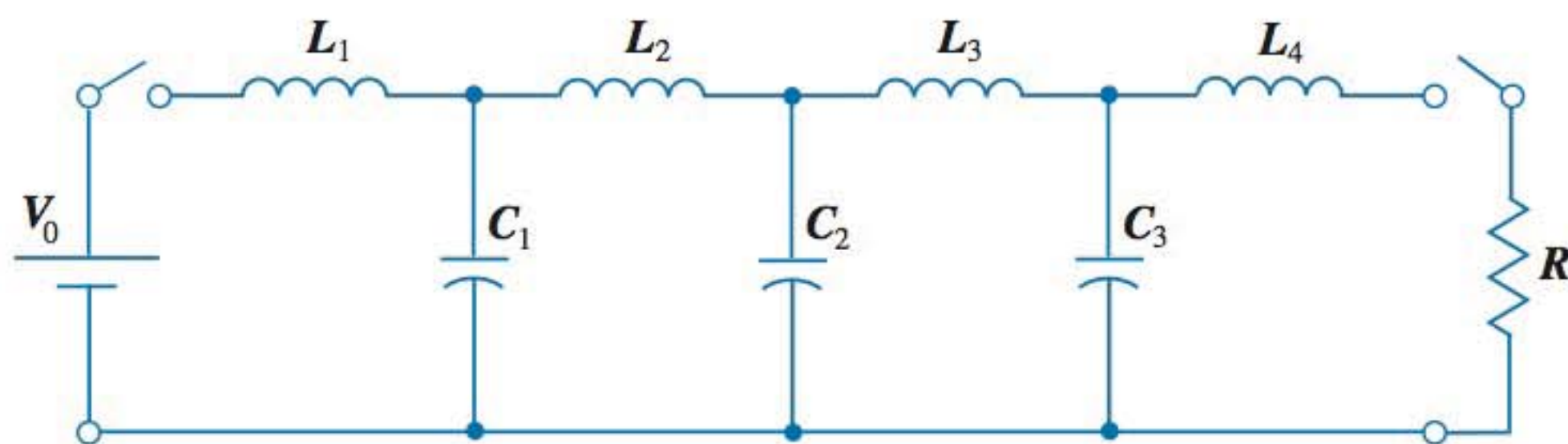



Figura 10.2 Modelo de elementos concentrados para linha de transmissão. Todos os valores de indutância são iguais, assim como todos os valores de capacitância.

[1] Projetos e aplicações de redes formadoras de pulsos são discutidos na Referência 1.

capacitor mais perto, e assim por diante. Quando a rede estiver completamente descarregada, um pulso de tensão terá sido formado sobre o resistor, e aí entendemos porque essa configuração em escada é chamada de rede de formação de pulsos. Um comportamento essencialmente idêntico é visto em uma linha de transmissão carregada quando se conecta um resistor entre condutores na extremidade de saída. Os exercícios sobre tensão chaveada, conforme utilizado nessas discussões, são exemplos de problemas de transientes em linhas de transmissão. Os transientes serão tratados em detalhes na Seção 10.14. No princípio, as respostas das linhas a sinais senoidais são enfatizadas.

Finalmente, supomos que a existência de tensão e corrente através e entre os condutores da linha de transmissão implica a existência de campos elétricos e magnéticos no espaço em volta dos condutores*. Consequentemente, temos duas abordagens possíveis para a análise de linhas de transmissão: (1) Podemos resolver as equações de Maxwell sujeitas à configuração da linha para obter os campos, e com esses encontrar as expressões genéricas para a potência, a velocidade e outros parâmetros de interesse da onda; (2) ou podemos (por agora) evitar os campos e encontrar as tensões e correntes utilizando um modelo de circuito apropriado. Essa última abordagem é a que utilizaremos nesse capítulo. A contribuição da teoria de campo é somente no cálculo inicial (e admitido) dos parâmetros indutância e capacitância. Descobriremos, contudo, que modelos de circuito se tornam inconvenientes ou inúteis quando as perdas em linhas de transmissão são completamente caracterizadas, ou quando analisamos comportamentos de onda mais complicados (isto é, modos) que podem ocorrer para frequências altas. A questão das perdas será abordada na Seção 10.5. Fenômenos de modos serão considerados no Capítulo 13.

10.2 EQUAÇÕES DAS LINHAS DE TRANSMISSÃO

Nosso primeiro objetivo é obter as equações diferenciais, conhecidas como *equações de onda*, as quais a tensão ou a corrente devem satisfazer em uma linha de transmissão uniforme. Para fazer isso, iremos construir um modelo de circuito para um comprimento incremental de linha e escrever duas equações de circuitos, utilizando-as para obter as equações de onda.

Nosso modelo de circuito contém as *constantes primárias* da linha de transmissão. Elas incluem a indutância L e a capacitância C, assim como a condutância em paralelo G e a resistência em série R – todas possuem valores que são especificados *por unidade de comprimento*. A condutância em paralelo é utilizada para modelar a corrente de fuga que pode ocorrer ao longo do comprimento da linha pelo dielétrico. A suposição é a de que o dielétrico pode possuir uma condutividade σ_d, em adição à constante dielétrica ϵ_r, notando que a última afeta a capacitância. A resistência em série está associada com qualquer condutividade finita σ_c nos condutores. Qualquer um dos últimos parâmetros, R e G, serão responsáveis por perdas de potência na transmissão. Em geral, ambos são funções da frequência. Conhecendo-se a frequência e as dimensões, podemos determinar os valores de R, G, L e C utilizando fórmulas desenvolvidas nos capítulos anteriores.

* N. de T.: É de se esperar que esses campos estejam associados com a tensão e com a corrente.

Consideramos propagação na direção $\mathbf{a}_z$. Nosso modelo consiste em uma seção de linha de comprimento Δz contendo resistência $R\Delta z$, indutância $L\Delta z$, condutância $G\Delta z$ e capacitância $C\Delta z$, conforme indicado na Figura 10.3. Como a seção da linha parece a mesma em ambas as extremidades, dividimos os elementos em série na metade para produzir uma rede simétrica. Poderíamos igualmente ter colocado metade da condutância e metade da capacitância em cada extremidade.

Nosso objetivo é determinar como e com qual intensidade a tensão e a corrente de saída são modificadas em relação a seus valores de entrada, no limite quando o comprimento se aproxima de um valor muito pequeno. Obteremos, assim, um par de equações diferenciais que descrevem as taxas de variação da tensão e da corrente em relação a z. Na Figura 10.3, as tensões e correntes de entrada e de saída diferem, respectivamente, das quantidades ΔV e ΔI, que devem ser determinadas. As duas equações são obtidas pela aplicação sucessiva da lei das tensões de Kirchhoff (LTK) e da lei das correntes de Kirchhoff (LCK).

Em primeiro lugar, a LTK é aplicada ao caminho fechado, que abrange o comprimento inteiro da seção, conforme mostrado na Figura 10.3:

$$V = \frac{1}{2}RI\Delta z + \frac{1}{2}L\frac{\partial I}{\partial t}\Delta z + \frac{1}{2}L\left(\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial \Delta I}{\partial t}\right)\Delta z + \frac{1}{2}R(I + \Delta I)\Delta z + (V + \Delta V) \tag{1}$$

Podemos resolver a Equação (1) para a razão $\Delta V/\Delta z$, obtendo:

$$\frac{\Delta V}{\Delta z} = -\left(RI + L\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{2}L\frac{\partial \Delta I}{\partial t} + \frac{1}{2}R\Delta I\right) \tag{2}$$

Em seguida, escrevemos:

$$\Delta I = \frac{\partial I}{\partial z}\Delta z \qquad \text{e} \qquad \Delta V = \frac{\partial V}{\partial z}\Delta z \tag{3}$$

que são, então, substituídas na Equação (2) para resultar em

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\left(1 + \frac{\Delta z}{2}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(RI + L\frac{\partial I}{\partial t}\right) \tag{4}$$

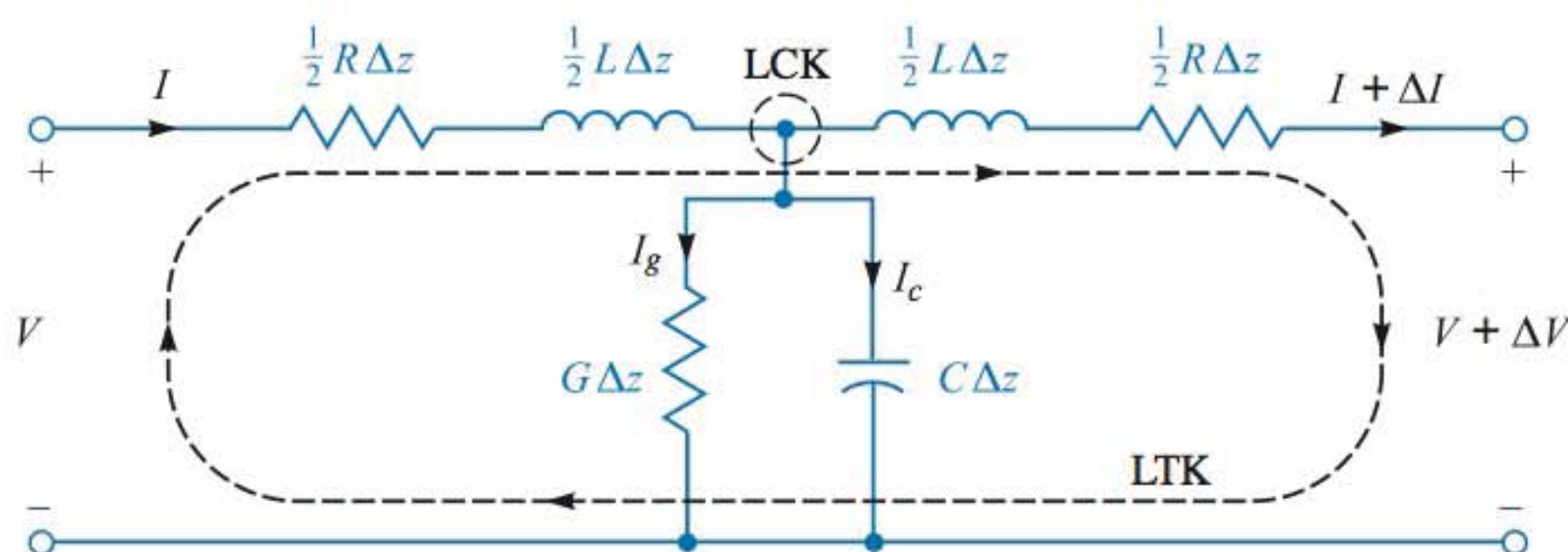



Figura 10.3 Modelo de elementos concentrados para uma seção curta de linha de transmissão com perdas. O comprimento da seção é Δz. A análise envolve a aplicação das leis de Kirchoff de tensões e de correntes (LTK e LCK) para o caminho fechado e o nó respectivamente.

Agora, no limite, à medida que Δz se aproxima de zero (ou de um valor pequeno o suficiente para ser desprezível), a Equação (4) se simplifica na forma final:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\left(RI + L\frac{\partial I}{\partial t}\right) \tag{5}$$

A Equação (5) é a primeira das duas equações que estamos procurando. Para encontrar a segunda equação, aplicamos a LCK para o nó central superior no circuito da Figura 10.3, notando a partir da simetria que a tensão no nó será $V + \Delta V/2$:

$$I = I_g + I_c + (I + \Delta I) = G\Delta z\left(V + \frac{\Delta V}{2}\right) + C\Delta z\frac{\partial}{\partial t}\left(V + \frac{\Delta V}{2}\right) + (I + \Delta I) \tag{6}$$

Assim, utilizando a Equação (3) e simplificando, obtemos

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -\left(1 + \frac{\Delta z}{2}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(GV + C\frac{\partial V}{\partial t}\right) \tag{7}$$

Novamente, obtemos a forma final reduzindo Δz a um valor desprezível. O resultado é

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -\left(GV + C\frac{\partial V}{\partial t}\right) \tag{8}$$

As equações diferenciais acopladas (5) e (8) descrevem a evolução da corrente e da tensão em qualquer linha de transmissão. Historicamente, elas são chamadas de *equações telegráficas*. A solução das mesmas leva à equação de onda para a linha de transmissão, que vamos obter agora. Começaremos diferenciando a Equação (5) com relação a z e a Equação (8) com relação a t, obtendo:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -R\frac{\partial I}{\partial z} - L\frac{\partial^2 I}{\partial t \partial z} \tag{9}$$

e

$$\frac{\partial I}{\partial z \partial t} = -G\frac{\partial V}{\partial t} - C\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \tag{10}$$

Em seguida, iremos substituir as Equações (8) e (10) na Equação (9). Após rearranjar os termos, o resultado é:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = LC\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (LG + RC)\frac{\partial V}{\partial t} + RGV \tag{11}$$

Um procedimento análogo envolve a diferenciação da Equação (5) em relação a t e da Equação (8) com relação a z. Depois, a Equação (5) e sua derivada são substituídas na derivada da Equação (8) para se obter uma equação para a corrente que tem forma idêntica à Equação (11):

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = LC\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + (LG + RC)\frac{\partial I}{\partial t} + RGI \tag{12}$$

As Equações (11) e (12) são as *equações de onda gerais* para a linha de transmissão. A solução delas, sob várias condições, forma a maior parte de nosso estudo.

10.3 PROPAGAÇÃO SEM PERDAS

Propagação sem perdas significa que a potência não é dissipada ou, de alguma outra maneira, desviada à medida que a onda viaja ao longo da linha de transmissão. Toda a potência no terminal de entrada, em algum momento, alcança o terminal de saída. De forma mais realística, qualquer mecanismo que causaria a ocorrência de perdas possui efeito desprezível. No nosso modelo, a propagação sem perdas ocorre quando $R = G = 0$. Sob essas circunstâncias, permanece apenas o primeiro termo do lado direito tanto da Equação (11) como da Equação (12). A Equação (11), por exemplo, se torna

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = LC\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \tag{13}$$

Com relação à função para tensão que satisfará a Equação (13), é mais rápido simplesmente revelar a solução e então mostrar que ela é correta. A solução da Equação (13) possui a forma:

$$V(z, t) = f_1\left(t - \frac{z}{\nu}\right) + f_2\left(t + \frac{z}{\nu}\right) = V^+ + V^- \tag{14}$$

onde ν, a *velocidade da onda*, é uma constante. As expressões $(t \pm z/\nu)$ são os argumentos das funções f_1 e f_2. A identificação das funções propriamente ditas não é crucial para a solução da Equação (13). Com isso, f_1 e f_2 podem ser *quaisquer* funções.

Os argumentos de f_1 e f_2 indicam, respectivamente, um trânsito das funções nos sentidos progressivo e regressivo de z. Associamos os símbolos V^+ e V^- para identificar os componentes das ondas de tensão progressiva e regressiva, respectivamente. Para entender seu comportamento, considere, por exemplo, o valor de f_1 (qualquer que ele seja) com o valor zero de seu argumento, que ocorre quando $z = t = 0$. À medida que o tempo aumenta para valores positivos (conforme deveria) e se mantivermos nossa atenção em $f_1(0)$, veremos que o valor de z deve também aumentar para manter o argumento $(t - z/\nu)$ igual a zero. A função f_1, portanto, se move (ou propaga) no sentido positivo de z. Usando um raciocínio similar, a função f_2 propagará no sentido *negativo* de z, pois z no argumento $(t + z/\nu)$ deve *decrescer* para contrabalancear o aumento de t. Com isso, associamos o argumento $(t - z/\nu)$ com propagação *progressiva* em z, e o argumento $(t + z/\nu)$ com propagação *regressiva* em z. Esse comportamento ocorre independentemente do que f_1 e f_2 sejam. Conforme é evidente nas formas dos argumentos, a velocidade de propagação é ν em ambos os casos.

Em seguida, verificamos que funções que possuem formas para os argumentos como as expressas na Equação (14) são soluções da Equação (13). Em primeiro lugar,

tomamos as derivadas parciais de f_1 – aquelas relativas a z e t, por exemplo. Utilizando a regra da cadeia, a derivada parcial com relação a z é definida por:

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_1}{\partial(t - z/\nu)} \frac{\partial(t - z/\nu)}{\partial z} = -\frac{1}{\nu} f_1' \tag{15}$$

onde é aparente que a função marcada com uma linha, f_1', denota a derivada de f_1 com relação ao seu argumento. A derivada parcial com relação ao tempo é

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial(t - z/\nu)} \frac{\partial(t - z/\nu)}{\partial t} = f_1' \tag{16}$$

Em seguida, as derivadas parciais segundas, com relação a z e t, podem ser obtidas utilizando um raciocínio similar:

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} = \frac{1}{\nu^2} f_1'' \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} = f_1'' \tag{17}$$

onde f_1'' é a derivada segunda de f_1 com relação ao seu argumento. Os resultados obtidos nas duas Equações em (17) podem agora ser substituídos na Equação (13), obtendo-se

$$\frac{1}{\nu^2} f_1'' = LC f_1'' \tag{18}$$

Identificamos, agora, a velocidade da onda para a propagação sem perdas, que é a condição para igualdade da Equação (18):

$$\boxed{\nu = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \tag{19}$$

Fazendo o mesmo procedimento e utilizando f_2 (e seu argumento), tem-se a mesma expressão para ν.

A forma de ν, conforme expresso na Equação (19), confirma nossa expectativa original de que a velocidade da onda seria em alguma proporção inversa a L e C. O mesmo resultado será verdadeiro para a corrente, uma vez que a Equação (12) sob condições sem perdas levaria a uma solução de forma idêntica àquela da Equação (14), com velocidade dada pela Equação (19). O que ainda não é conhecido, entretanto, é a relação *entre* tensão e corrente.

Já descobrimos que a tensão e a corrente são relacionadas pelas Equações telegráficas (5) e (8). Essas, sob condições sem perdas ($R = G = 0$), se tornam

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial z} = -L \frac{\partial I}{\partial t}} \tag{20}$$

$$\boxed{\frac{\partial I}{\partial z} = -C \frac{\partial V}{\partial t}} \tag{21}$$

Utilizando a função para a tensão, podemos substituir a Equação (14) na Equação (20) e usar os métodos demonstrados na Equação (15) para escrever

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{1}{L} \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{L\nu}(f_1' - f_2') \tag{22}$$

Em seguida, integramos a Equação (22) no tempo, obtendo a corrente expressa pelos seus componentes de propagação progressiva e regressiva:

$$I(z,t) = \frac{1}{Lv}\left[f_1\left(t - \frac{z}{v}\right) - f_2\left(t + \frac{z}{v}\right)\right] = I^+ + I^- \tag{23}$$

Quando realizamos essas integrações, todas as constantes de integração são consideradas equivalentes a zero. Fazemos isso porque, conforme demonstrado pelas Equações (20) e (21), uma tensão variável no tempo deve levar a uma corrente também variável no tempo – e o inverso também é verdadeiro. O fator $1/Lv$ que aparece na Equação (23) multiplica a tensão para se obter a corrente, e dessa forma identificamos o produto Lv como a *impedância característica* Z_0 da linha sem perdas. Z_0 é definida como a razão da tensão pela corrente em uma onda única que se propaga. Utilizando a Equação (19), escrevemos a impedância característica como

$$Z_0 = Lv = \sqrt{\frac{L}{C}} \tag{24}$$

Verificando as Equações (14) e (23), notamos agora que

$$V^+ = Z_0 I^+ \tag{25a}$$

e

$$V^- = -Z_0 I^- \tag{25b}$$

O significado das relações anteriores pode ser melhor visualizado na Figura 10.4. A figura mostra ondas de tensão progressiva e regressiva se propagando, V^+ e V^-, sendo que ambas possuem polaridade positiva. As correntes que estão associadas a essas tensões circularão em sentidos opostos. Definimos *corrente positiva* pelo seu *sentido horário* de circulação na linha, e *corrente negativa* pela sua circulação *anti-horária*. O sinal de menos na Equação (25*b*), então, assegura que uma corrente negativa estará associada com a onda regressiva que se propaga, que possui polaridade positiva. Essa é uma convenção geral, que também se aplica a linhas com perdas. A propagação com perdas é estudada resolvendo-se a Equação (11) sob a condição de que R ou

V^+ V^- I^+ I^- Z_0 + + − −

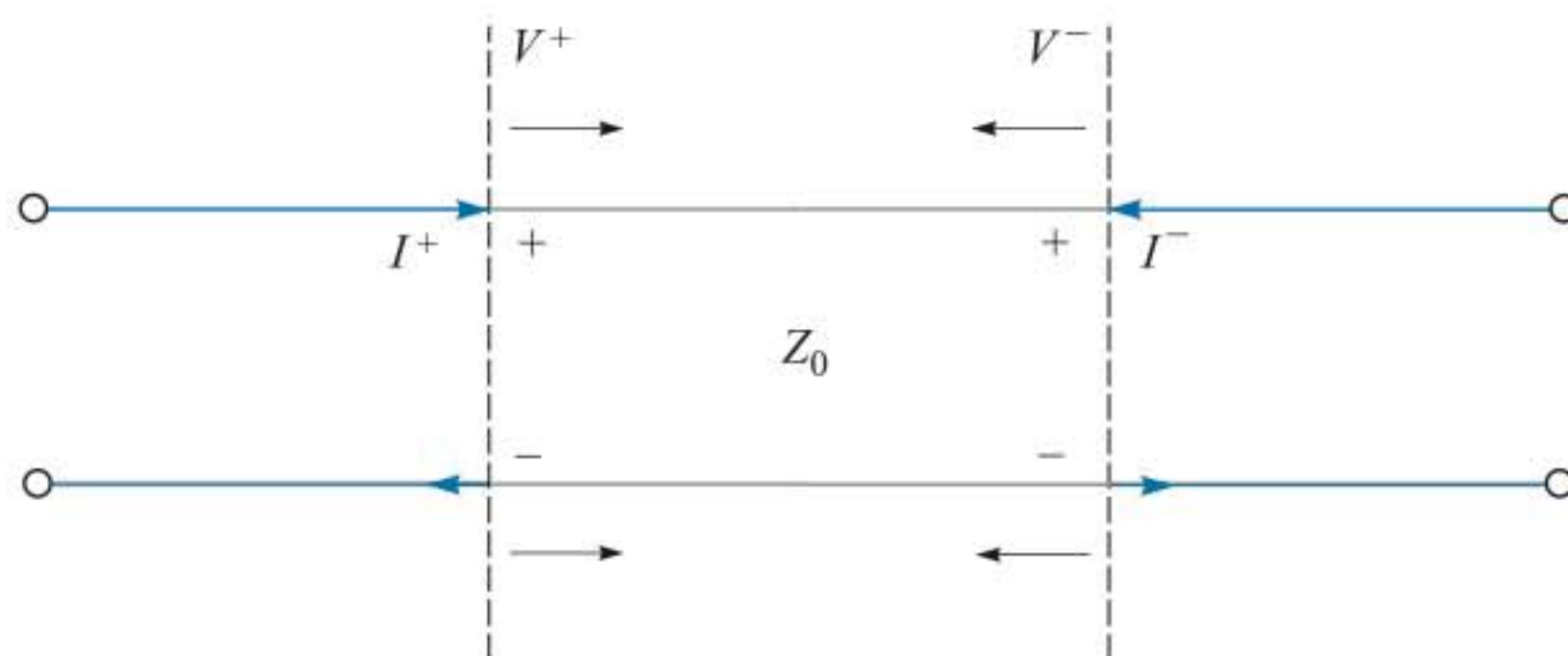



Figura 10.4 Sentidos das correntes em ondas que possuem polaridade positiva de tensão.

G (ou ambos) não sejam zero. Faremos isso na Seção 10.7, para o caso especial de tensões e correntes senoidais. Senoides em linhas de transmissão sem perdas são consideradas na Seção 10.4.

10.4 PROPAGAÇÃO SEM PERDAS DE TENSÕES SENOIDAIS

Estudar as ondas senoidais em linhas de transmissão é importante porque qualquer sinal transmitido pode ser decomposto, na prática, em um somatório discreto e contínuo de senoides. Essa é a base da análise no *domínio da frequência* de sinais em linhas. Nesses estudos, o efeito da linha de transmissão em qualquer sinal pode ser determinado notando-se os efeitos nos componentes de frequência. Isso significa que se pode efetivamente propagar o espectro de um dado sinal utilizando-se parâmetros de linha dependentes da frequência, e então remontar os componentes de frequência no sinal resultante no domínio do tempo. Nosso objetivo, nesta seção, é obter um entendimento da propagação senoidal e as implicações no comportamento do sinal para o caso da linha sem perdas.

Começaremos associando funções senoidais às funções para tensão na Equação (14). Especificamente, consideramos uma frequência específica, $f = \omega/2\pi$, e escrevemos $f_1 = f_2 = V_0 \cos(\omega t + \phi)$. Por convenção, a função cosseno é escolhida. O seno pode ser obtido, como sabemos, considerando $\phi = -\pi/2$. Em seguida, substituímos t por $(t \pm z/\nu_p)$, obtendo

$$\mathcal{V}(z,t) = |V_0| \cos[\omega(t \pm z/\nu_p) + \phi] = |V_0| \cos[\omega t \pm \beta z + \phi] \tag{26}$$

onde associamos uma nova notação à velocidade, que agora é chamada de *velocidade de fase*, ν_p*. Isso é aplicável a uma senoide pura (que possui uma frequência única), e dependerá da frequência em alguns casos, como será verificado. Considerando $\phi = 0$ por enquanto, obtemos as duas possibilidades de tráfego progressivo e regressivo em z escolhendo o sinal de menos ou de mais na Equação (26). Os dois casos são:

$$\boxed{\mathcal{V}_f(z,t) = |V_0| \cos(\omega t - \beta z)} \quad \text{(propagação progressiva em } z) \tag{27a}$$

e

$$\boxed{\mathcal{V}_b(z,t) = |V_0| \cos(\omega t + \beta z)} \quad \text{(propagação regressiva em } z) \tag{27b}$$

onde o fator de intensidade, $|V_0|$, é o valor de V em $z = 0$, $t = 0$. Definimos a *constante de defasamento* β, obtida da Equação (26), como

$$\boxed{\beta \equiv \frac{\omega}{\nu_p}} \tag{28}$$

Referimo-nos às soluções expressas nas Equações (27a) e (27b) como as formas *instantâneas reais* da tensão da linha de transmissão. Elas são as representações matemáticas do que seria experimentalmente medido. Os termos ωt e βz, que aparecem nessas

* N. de T.: O subscrito p refere-se ao termo em inglês *phase*.

equações, possuem unidades de ângulo e normalmente são expressos em radianos. Sabemos que ω é a frequência angular temporal que mede o deslocamento de fase *por unidade de tempo*, e que possui unidades de rad/s. De uma maneira similar, vemos que β será interpretado como uma frequência espacial, que no presente caso mede o deslocamento de fase *por unidade de distância* ao longo da direção z. Suas unidades são rad/m. Se fixássemos o tempo em $t = 0$, as Equações (27*a*) e (27*b*) se tornariam

$$\mathcal{V}_f(z, 0) = \mathcal{V}_b(z, 0) = |V_0| \cos(\beta z) \tag{29}$$

que identificamos como uma função periódica simples que se repete a cada distância λ incremental, conhecida como *comprimento de onda*. É necessário que $\beta\lambda = 2\pi$, e assim

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v_p}{f}} \tag{30}$$

Em seguida, consideramos um ponto (tal como a crista da onda) na função cosseno da Equação (27*a*), cuja ocorrência requer que o argumento do cosseno seja um inteiro múltiplo de 2π. Considerando a m-ésima crista da onda, a condição em $t = 0$ se torna

$$\beta z = 2m\pi$$

Para fixar a atenção nesse ponto na onda, necessitamos que todo o argumento do cosseno seja o mesmo múltiplo de 2π por todo o tempo. De acordo com a Equação (27*a*), a condição se torna

$$\omega t - \beta z = \omega(t - z/v_p) = 2m\pi \tag{31}$$

Novamente, com o aumento do tempo, a posição z deve também aumentar para que a Equação (31) seja satisfeita. Consequentemente, a crista da onda (e a onda inteira) viaja no sentido positivo de z na velocidade v_p. A Equação (27*b*), que tem o argumento ($\omega t + \beta z$) do cosseno, descreve uma onda que viaja no sentido *negativo* de z, pois à medida que o tempo aumenta, z deve *diminuir* para manter o argumento constante. Um comportamento similar é encontrado para a onda de corrente, mas complicações aparecem devido a defasamentos dependentes da linha que ocorrem entre a tensão e a corrente. Essas questões serão mais bem tratadas quando estivermos familiarizados com a análise complexa de sinais senoidais.

10.5 ANÁLISE COMPLEXA DE ONDAS SENOIDAIS

Expressar ondas senoidais como funções complexas é útil (e essencialmente indispensável) porque facilita grandemente o cálculo e a visualização da fase que se acumulará por meio de muitos mecanismos. Adicionalmente, encontraremos muitos casos nos quais duas ou mais ondas senoidais devem ser combinadas para formar uma onda resultante – uma tarefa que fica muito mais fácil se a análise complexa for utilizada.

A expressão de funções senoidais na forma complexa é baseada na identidade de Euler:

$$e^{\pm jx} = \cos(x) \pm j \,\text{sen}(x) \tag{32}$$

para a qual podemos escrever o cosseno e o seno, respectivamente, como as partes real e imaginária do expoente complexo:

$$\cos(x) = \text{Re}[e^{\pm jx}] = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx}) = \frac{1}{2}e^{jx} + c.c. \tag{33a}$$

$$\text{sen}(x) = \pm\text{Im}[e^{\pm jx}] = \frac{1}{2j}(e^{jx} - e^{-jx}) = \frac{1}{2j}e^{jx} + c.c. \tag{33b}$$

onde $j \equiv \sqrt{-1}$, e onde *c.c.* denota o complexo conjugado do termo anterior. O conjugado é formado mudando-se o sinal de *j* sempre que este aparecer na expressão complexa.

Podemos, em seguida, aplicar a Equação (33*a*) à nossa função para onda de tensão, a Equação (26):

$$\mathcal{V}(z,t) = |V_0|\cos[\omega t \pm \beta z + \phi] = \frac{1}{2}\underbrace{(|V_0|e^{j\phi})}_{V_0}e^{\pm j\beta z}e^{j\omega t} + c.c. \tag{34}$$

Note que organizamos as fases na Equação (34) de forma a identificar a *amplitude complexa* da onda como $V_0 = (|V_0|e^{j\phi})$. Daqui para a frente, um símbolo único (V_0 neste exemplo) será normalmente utilizado para as amplitudes de tensão ou corrente, frisando-se que elas serão geralmente complexas (possuindo amplitude e fase).

Duas definições adicionais seguem da Equação (34). Primeiro, definimos tensão *complexa instantânea* como:

$$\boxed{V_c(z,t) = V_0 e^{\pm j\beta z}e^{j\omega t}} \tag{35}$$

A tensão *fasorial** é formada retirando-se o fator $e^{j\omega t}$ da forma instantânea complexa:

$$\boxed{V_s(z) = V_0 e^{\pm j\beta z}} \tag{36}$$

A tensão fasorial pode ser definida caso tenhamos condições *senoidais de regime permanente* – o que significa que V_0 é independente do tempo. Na verdade, isso tem sido considerado o tempo todo, porque uma amplitude variável no tempo implicaria a existência de outros componentes de frequência no sinal sob estudo. Novamente, estamos tratando apenas com uma onda de uma única frequência. A tensão fasorial indica que estamos efetivamente deixando o tempo parado e observando a onda estacionária no espaço em $t = 0$. Os processos de cálculo de defasamentos entre várias posições na linha e de combinação de ondas múltiplas ficam muito mais simples na forma fasorial. Novamente, isso funciona apenas se todas as ondas sob consideração possuírem a mesma frequência. Com as definições nas Equações (35) e (36), a tensão instantânea real pode ser construída utilizando-se a Equação (34):

$$\mathcal{V}(z,t) = |V_0|\cos[\omega t \pm \beta z + \phi] = \text{Re}[V_c(z,t)] = \frac{1}{2}V_c + c.c. \tag{37a}$$

Ou, expressando pela tensão fasorial:

$$\boxed{\mathcal{V}(z,t) = |V_0|\cos[\omega t \pm \beta z + \phi] = \text{Re}[V_s(z)e^{j\omega t}] = \frac{1}{2}V_s(z)e^{j\omega t} + c.c.} \tag{37b}$$

* N. de T.: Também denominada "fasor de tensão".

Definindo em palavras, podemos obter a onda de tensão senoidal real multiplicando a tensão fasorial por $e^{j\omega t}$ (reincorporando a dependência com o tempo), e então tomar a parte real da expressão resultante. É imperativo que nos tornemos familiares com essas relações e com seus significados antes de prosseguirmos.

EXEMPLO 10.1

Duas ondas de tensão que possuem frequências e amplitudes iguais se propagam em sentidos opostos em uma linha de transmissão sem perdas. Determine a tensão total em função do tempo e da posição.

Solução. Uma vez que as ondas possuem a mesma frequência, podemos escrever a combinação das mesmas utilizando suas formas fasoriais. Considerando a constante de defasamento β e amplitude real V_0, as duas ondas de tensão se combinam desta maneira:

$$V_{sT}(z) = V_0 e^{-j\beta z} + V_0 e^{+j\beta z} = 2V_0 \cos(\beta z)$$

Na forma instantânea real, torna-se

$$\mathcal{V}(z, t) = \text{Re}[2V_0 \cos(\beta z) e^{j\omega t}] = 2V_0 \cos(\beta z) \cos(\omega t)$$

Reconhecemos isso como uma *onda estacionária*, na qual a amplitude varia com cos (βz) e oscila no tempo com cos (ωt). Os zeros na amplitude (nós) ocorrem em posições fixas, $z_n = (m\pi)/(2\beta)$, onde m é um inteiro ímpar. Estenderemos o conceito na Seção 10.10, onde exploraremos a *taxa de onda estacionária* como uma técnica de medição.

10.6 EQUAÇÕES DA LINHA DE TRANSMISSÃO E SUAS SOLUÇÕES NA FORMA FASORIAL

Aplicamos agora nossos resultados da seção anterior às equações da linha de transmissão, começando pela equação geral de onda, a Equação (11). Ela é reescrita conforme a Equação (38) a seguir, para a tensão instantânea real, $\mathcal{V}(z, t)$:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial z^2} = LC \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial t^2} + (LG + RC)\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + RG\mathcal{V} \tag{38}$$

Em seguida, substituímos $\mathcal{V}(z, t)$ pela expressão mostrada bem ao final da Equação (37*b*), notando que o termo conjugado complexo (*c.c.*) formará uma equação redundante separada. Também usamos o fato de que o operador $\partial/\partial t$, quando aplicado à forma complexa, é equivalente a se multiplicar por um fator $j\omega$. Após a substituição, e após todas as derivadas em relação ao tempo serem tomadas, o fator $e^{j\omega t}$ é retirado. Somos deixados com a equação de onda expressa pela tensão fasorial:

$$\frac{d^2 V_s}{dz^2} = -\omega^2 LCV_s + j\omega(LG + RC)V_s + RGV_s \tag{39}$$

Rearranjando os termos, temos a forma simplificada:

$$\frac{d^2V_s}{dz^2} = \underbrace{(R + j\omega L)}_{Z}\underbrace{(G + j\omega C)}_{Y} V_s = \gamma^2 V_s \tag{40}$$

onde Z e Y, como indicado, são, respectivamente, a *impedância série equivalente da rede* e a *admitância paralela equivalente da rede* na linha de transmissão – ambas medidas por unidade de distância. A *constante de propagação* na linha é definida como

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \sqrt{ZY} = \alpha + j\beta \tag{41}$$

O significado do termo será explicado na Seção 10.7. Para nossos propósitos imediatos, a solução da Equação (40) será

$$V_s(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{+\gamma z} \tag{42a}$$

A forma da equação de onda para a corrente será idêntica à Equação (40). Com isso esperamos que a corrente fasorial seja na forma

$$I_s(z) = I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{\gamma z} \tag{42b}$$

A relação entre as ondas de corrente e tensão é agora encontrada, como antes, pelas Equações telegráficas (5) e (8). De uma maneira consistente com a Equação (37*b*), escrevemos a corrente senoidal como

$$\mathcal{I}(z, t) = |I_0| \cos(\omega t \pm \beta z + \xi) = \frac{1}{2}\underbrace{(|I_0|e^{j\xi})}_{I_0} e^{\pm j\beta z} e^{j\omega t} + c.c. = \frac{1}{2} I_s(z) e^{j\omega t} + c.c. \tag{43}$$

Substituindo as expressões mais à direita das Equações (37*b*) e (43) nas Equações (5) e (8), estas últimas equações se transformam da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} = -\left(R\mathcal{I} + L\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial t}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{dV_s}{dz} = -(R + j\omega L)I_s = -ZI_s \tag{44a}$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial z} = -\left(G\mathcal{V} + C\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{dI_s}{dz} = -(G + j\omega C)V_s = -YV_s \tag{44b}$$

Podemos agora substituir as Equações (42*a*) e (42*b*) nas Equações (44*a*) ou (44*b*) [usaremos a Equação (44*a*)] para encontrar:

$$-\gamma V_0^+ e^{-\gamma z} + \gamma V_0^- e^{\gamma z} = -Z(I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{\gamma z}) \tag{45}$$

Em seguida, igualando os coeficientes de $e^{-\gamma z}$ e $e^{\gamma z}$, encontramos as expressões gerais para a impedância característica da linha:

$$Z_0 = \frac{V_0^+}{I_0^+} = -\frac{V_0^-}{I_0^-} = \frac{Z}{\gamma} = \frac{Z}{\sqrt{ZY}} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \tag{46}$$

Incorporando as expressões para Z e Y, encontramos a impedância característica expressa pelos parâmetros de linha conhecidos:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = |Z_0|e^{j\theta} \tag{47}$$

Note que com a forma como a tensão e a corrente foram definidas nas Equações (37*b*) e (43) podemos identificar a fase da impedância característica, $\theta = \phi - \xi$.

EXEMPLO 10.2

Uma linha de transmissão sem perdas de 80 cm de comprimento opera em uma frequência de 600 MHz. Os parâmetros de linha são $L = 0{,}25\ \mu\text{H/m}$ e $C = 100\ \text{pF/m}$. Calcule a impedância característica, a constante de defasamento e a velocidade de fase.

Solução. Uma vez que a linha é sem perdas, R e G são zero. A impedância característica é

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{0{,}25 \times 10^{-6}}{100 \times 10^{-12}}} = 50\ \Omega$$

Uma vez que $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = j\omega\sqrt{LC}$, vemos que

$$\beta = \omega\sqrt{LC} = 2\pi(600 \times 10^6)\sqrt{(0{,}25 \times 10^{-6})(100 \times 10^{-12})} = 18{,}85\ \text{rad/m}$$

Também,

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi(600 \times 10^6)}{18{,}85} = 2 \times 10^8\ \text{m/s}$$

10.7 PROPAGAÇÃO COM PERDAS BAIXAS

Obtidas as formas fasoriais para a tensão e a corrente em uma linha de transmissão genérica [Equações (42*a*) e (42*b*)], podemos agora analisar com mais profundidade o significado desses resultados. Primeiramente, incorporamos a Equação (41) na Equação (42*a*) para obter

$$V_s(z) = V_0^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + V_0^- e^{\alpha z} e^{j\beta z} \tag{48}$$

Em seguida, multiplicando a Equação (48) por $e^{j\omega t}$ e tomando a parte real, temos a tensão instantânea real:

$$\mathcal{V}(z,t) = V_0^+ e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z) + V_0^- e^{\alpha z}\cos(\omega t + \beta z) \tag{49}$$

Neste exercício, consideramos V_0^+ e V_0^- reais. A Equação (49) descreve ondas de propagação progressiva e regressiva que diminuem de amplitude com a distância, de acordo com $e^{-\alpha z}$ para a onda progressiva e $e^{\alpha z}$ para a onda regressiva. Diz-se que ambas as ondas *atenuam* com a distância propagada na taxa determinada pelo *coeficiente de atenuação* α, expresso em unidades de nepers/m [Np/m].[2]

A constante de defasamento β, encontrada tomando-se a parte imaginária da Equação (41), tende a ser uma função complicada, e em geral dependerá de R e de G. Entretanto, β é ainda definida como a razão ω/v_p, e o comprimento de onda ainda é definido como a distância que proporciona um defasamento de 2π rad, de forma que $\lambda = 2\pi/\beta$. Examinando a Equação (41), observamos que perdas na propagação são evitadas (ou $\alpha = 0$) apenas quando $R = G = 0$. Neste caso, a Equação (41) fornece $\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC}$, e então $v_p = 1/\sqrt{LC}$, conforme encontramos antes.

Expressões para α e β, quando as perdas são pequenas, podem ser obtidas prontamente da Equação (41). Na *aproximação para perdas baixas*, necessitamos que $R \ll \omega L$ e $G \ll \omega C$, condição que é normalmente verdadeira na prática. Antes de aplicarmos essas condições, a Equação (41) pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned}\gamma = \alpha + j\beta &= [(R + j\omega L)(G + j\omega C)]^{1/2} \\ &= j\omega\sqrt{LC}\left[\left(1 + \frac{R}{j\omega L}\right)^{1/2}\left(1 + \frac{G}{j\omega C}\right)^{1/2}\right]\end{aligned} \tag{50}$$

Assim, a aproximação para perdas baixas nos permite utilizar os primeiros três termos na série binomial:

$$\sqrt{1+x} \doteq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad (x \ll 1) \tag{51}$$

Usamos a Equação (51) para expandir os termos entre colchetes na Equação (50), obtendo:

$$\gamma \doteq j\omega\sqrt{LC}\left[\left(1 + \frac{R}{j2\omega L} + \frac{R^2}{8\omega^2 L^2}\right)\left(1 + \frac{G}{j2\omega C} + \frac{G^2}{8\omega^2 C^2}\right)\right] \tag{52}$$

Todos os produtos na Equação (52) são então resolvidos, desprezando-se os termos que envolvem RG^2, R^2G e R^2G^2, uma vez que esses serão desprezíveis se comparados a todos os outros. O resultado é

$$\gamma = \alpha + j\beta \doteq j\omega\sqrt{LC}\left[1 + \frac{1}{j2\omega}\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right) + \frac{1}{8\omega^2}\left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{2RG}{LC} + \frac{G^2}{C^2}\right)\right] \tag{53}$$

Agora, separando as partes real e imaginária da Equação (53), temos α e β:

[2] O termo *neper* foi selecionado (por algum soletrador ruim) em homenagem a John Napier, um matemático escocês que propôs pela primeira vez a utilização de logaritmos.

$$\alpha \doteq \frac{1}{2}\left(R\sqrt{\frac{C}{L}} + G\sqrt{\frac{L}{C}}\right) \tag{54a}$$

e

$$\beta \doteq \omega\sqrt{LC}\left[1 + \frac{1}{8}\left(\frac{G}{\omega C} - \frac{R}{\omega L}\right)^2\right] \tag{54b}$$

Notamos que α apresenta valor diretamente proporcional a R e G, como era esperado. Também podemos notar que os termos na Equação (54b) que envolvem R e G levam à velocidade de fase $v_p = \omega/\beta$, que é dependente da frequência. Além disso, a *velocidade do grupo*, $v_g = d\omega/d\beta$, também dependerá da frequência, e levará à distorção do sinal, conforme exploraremos no Capítulo 12. Note que com R e G diferentes de zero, as velocidades de fase e de grupo que são constantes com a frequência podem ser obtidas quando $R/L = G/C$, conhecida como *condição de Heaviside*. Neste caso, a Equação (54b) se torna $\beta \doteq \omega\sqrt{LC}$, e diz-se que a linha é *sem distorção*. Complicações adicionais aparecem quando levamos em conta possíveis dependências de R, G, L e C com relação à frequência. Consequentemente, condições para perdas baixas ou propagação sem distorção, normalmente ocorrerão para faixas de frequências limitadas. Como regra, as perdas aumentam com o aumento da frequência, principalmente por causa do consequente aumento de R. A natureza deste último efeito, conhecido como perdas por *efeito pelicular*, necessita da teoria de campo para ser entendido e quantificado. Vamos estudá-lo no Capítulo 11, e o aplicaremos a estruturas de linhas de transmissão no Capítulo 13.

Finalmente, podemos aplicar a aproximação para perdas baixas à impedância característica vista na Equação (47). Usando a Equação (51), encontramos

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{j\omega L\left(1 + \frac{R}{j\omega L}\right)}{j\omega C\left(1 + \frac{G}{j\omega C}\right)}} \doteq \sqrt{\frac{L}{C}}\left[\frac{\left(1 + \frac{R}{j2\omega L} + \frac{R^2}{8\omega^2 L^2}\right)}{\left(1 + \frac{G}{j2\omega C} + \frac{G^2}{8\omega^2 C^2}\right)}\right] \tag{55}$$

Em seguida, multiplicamos a Equação (55) por um fator de 1, na forma do conjugado complexo do denominador da Equação (55) dividido por ele mesmo. A expressão resultante é simplificada desprezando-se todos os termos da ordem de R^2G, G^2R e os mais altos. Adicionalmente, a aproximação $1/(1 + x) \doteq 1 - x$, onde $x \ll 1$, é usada. O resultado é

$$Z_0 \doteq \sqrt{\frac{L}{C}}\left\{1 + \frac{1}{2\omega^2}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right)^2 - \frac{G^2}{C^2}\right] + \frac{j}{2\omega}\left(\frac{G}{C} - \frac{R}{L}\right)\right\} \tag{56}$$

Note que quando a condição de Heaviside (novamente, $R/L = G/C$) é atendida, Z_0 se simplifica tornando-se apenas $\sqrt{L/C}$, o que também é verdadeiro para quando R e G são zero.

EXEMPLO 10.3

Suponha que em certa linha de transmissão $G = 0$, mas R tem um valor finito, e que as condições para perdas baixas são satisfeitas, ou seja, $R \ll \omega L$. Use a Equação (56) para escrever a intensidade e a fase aproximadas para Z_0.

Solução. Com $G = 0$, a parte imaginária da Equação (56) é muito maior que o segundo termo na parte real [proporcional a $(R/\omega L)^2$]. Com isso, a impedância característica se torna

$$Z_0(G = 0) \doteq \sqrt{\frac{L}{C}}\left(1 - j\frac{R}{2\omega L}\right) = |Z_0|e^{j\theta}$$

onde $|Z_0| \doteq \sqrt{L/C}$, e $\theta = \text{tg}^{-1}(-R/2\omega L)$.

EP10.1. Em uma frequência angular de operação de 500 Mrad/s, valores típicos de circuitos para certa linha de transmissão são: $R = 0{,}2\ \Omega/\text{m}$, $L = 0{,}25\ \mu\text{H/m}$, $G = 10\ \mu\text{S/m}$ e $C = 100$ pF/m. Calcule: (*a*) α; (*b*) β; (*c*) λ; (*d*) v_p; (*e*) Z_0.

Resp. 2,25 mNp/m; 2,50 rad/m; 2,51 m; 2×10^8 m/s; $50{,}0 - j0{,}0350\ \Omega$

10.8 TRANSMISSÃO DE POTÊNCIA E O USO DE DECIBÉIS NA CARACTERIZAÇÃO DE PERDAS

Encontradas a tensão e a corrente senoidais em uma linha de transmissão com perdas, podemos em seguida avaliar a potência transmitida por uma distância específica em função das amplitudes da tensão e da corrente. Começamos pela potência *instantânea*, dada simplesmente como o produto da tensão real pela corrente real. Considere o termo de propagação progressivo na Equação (49), onde novamente a amplitude $V_0^+ = |V_0|$ é considerada real. A forma de onda da corrente será similar, mas geralmente será deslocada de fase. A tensão e a corrente atenuam de acordo com o fator $e^{-\alpha z}$. A potência instantânea se torna então:

$$\mathcal{P}(z, t) = \mathcal{V}(z, t)\mathcal{I}(z, t) = |V_0||I_0|e^{-2\alpha z}\cos(\omega t - \beta z)\cos(\omega t - \beta z + \theta) \quad (57)$$

Normalmente, a potência ***média no tempo***, $\langle\mathcal{P}\rangle$, nos interesse e a encontramos por:

$$\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T |V_0||I_0|e^{-2\alpha z}\cos(\omega t - \beta z)\cos(\omega t - \beta z + \theta)dt \quad (58)$$

onde $T = 2\pi/\omega$ é o período de tempo para um ciclo de oscilação. Utilizando uma identidade trigonométrica, o produto de cossenos no integrando pode ser escrito como a soma de cossenos individuais nas frequências de soma e de diferença:

$$\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}|V_0||I_0|e^{-2\alpha z}[\cos(2\omega t - 2\beta z + \theta) + \cos(\theta)]\,dt \quad (59)$$

A integração do primeiro termo em cosseno resulta zero, sobrando o termo $\cos\theta$. O restante da integral pode ser facilmente calculado como

$$\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{1}{2}|V_0||I_0|e^{-2\alpha z}\cos\theta = \frac{1}{2}\frac{|V_0|^2}{|Z_0|}e^{-2\alpha z}\cos\theta \text{ [W]} \tag{60}$$

O mesmo resultado pode ser obtido diretamente pela tensão e corrente fasoriais. Começamos com elas, expressas como

$$V_s(z) = V_0 e^{-\alpha z}e^{-j\beta z} \tag{61}$$

e

$$I_s(z) = I_0 e^{-\alpha z}e^{-j\beta z} = \frac{V_0}{Z_0}e^{-\alpha z}e^{-j\beta z} \tag{62}$$

onde $Z_0 = |Z_0|e^{j\theta}$. Notamos agora que a potência média no tempo, conforme expressa pela Equação (60), pode ser obtida a partir das formas fasoriais por:

$$\boxed{\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{1}{2}\text{Re}\{V_s I_s^*\}} \tag{63}$$

onde novamente o asterisco (*) denota o conjugado complexo (aplicado apenas ao fasor de corrente neste caso). Utilizando as Equações (61) e (62) na Equação (63), encontra-se que

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{P}\rangle &= \frac{1}{2}\text{Re}\left\{V_0 e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}\frac{V_0^*}{|Z_0|e^{-j\theta}}e^{-\alpha z}e^{+j\beta z}\right\}\\ &= \frac{1}{2}\text{Re}\left\{\frac{V_0V_0^*}{|Z_0|}e^{-2\alpha z}e^{j\theta}\right\} = \frac{1}{2}\frac{|V_0|^2}{|Z_0|}e^{-2\alpha z}\cos\theta\end{aligned} \tag{64}$$

resultado idêntico ao resultado integrado no tempo na Equação (60). A Equação (63) se aplica a qualquer onda de frequência única.

Um resultado importante do exercício anterior é a atenuação da potência com $e^{-2\alpha z}$, ou

$$\boxed{\langle\mathcal{P}(z)\rangle = \langle\mathcal{P}(0)\rangle e^{-2\alpha z}} \tag{65}$$

A potência cai com a distância a uma taxa exponencial que é o dobro daquela para a tensão ou para a corrente.

Uma medida conveniente para a perda de potência é a unidade *decibel*. Ela tem como base expressar a diminuição da potência como uma potência de 10. Especificamente, escrevemos

$$\frac{\langle\mathcal{P}(z)\rangle}{\langle\mathcal{P}(0)\rangle} = e^{-2\alpha z} = 10^{-\kappa\alpha z} \tag{66}$$

onde a constante, κ, deve ser determinada. Considerando $\alpha z = 1$, encontramos

$$e^{-2} = 10^{-\kappa} \quad \Rightarrow \quad \kappa = \log_{10}(e^2) = 0{,}869 \tag{67}$$

Agora, por definição, a perda de potência em decibéis (dB) é

$$\boxed{\text{Perda de potência (dB)} = 10\log_{10}\left[\frac{\langle\mathcal{P}(0)\rangle}{\langle\mathcal{P}(z)\rangle}\right] = 8{,}69\alpha z} \tag{68}$$

nessa equação, notamos que invertendo a razão da potência no argumento da função log [conforme comparado com a razão na Equação (66)] teremos um número positivo para a perda dB. Além disso, notando que $\langle \mathcal{P} \rangle \propto |V_0|^2$, podemos escrever, de forma equivalente:

$$\text{Perda de potência (dB)} = 10 \log_{10} \left[\frac{\langle \mathcal{P}(0) \rangle}{\langle \mathcal{P}(z) \rangle} \right] = 20 \log_{10} \left[\frac{|V_0(0)|}{|V_0(z)|} \right] \tag{69}$$

onde $|V_0(z)| = |V_0(0)| e^{-\alpha z}$.

EXEMPLO 10.4

Uma linha de transmissão de 20 m de comprimento é conhecida por produzir uma queda de 2,0 dB na potência de um terminal a outro. (*a*) Qual fração da potência de entrada chega até a saída? (*b*) Qual fração da potência de entrada chega até o ponto central da linha? (*c*) Qual coeficiente de atenuação exponencial α isso representa?

Solução. (*a*) A fração de potência será

$$\frac{\langle \mathcal{P}(20) \rangle}{\langle \mathcal{P}(0) \rangle} = 10^{-0,2} = 0,63$$

(*b*) 2 dB em 20 m implica uma taxa de perdas de 0,1 dB/m. Desta forma, em uma distância de 10 m, as perdas serão de 1,0 dB. Isso representa a fração da potência $10^{-0,1} = 0,79$.

(*c*) O coeficiente de atenuação exponencial é encontrado por

$$\alpha = \frac{2,0 \text{ dB}}{(8,69 \text{ dB/Np})(20 \text{ m})} = 0,012 \text{ [Np/m]}$$

Um ponto final discute a questão: por que utilizar decibéis? A razão mais forte para isso é que, ao calcular perdas acumuladas para várias linhas e dispositivos que estão todos conectados de ponta a ponta, a perda equivalente em dB para toda a distância é apenas a soma das perdas em dB dos elementos individuais.

EP10.2. Duas linhas de transmissão estão para ser conectadas ponta com ponta. A linha 1 tem 30 m de comprimento e é avaliada em 0,1 dB/m. A linha 2 tem 45 m de comprimento e é avaliada em 0,15 dB/m. A conexão não é benfeita e causa uma perda de 3 dB. Qual porcentagem da potência de entrada chega na saída dessa combinação?

Resp. 5,3%

10.9 REFLEXÃO DE ONDAS EM DESCONTINUIDADES

O conceito de reflexão de onda foi introduzido na Seção 10.1. Conforme foi explicado, a existência de uma onda refletida se origina da necessidade de satisfazer todas as condições de fronteira para a tensão e para a corrente nas extremidades das linhas de transmissão e nos pontos onde duas linhas diferentes estão conectadas uma à outra.

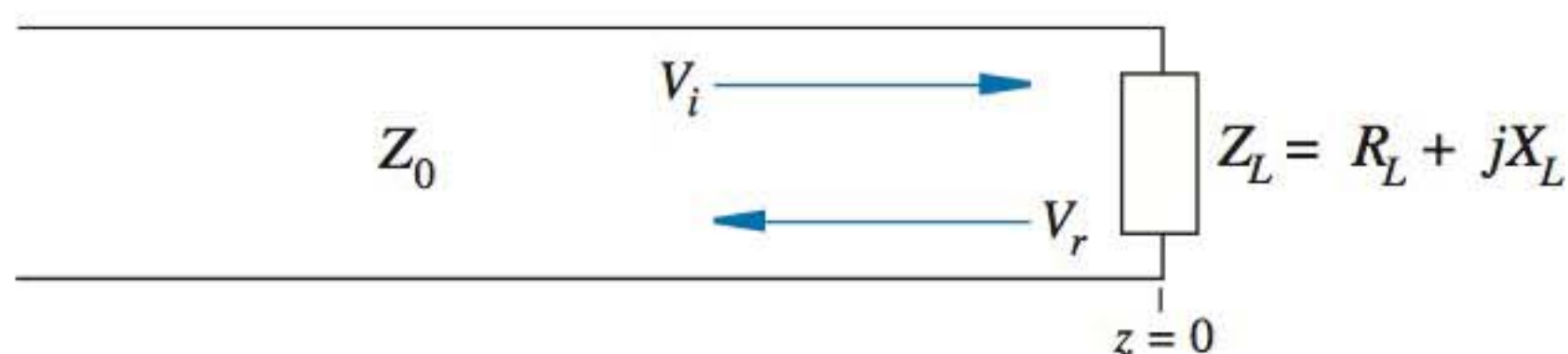



Figura 10.5 Reflexão da onda de tensão em uma carga de impedância complexa.

As consequências das ondas refletidas normalmente são menos que desejáveis; nesses casos, parte da potência que deveria ser transmitida à carga, por exemplo, se reflete e propaga de volta para a fonte. Por isso é importante estudar as condições que *não geram* reflexão de ondas.

O problema básico da reflexão é ilustrado na Figura 10.5. Nela, uma linha de transmissão de impedância característica Z_0 é terminada por uma carga que possui impedância complexa $Z_L = R_L + jX_L$. Se a linha apresentar perdas, então saberemos que Z_0 também será complexo. Por conveniência, associamos coordenadas tais que deixam a carga na posição $z = 0$. Logo, a linha ocupa a região $z < 0$. Presume-se que uma onda de tensão incida na carga, expressa na forma fasorial para todo z:

$$V_i(z) = V_{0i} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \tag{70a}$$

Quando a onda atinge a carga, uma onda refletida que se propaga de volta é gerada:

$$V_r(z) = V_{0r} e^{+\alpha z} e^{+j\beta z} \tag{70b}$$

A tensão fasorial na carga é agora a soma dos fasores de tensão incidente e tensão refletida, calculada em $z = 0$:

$$V_L = V_{0i} + V_{0r} \tag{71}$$

Adicionalmente, a corrente pela carga é a soma das correntes incidente e refletida, também em $z = 0$:

$$I_L = I_{0i} + I_{0r} = \frac{1}{Z_0}[V_{0i} - V_{0r}] = \frac{V_L}{Z_L} = \frac{1}{Z_L}[V_{0i} + V_{0r}] \tag{72}$$

Podemos agora encontrar a razão entre a amplitude da tensão refletida e a amplitude da tensão incidente, definida como *coeficiente de reflexão* Γ:

$$\Gamma \equiv \frac{V_{0r}}{V_{0i}} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = |\Gamma| e^{j\phi_r} \tag{73}$$

onde enfatizamos a natureza complexa de Γ – isso significa que uma onda refletida geralmente experimentará uma redução de amplitude e um defasamento em relação à onda incidente.

Utilizando agora a Equação (71) com a Equação (73), podemos escrever

$$V_L = V_{0i} + \Gamma V_{0i} \tag{74}$$

e dessa equação encontramos o *coeficiente de transmissão* τ, definido como a razão entre a amplitude da tensão na carga pela amplitude da tensão incidente:

$$\tau \equiv \frac{V_L}{V_{0i}} = 1 + \Gamma = \frac{2Z_L}{Z_0 + Z_L} = |\tau| e^{j\phi_t} \tag{75}$$

A princípio, pode causar algum estranhamento o fato de Γ ser um número real positivo e, consequentemente, $\tau > 1$. A amplitude da tensão na carga é, portanto, maior que a tensão incidente. Apesar disso parecer contraintuitivo, não chega a ser um problema, porque a corrente na carga será menor que a da onda incidente. Descobriremos que isso sempre resulta em uma *potência* média na carga que é menor ou igual àquela na onda incidente. Um fato adicional a ser notado também é a possibilidade de perdas na linha. A amplitude da onda incidente que é utilizada nas Equações (73) e (75) é sempre a que aparece *na carga* – após as perdas já terem ocorrido ao longo da propagação desde a entrada.

Normalmente, o maior objetivo em se transmitir potência a uma carga é configurar a combinação linha/carga de modo que não haja reflexão. Com isso, a carga recebe toda a potência transmitida. A condição para isso é $\Gamma = 0$, o que significa que a impedância da carga deve ser igual à impedância da linha. Nesses casos, diz-se que a carga está *casada* com a linha (ou vice-versa). Existem vários métodos para casamento de impedâncias, muitos dos quais serão explorados mais tarde neste capítulo.

Finalmente, as frações da *potência* da onda incidente que são refletidas e que são dissipadas pela carga precisam ser determinadas. A potência incidente é calculada a partir da Equação (64), onde dessa vez posicionamos a carga em $z = L$, com a entrada da linha em $z = 0$.

$$\langle \mathcal{P}_i \rangle = \frac{1}{2}\text{Re}\left\{ \frac{V_0 V_0^*}{|Z_0|} e^{-2\alpha L} e^{j\theta} \right\} = \frac{1}{2}\frac{|V_0|^2}{|Z_0|} e^{-2\alpha L} \cos\theta \tag{76a}$$

A potência refletida é então encontrada substituindo-se a onda de tensão refletida na Equação (76*a*), e esta última é obtida multiplicando-se a tensão incidente por Γ:

$$\langle \mathcal{P}_r \rangle = \frac{1}{2}\text{Re}\left\{ \frac{(\Gamma V_0)(\Gamma^* V_0^*)}{|Z_0|} e^{-2\alpha L} e^{j\theta} \right\} = \frac{1}{2}\frac{|\Gamma|^2 |V_0|^2}{|Z_0|} e^{-2\alpha L} \cos\theta \tag{76b}$$

A fração de potência refletida na carga é agora determinada pela razão de (76*b*) por (76*a*):

$$\frac{\langle \mathcal{P}_r \rangle}{\langle \mathcal{P}_i \rangle} = \Gamma\Gamma^* = |\Gamma|^2 \tag{77a}$$

Logo, a fração da potência incidente que é transmitida para dentro da carga (ou por ela dissipada) é

$$\frac{\langle \mathcal{P}_t \rangle}{\langle \mathcal{P}_i \rangle} = 1 - |\Gamma|^2 \tag{77b}$$

O leitor deve estar ciente de que a fração da potência transmitida *não* é $|\tau|^2$, como pode ficar tentado a concluir.

Em situações envolvendo a conexão de duas linhas de transmissão semi-infinitas que possuem impedâncias características diferentes, reflexões ocorrerão na junção, e

a segunda linha será tratada como a carga. Para uma onda incidente da linha 1 (Z_{01}) para a linha 2 (Z_{02}), encontramos

$$\Gamma = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \tag{78}$$

Assim, a fração da potência que se propaga para a segunda linha é $1 - |\Gamma|^2$.

EXEMPLO 10.5

Uma linha de transmissão sem perdas de 50 Ω é terminada por uma impedância de carga, $Z_L = 50 - j75\ \Omega$. Se a potência incidente é 100 mW, calcule a potência dissipada na carga.

Solução. O coeficiente de reflexão é

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{50 - j75 - 50}{50 - j75 + 50} = 0{,}36 - j0{,}48 = 0{,}60e^{-j0{,}93}$$

Então

$$\langle \mathcal{P}_t \rangle = (1 - |\Gamma|^2)\langle \mathcal{P}_i \rangle = [1 - (0{,}60)^2](100) = 64 \text{ mW}$$

EXEMPLO 10.6

Duas linhas com perdas estão para ser unidas ponta com ponta. A primeira linha tem 10 m de comprimento e uma especificação de perdas de 0,20 dB/m. A segunda linha tem 15 m de comprimento e uma especificação de perdas de 0,10 dB/m. O coeficiente de reflexão na junção (linha 1 para linha 2) é $\Gamma = 0{,}30$. A potência de entrada (na linha 1) é 100 mW. (*a*) Determine as perdas totais da combinação em dB. (*b*) Determine a potência transmitida para a extremidade de saída da linha 2.

Solução. (*a*) As perdas em dB para a junção são

$$L_j(\text{dB}) = 10\log_{10}\left(\frac{1}{1 - |\Gamma|^2}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{1}{1 - 0{,}09}\right) = 0{,}41 \text{ dB}$$

As perdas totais da combinação em dB são, então,

$$L_t(\text{dB}) = (0{,}20)(10) + 0{,}41 + (0{,}10)(15) = 3{,}91 \text{ dB}$$

(*b*) A potência de saída será $P_{\text{saída}} = 100 \times 10^{-0{,}391} = 41$ mW.

10.10 TAXA DE ONDA ESTACIONÁRIA PARA A TENSÃO

Muitas vezes, as características de desempenho de linhas de transmissão são acessíveis para medição. Incluídas nessas estão medições de impedâncias de carga desconhecidas, ou impedâncias de entrada de linhas que são terminadas por impedâncias de carga conhecidas ou desconhecidas. Tais técnicas baseiam-se na habilidade de se medir as amplitudes das tensões que aparecem em função da posição ao longo de uma

linha, normalmente projetada para esse propósito. Uma montagem típica consiste em uma *linha com uma fenda*, que é uma linha de transmissão coaxial sem perdas que possui uma abertura longitudinal no condutor externo ao longo de toda a sua extensão. A linha é posicionada entre a fonte de tensão senoidal e a impedância que deve ser medida. Pela abertura na linha com fenda, uma ponta de prova de tensão pode ser inserida para medir a amplitude da tensão entre os condutores interno e externo. À medida que a ponta é deslocada ao longo do comprimento da linha, as amplitudes máxima e mínima são anotadas, e a razão entre as mesmas, conhecida como *taxa de onda estacionária para tensão*, ou VSWR*, é determinada. O significado dessa medição e sua utilidade compõem o assunto desta seção.

Para entender o significado das medições de tensão, vamos considerar alguns casos especiais. Em primeiro lugar, se a linha com a fenda é terminada por uma impedância casada, então não ocorrerá reflexão de onda. A ponta de prova indicará a mesma amplitude de tensão em todos os pontos ao longo da linha. Evidentemente, a tensão instantânea que a ponta mede terá uma diferença de fase de $\beta(z_2 - z_1)$ rad à medida que a ponta for deslocada de $z = z_1$ até $z = z_2$, mas o sistema é insensível à fase do campo. As tensões de igual amplitude são características de uma onda viajante sem atenuação.

Em segundo lugar, se a linha com a fenda for terminada em um circuito aberto ou curto-circuitada (ou, em geral, por uma impedância de carga puramente imaginária), a tensão total na linha será uma onda estacionária, e conforme mostrado no Exemplo 10.1, a ponta de prova de tensão medirá valor nulo quando estiver localizada nos nós. Esses ocorrem periodicamente, com um espaçamento de metade do comprimento de onda. À medida que a posição da ponta de prova é mudada, seu valor de saída varia de $|\cos(\beta z + \phi)|$, onde z é a distância em relação à carga e ϕ é a fase, que depende da impedância de carga. Por exemplo, se a carga for um curto-circuito, a condição de tensão zero no curto leva a um nó ocorrendo naquele ponto, e então a tensão na linha variará como $|\text{sen}(\beta z)|$ (onde $\phi = \pm\pi/2$).

Uma situação mais complicada aparece quando a tensão refletida não é 0 e nem 100% da tensão incidente. Parte da energia é absorvida pela carga e parte é refletida. Dessa forma, a linha com a fenda apresenta uma tensão que é composta de uma onda viajante e de uma onda estacionária. É comum descrever essa tensão como uma onda estacionária, apesar de uma onda viajante também estar presente. Veremos que a tensão não apresenta uma amplitude zero em nenhum ponto por todo o tempo, e o grau de divisão da tensão entre uma onda viajante e uma onda estacionária verdadeira é expresso pela razão entre a máxima amplitude encontrada pela ponta de prova e a amplitude mínima (VSWR). Essa informação, associada às posições das tensões mínimas ou máximas com relação à posição da carga, permite que se determine a impedância de carga. A VSWR também proporciona uma medida da qualidade da terminação. Especificamente, uma carga perfeitamente casada leva a uma VSWR de exatamente 1. Uma carga totalmente refletora produz uma VSWR infinita.

Para derivar a forma específica da tensão total, começamos com as ondas viajantes progressiva e regressiva que ocorrem dentro da linha com fenda. A carga é posicionada em $z = 0$, de forma que todas as posições dentro da linha com a fenda estejam em valores negativos de z. Tomando a amplitude da onda de entrada como V_0, a tensão fasorial total será

* N. de T.: Do inglês, *Voltage Standing Wave Ratio*.

$$V_{sT}(z) = V_0 e^{-j\beta z} + \Gamma V_0 e^{j\beta z} \tag{79}$$

A linha, como não tem perdas, possui impedância característica real Z_0. A impedância da carga, Z_L, é geralmente complexa, o que leva a um coeficiente de reflexão complexo:

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = |\Gamma| e^{j\phi} \tag{80}$$

Se a carga for um curto-circuito ($Z_L = 0$), ϕ é igual a π. Se Z_L é real e menor que Z_0, ϕ é também igual a π. E se Z_L for real e maior que Z_0, ϕ é zero. Utilizando a Equação (80), podemos reescrever a Equação (79) na forma:

$$V_{sT}(z) = V_0 \left(e^{-j\beta z} + |\Gamma| e^{j(\beta z + \phi)}\right) = V_0 e^{j\phi/2} \left(e^{-j\beta z} e^{-j\phi/2} + |\Gamma| e^{j\beta z} e^{j\phi/2}\right) \tag{81}$$

Para expressar a Equação (81) de uma forma mais útil, podemos aplicar o artifício algébrico de adicionar e subtrair o termo $V_0(1 - |\Gamma|)e^{-j\beta z}$:

$$V_{sT}(z) = V_0(1 - |\Gamma|)e^{-j\beta z} + V_0|\Gamma| e^{j\phi/2} \left(e^{-j\beta z} e^{-j\phi/2} + e^{j\beta z} e^{j\phi/2}\right) \tag{82}$$

O último termo entre parênteses na Equação (82) se torna um cosseno, e escrevemos

$$V_{sT}(z) = V_0(1 - |\Gamma|)e^{-j\beta z} + 2V_0|\Gamma| e^{j\phi/2} \cos(\beta z + \phi/2) \tag{83}$$

As características importantes desse resultado podem ser mais facilmente vistas quando ele é convertido para a forma instantânea real:

$$\mathcal{V}(z, t) = \text{Re}[V_{sT}(z) e^{j\omega t}] = \underbrace{V_0(1 - |\Gamma|)\cos(\omega t - \beta z)}_{\textit{onda viajante}} + \underbrace{2|\Gamma| V_0 \cos(\beta z + \phi/2) \cos(\omega t + \phi/2)}_{\textit{onda estacionária}} \tag{84}$$

A Equação (84) é reconhecida como a soma de uma onda viajante de amplitude $(1 - |\Gamma|)V_0$ com uma onda estacionária de amplitude $2|\Gamma|V_0$. Podemos visualizar os eventos da seguinte maneira: a porção da onda incidente que se reflete e propaga de volta na linha com fenda interfere com uma porção equivalente da onda incidente para formar a onda estacionária. O resto da onda incidente (que não interfere) é a parte relativa à onda viajante na Equação (84). A amplitude máxima observada nas linhas é encontrada onde as amplitudes dos dois termos na Equação (84) se somam diretamente, resultando em $(1 + |\Gamma|)V_0$. A amplitude mínima é encontrada onde a onda estacionária atinge um valor nulo, restando apenas a amplitude de $(1 - |\Gamma|)V_0$ da onda viajante. O fato de os dois termos na Equação (84) se combinarem dessa maneira com o defasamento apropriado não é aparente de forma imediata, mas os próximos argumentos mostrarão que isso realmente ocorre.

Para se obter as amplitudes de tensão máxima e mínima, vamos voltar à primeira parte da Equação (81):

$$V_{sT}(z) = V_0 \left(e^{-j\beta z} + |\Gamma| e^{j(\beta z + \phi)}\right) \tag{85}$$

Primeiramente, a amplitude mínima da tensão é obtida quando os dois termos da Equação (85) se subtraem diretamente (possuindo um defasamento de π). Isso ocorre nos pontos

$$z_{\min} = -\frac{1}{2\beta}(\phi + (2m+1)\pi) \quad (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{86}$$

Note que todas as posições na linha com fenda novamente ocorrem em valores negativos de z. Substituindo a Equação (86) na Equação (85) tem-se a amplitude mínima:

$$V_{sT}(z_{\min}) = V_0(1 - |\Gamma|) \tag{87}$$

O mesmo resultado é obtido substituindo a Equação (86) na tensão real, Equação (84). Isso produz um valor nulo na parte da onda estacionária, e assim obtemos

$$\mathcal{V}(z_{\min}, t) = \pm V_0(1 - |\Gamma|)\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \phi/2) \tag{88}$$

A tensão oscila (em volta de zero) no tempo, com amplitude $V_0(1 - |\Gamma|)$. Os sinais de mais e menos na Equação (88) se aplicam, respectivamente, a valores pares e ímpares de m na Equação (86).

Em seguida, a amplitude máxima de tensão é obtida quando os dois termos na Equação (85) se somam em fase. Isso ocorrerá nos pontos dados por

$$z_{\max} = -\frac{1}{2\beta}(\phi + 2m\pi) \quad (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{89}$$

Substituindo a Equação (89) na Equação (85), obtemos

$$V_{sT}(z_{\max}) = V_0(1 + |\Gamma|) \tag{90}$$

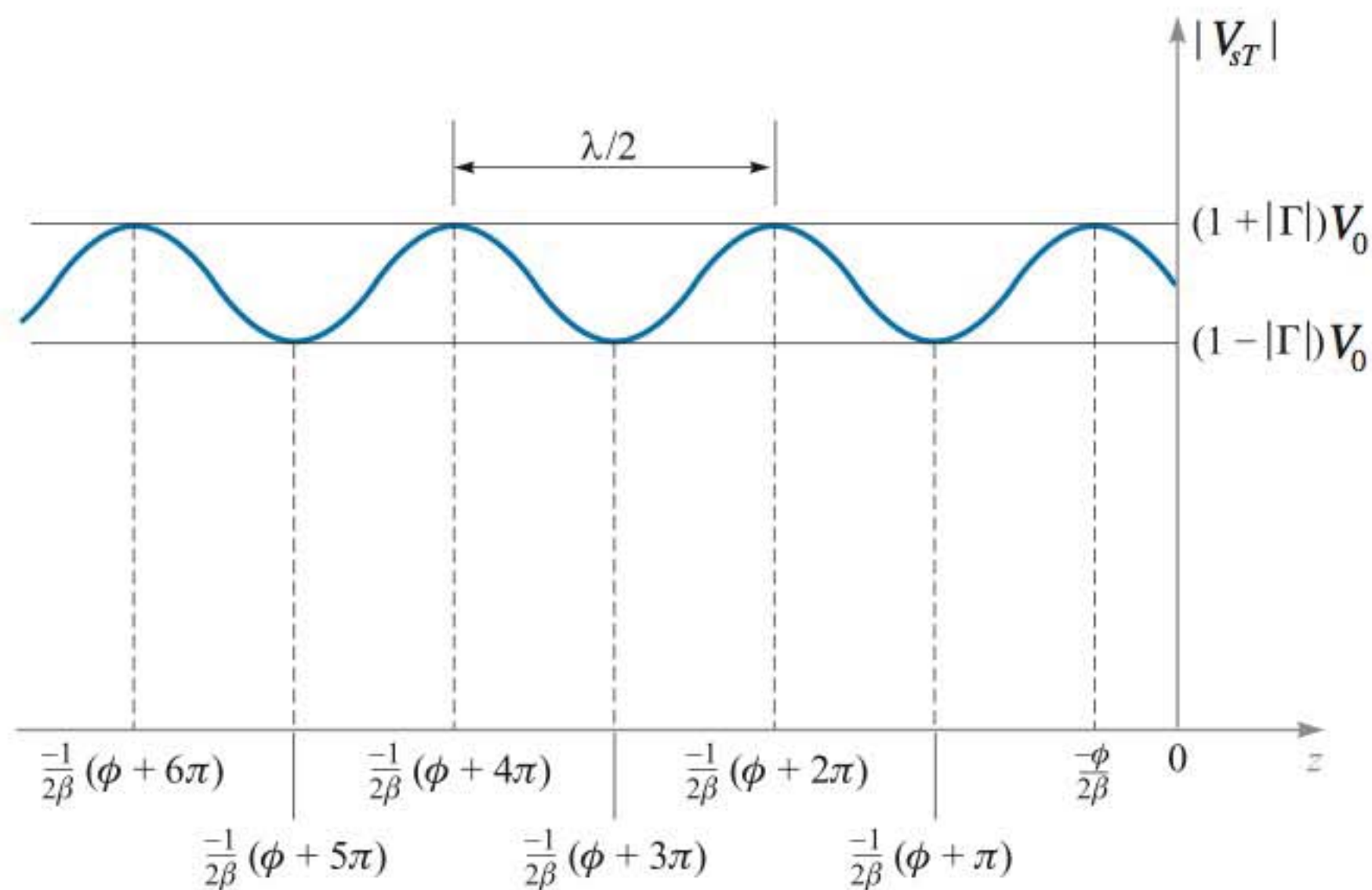



Figura 10.6 Gráfico da amplitude de V_{sT} conforme encontrado pela Equação (85) em função da posição z junto à carga (em $z = 0$). A fase do coeficiente de reflexão é ϕ, que leva às posições indicadas de amplitudes máximas e mínimas de tensão, conforme encontrado pelas Equações (86) e (89).

Como antes, podemos substituir a Equação (89) na tensão instantânea real correspondente à Equação (84). O efeito é produzir um máximo na parte da onda estacionária, que então se soma em fase com a onda viajante. O resultado é

$$\mathcal{V}(z_{\max}, t) = \pm V_0(1 + |\Gamma|)\cos(\omega t + \phi/2) \tag{91}$$

onde os sinais de mais e menos se aplicam, respectivamente, aos valores positivos e negativos de m na Equação (89). Novamente, a onda oscila em volta do zero no tempo, com amplitude $V_0(1 + |\Gamma|)$.

Note que um máximo de tensão está localizado na carga ($z = 0$) se $\phi = 0$. Além disso, $\phi = 0$ quando Γ é real e positivo. Isso ocorre para Z_L real quando $Z_L > Z_0$. Logo, existe um máximo de tensão na carga quando a impedância da carga é maior que Z_0 e ambas as impedâncias são reais. Com $\phi = 0$, máximos também ocorrem em $z_{\max} = -m\pi/\beta = -m\lambda/2$. Para uma impedância de carga igual a zero, $\phi = \pi$ e os máximos são encontrados em $z_{\max} = -\pi/(2\beta)$, $-3\pi/(2\beta)$ ou $z_{\max} = -\lambda/4$, $-3\lambda/4$ e assim por diante.

Os mínimos são separados por múltiplos de um meio de comprimento de onda (assim como os máximos), e para uma impedância de carga igual a zero, o primeiro mínimo ocorre quando $-\beta z = 0$, ou na carga. Em geral, um mínimo de tensão é encontrado em $z = 0$ sempre que $\phi = \pi$. Isso ocorre se $Z_L < Z_0$, considerando Z_L real. Os resultados gerais são ilustrados na Figura 10.6.

Finalmente, a taxa de onda estacionária para tensão é definida como:

$$s \equiv \frac{V_{sT}(z_{\max})}{V_{sT}(z_{\min})} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \tag{92}$$

Uma vez que as amplitudes absolutas de tensão se dividiram, a VSWR medida permite o cálculo imediato de $|\Gamma|$. A fase de Γ é então encontrada, medindo-se a localização do primeiro máximo ou mínimo com relação à carga e, depois, utilizando a Equação (86) ou a (89) de forma apropriada. Uma vez que Γ é conhecido, a impedância da carga pode ser encontrada, considerando Z_0 conhecido.

EP10.3. Qual taxa de onda estacionária para tensão teremos quando $\Gamma = \pm 1/2$?

Resp. 3

EXEMPLO 10.7

Medições em linha com uma fenda resultaram em uma VSWR de 5, um espaçamento de 15 cm entre máximos sucessivos de tensão e em um primeiro máximo a uma distância de 7,5 cm à frente da carga. Determine e impedância da carga, considerando que a linha com a fenda tem uma impedância de 50 Ω.

Solução. O espaçamento de 15 cm entre máximos vale $\lambda/2$, o que acarreta um comprimento de onda de 30 cm. Uma vez que a linha com a fenda é preenchida com ar, a frequência é $f = c/\lambda = 1$ GHz. O primeiro máximo a 7,5 cm está então a uma distância de $\lambda/4$ da carga, o que significa que um mínimo de tensão ocorre na carga. Logo, Γ será real e negativo. Usamos a Equação (92) para escrever

$$|\Gamma| = \frac{s-1}{s+1} = \frac{5-1}{5+1} = \frac{2}{3}$$

Então

$$\Gamma = -\frac{2}{3} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

que resolvemos para encontrar Z_L e obter

$$Z_L = \frac{1}{5}Z_0 = \frac{50}{5} = 10\ \Omega$$

10.11 LINHAS DE TRANSMISSÃO DE COMPRIMENTO FINITO

Um novo tipo de problema aparece quando se considera a propagação de uma tensão senoidal em linhas de comprimento finito, com cargas que não possuem casamento de impedância. Nesses casos, numerosas reflexões ocorrem na carga e no gerador, criando uma distribuição de tensão bidirecional de múltiplas ondas na linha. Como sempre, o objetivo é determinar a potência líquida transferida para a carga em regime permanente, mas devemos agora incluir o efeito das numerosas ondas refletidas progressivas e regressivas.

A Figura 10.7 mostra o problema básico. A linha, considerada sem perdas, tem uma impedância característica Z_0 e comprimento l. A fonte de tensão senoidal na frequência ω cria um fasor de tensão V_s. Associada à fonte está uma impedância interna complexa Z_g, conforme mostrado. Considera-se também que a impedância de carga, Z_L, é complexa e está localizada em $z = 0$. Assim, a linha existe ao longo do eixo z negativo. O método mais simples para se abordar o problema não é tentar analisar cada reflexão individualmente, mas sim reconhecer que em um regime permanente existirá uma onda progressiva equivalente resultante e uma onda regressiva equivalente resultante, representando a superposição de todas as ondas que incidem na carga e todas as ondas que nela refletem. Logo, podemos escrever a tensão total na linha como

$$V_{sT}(z) = V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{j\beta z} \tag{93}$$

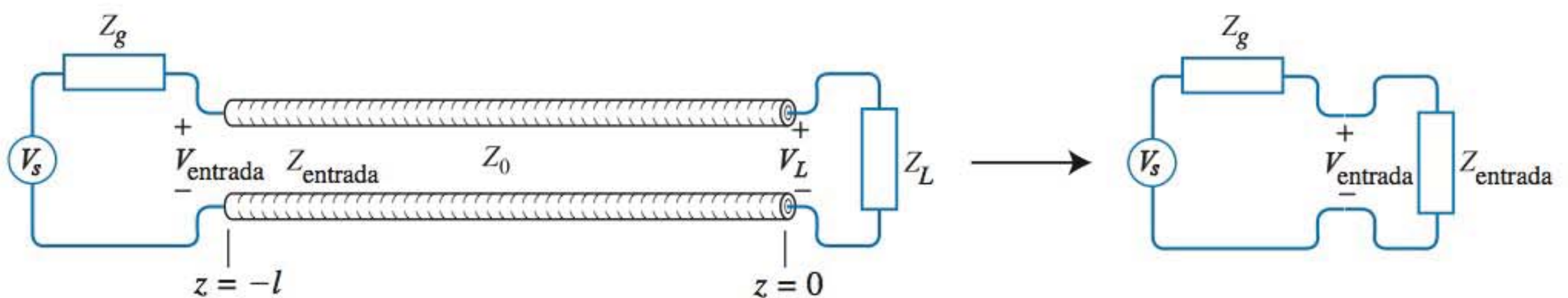



Figura 10.7 Configuração de linha de transmissão de comprimento finito e seu circuito equivalente.

na qual V_0^+ e V_0^- são amplitudes complexas, compostas respectivamente pela soma de todas as amplitudes e fases das ondas progressivas e regressivas individuais. De forma semelhante, podemos escrever a corrente total na linha:

$$I_{sT}(z) = I_0^+ e^{-j\beta z} + I_0^- e^{j\beta z} \tag{94}$$

Definimos agora a *impedância de onda*, $Z_w(z)$*, como a razão entre o fasor de tensão total e o fasor de corrente total. Utilizando as Equações (93) e (94), obtemos:

$$Z_w(z) \equiv \frac{V_{sT}(z)}{I_{sT}(z)} = \frac{V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{j\beta z}}{I_0^+ e^{-j\beta z} + I_0^- e^{j\beta z}} \tag{95}$$

Em seguida, utilizamos as relações $V_0^- = \Gamma V_0^+$, $I_0^+ = V_0^+/Z_0$ e $I_0^- = -V_0^-/Z_0$. A Equação (95) se simplifica para

$$Z_w(z) = Z_0 \left[\frac{e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}}{e^{-j\beta z} - \Gamma e^{j\beta z}} \right] \tag{96}$$

Agora, usando a identidade de Euler, correspondente à Equação (32), e substituindo $\Gamma = (Z_L - Z_0)/(Z_L + Z_0)$, a Equação (96) se torna

$$Z_w(z) = Z_0 \left[\frac{Z_L \cos(\beta z) - jZ_0 \operatorname{sen}(\beta z)}{Z_0 \cos(\beta z) - jZ_L \operatorname{sen}(\beta z)} \right] \tag{97}$$

A impedância de onda na entrada da linha é agora encontrada calculando a Equação (97) em $z = -l$, obtendo-se

$$Z_{\text{entrada}} = Z_0 \left[\frac{Z_L \cos(\beta l) + jZ_0 \operatorname{sen}(\beta l)}{Z_0 \cos(\beta l) + jZ_L \operatorname{sen}(\beta l)} \right] \tag{98}$$

Essa é a grandeza que precisamos para criar o circuito equivalente da Figura 10.7.

Um caso especial é aquele no qual o comprimento da linha é igual à metade do comprimento de onda, ou um inteiro múltiplo deste. Neste caso,

$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{m\lambda}{2} = m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

Utilizando esse resultado na Equação (98), encontramos

$$Z_{\text{entrada}}(l = m\lambda/2) = Z_L \tag{99}$$

Para uma linha de meia onda**, o circuito equivalente pode ser construído simplesmente removendo-se a linha completamente e colocando a impedância de carga na entrada. Essa simplificação só funciona, obviamente, se o comprimento da linha for realmente um múltiplo inteiro de meio comprimento de onda. Quando a frequência começa a variar, a condição não é mais satisfeita, e a Equação (98) deve ser utilizada na sua forma geral para encontrar Z_{entrada}.

* N. de T.: O subscrito *w* refere-se ao termo em inglês *wave*.

** N. de T.: Linha de comprimento igual à metade do comprimento de onda.

Outro caso especial importante é aquele no qual o comprimento da linha é um múltiplo ímpar de um quarto do comprimento de onda:

$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda}(2m+1)\frac{\lambda}{4} = (2m+1)\frac{\pi}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

Utilizando o resultado na Equação (98), temos

$$Z_{\text{entrada}}(l = \lambda/4) = \frac{Z_0^2}{Z_L} \tag{100}$$

Uma aplicação imediata da Equação (100) é o problema da união de duas linhas que possuem impedâncias características diferentes. Suponha que as impedâncias são (da esquerda para a direita) Z_{01} e Z_{03}. Na junção, podemos inserir uma linha adicional cuja impedância característica seja Z_{02} e cujo comprimento seja $\lambda/4$. Temos então uma sequência de linhas unidas cujas impedâncias são Z_{01}, Z_{02} e Z_{03}, nessa ordem. Uma onda de tensão é agora incidente, a partir da linha 1, na junção entre Z_{01} e Z_{02}. A carga efetiva na extremidade remota da linha 2 é Z_{03}. Portanto, a impedância de entrada da linha 2 em qualquer frequência é

$$Z_{\text{entrada}} = Z_{02}\frac{Z_{03}\cos\beta_2 l + jZ_{02}\,\text{sen}\,\beta_2 l}{Z_{02}\cos\beta_2 l + jZ_{03}\,\text{sen}\,\beta_2 l} \tag{101}$$

Então, uma vez que o comprimento da linha 2 é $\lambda/4$,

$$Z_{\text{entrada}}(\text{linha 2}) = \frac{Z_{02}^2}{Z_{03}} \tag{102}$$

As reflexões na interface Z_{01}–Z_{02} não ocorrerão se $Z_{\text{entrada}} = Z_{01}$. Com isso, podemos casar a junção (permitindo transmissão completa pela sequência das três linhas) se Z_{02} for escolhido de forma que

$$Z_{02} = \sqrt{Z_{01}Z_{03}} \tag{103}$$

Essa técnica é chamada de *casamento de quarto de onda*, e novamente é limitada à frequência (ou estreita faixa de frequências) nas quais $l \doteq (2m+1)\lambda/4$. Encontraremos mais exemplos dessas técnicas quando explorarmos a reflexão de ondas eletromagnéticas no Capítulo 12. Enquanto isso, exemplos adicionais que envolvem o uso da impedância de entrada e da VSWR serão apresentados a seguir na Seção 10.12.

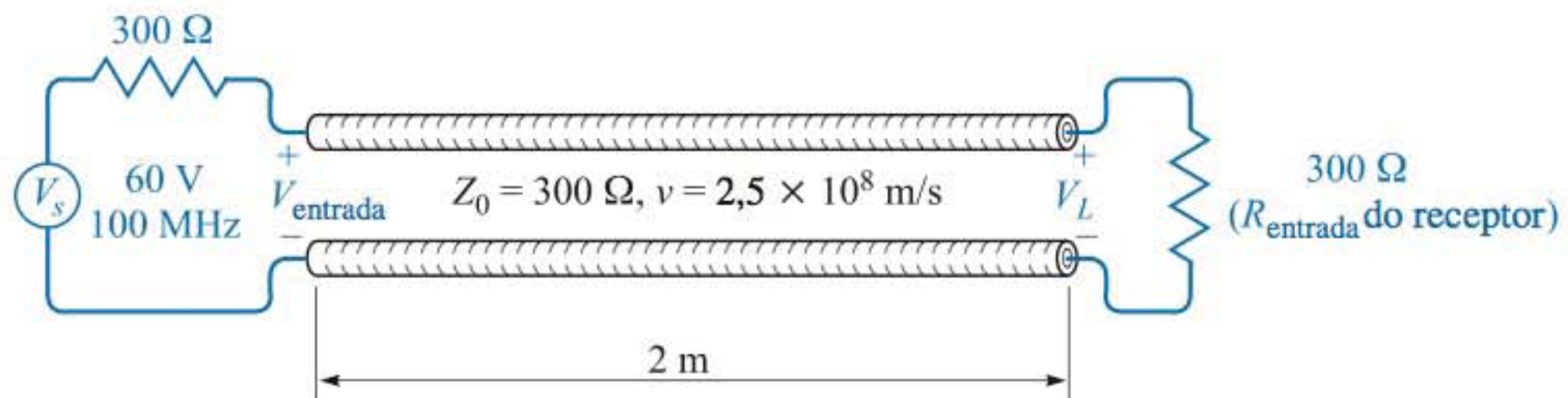



Figura 10.8 Uma linha de transmissão que está casada em ambas as extremidades não produz reflexões e, assim, entrega potência máxima à carga.

10.12 EXEMPLOS DE LINHAS DE TRANSMISSÃO

Nesta seção, vamos aplicar muitos dos resultados que obtivemos na seção anterior a diversos problemas típicos de linhas de transmissão. Vamos simplificar nosso trabalho restringindo nossa atenção à linha sem perdas.

Começaremos considerando uma linha de 300 Ω de dois fios ($Z_0 = 300\ \Omega$), tal como o cabo que liga a antena a um televisor ou a um receptor de FM. O circuito é mostrado na Figura 10.8. A linha tem comprimento de 2 m e os valores de L e C são tais que a velocidade na linha é de $2{,}5 \times 10^8$ m/s. Vamos terminar a linha com um receptor que possui uma resistência de entrada de 300 Ω e representaremos a antena pelo seu equivalente Thevenin, $Z = 300\ \Omega$ em série com $V_s = 60$ V em 100 MHz. Essa tensão da antena é maior do que seria em um caso prático por um fator de aproximadamente 10^5, mas em compensação proporciona valores mais simples para se trabalhar. Para se pensar em termos práticos, é só dividir as tensões e correntes por 10^5, dividir as potências por 10^{10} e não modificar as impedâncias.

Uma vez que a impedância de carga é igual à impedância característica, a linha está casada. O coeficiente de reflexão é zero e a taxa de onda estacionária é unitária. Para a velocidade e frequência dadas, o comprimento de onda nessa linha é $v/f = 2{,}5$ m, e a constante de defasamento é $2\pi/\lambda = 0{,}8\pi$ rad/m. A constante de atenuação é zero. O comprimento elétrico da linha é $\beta l = (0{,}8\pi)2$, ou $1{,}6\pi$ rad. Esse comprimento pode também ser expresso como 288°, ou 0,8 comprimento de onda.

A impedância de entrada oferecida à fonte de tensão é de 300 Ω, e uma vez que a impedância interna da fonte tem 300 Ω, a tensão na entrada da linha é metade de 60 V, ou seja, 30 V. A fonte está casada com a linha e injeta nesta a máxima potência disponível. Uma vez que não existe reflexão e nem atenuação, a tensão na carga é de 30 V, mas é deslocada de fase de $1{,}6\pi$ rad. Logo,

$$V_{\text{entrada}} = 30 \cos(2\pi 10^8 t)\ \text{V}$$

enquanto

$$V_L = 30 \cos(2\pi 10^8 t - 1{,}6\pi)\ \text{V}$$

A corrente de entrada é

$$I_{\text{entrada}} = \frac{V_{\text{entrada}}}{300} = 0{,}1 \cos(2\pi 10^8 t)\ \text{A}$$

enquanto a corrente na carga é

$$I_L = 0{,}1 \cos(2\pi 10^8 t - 1{,}6\pi)\ \text{A}$$

A potência média entregue na entrada da linha pela fonte deve ser toda levada pela linha até a carga,

$$P_{\text{entrada}} = P_L = \frac{1}{2} \times 30 \times 0{,}1 = 1{,}5\ \text{W}$$

Vamos agora conectar um segundo receptor, que também tem resistência de entrada de 300 Ω, em paralelo com o primeiro receptor na linha. A impedância de carga é agora de 150 Ω, e o coeficiente de reflexão é

$$\Gamma = \frac{150 - 300}{150 + 300} = -\frac{1}{3}$$

e a taxa de onda estacionária para a tensão é

$$s = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 2$$

A impedância de entrada não vale mais 300 Ω, mas sim

$$Z_{\text{entrada}} = Z_0 \frac{Z_L \cos \beta l + j Z_0 \operatorname{sen} \beta l}{Z_0 \cos \beta l + j Z_L \operatorname{sen} \beta l} = 300 \frac{150 \cos 288^\circ + j300 \operatorname{sen} 288^\circ}{300 \cos 288^\circ + j150 \operatorname{sen} 288^\circ}$$
$$= 510\angle -23{,}8^\circ = 466 - j206\ \Omega$$

que é uma impedância capacitiva. Fisicamente, isso significa que esse comprimento da linha armazena mais energia no seu campo elétrico que no seu campo magnético. O fasor da corrente de entrada é então

$$I_{s,\text{entrada}} = \frac{60}{300 + 466 - j206} = 0{,}0756\angle 15{,}0^\circ\ \text{A}$$

e a potência fornecida à linha pela fonte é

$$P_{\text{entrada}} = \frac{1}{2} \times (0{,}0756)^2 \times 466 = 1{,}333\ \text{W}$$

Uma vez que não há perdas na linha, 1,333 W deve também ser fornecido à carga. Note que esse valor é menor que aquele 1,50 W que fomos capazes de fornecer à carga casada. Além disso, essa potência deve ser igualmente dividida entre os receptores, e então cada receptor receberá apenas 0,667 W. Uma vez que a impedância de entrada de cada receptor é de 300 Ω, a tensão sobre o receptor é facilmente encontrada como

$$0{,}667 = \frac{1}{2} \frac{|V_{s,L}|^2}{300}$$
$$|V_{s,L}| = 20\ \text{V}$$

em comparação com os 30 V obtidos sobre a carga única.

Antes de deixarmos esse exemplo, faremos algumas perguntas sobre as tensões na linha de transmissão. Onde estão os máximos e mínimos de tensão e quais são esses valores? A fase da tensão na carga ainda difere daquela da tensão de entrada por 288°? Presumivelmente, se pudermos responder essas perguntas, poderemos fazer o mesmo para a corrente.

A Equação (89) serve para localizar os máximos de tensão em

$$z_{\max} = -\frac{1}{2\beta}(\phi + 2m\pi) \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

onde $\Gamma = |\Gamma| e^{j\phi}$. Logo, com $\beta = 0{,}8\pi$ e $\phi = \pi$, encontramos

$$z_{\max} = -0{,}625 \quad \text{e} \quad -1{,}875\ \text{m}$$

enquanto os mínimos estão $\lambda/4$ distantes dos máximos;

$$z_{\min} = 0 \qquad \text{e} \qquad -1{,}25 \text{ m}$$

e encontramos que a tensão na carga (em $z = 0$) é um mínimo de tensão. Isso está claramente de acordo com a conclusão geral alcançada anteriormente: um mínimo de tensão ocorre na carga se $Z_L < Z_0$ e um máximo de tensão ocorre se $Z_L > Z_0$, onde ambas as impedâncias são resistências puras.

Portanto, a tensão mínima na linha é a tensão na carga, ou seja, 20 V. A tensão máxima deve ser 40 V, uma vez que a taxa de onda estacionária é 2. A tensão no terminal de entrada da linha é

$$V_{s,\text{entrada}} = I_{s,\text{entrada}} Z_{\text{entrada}} = (0{,}0756\angle 15{,}0^\circ)(510\angle -23{,}8^\circ) = 38{,}5\angle -8{,}8^\circ$$

A tensão de entrada é quase tão grande quanto a tensão máxima em qualquer ponto da linha, porque a linha tem aproximadamente três quartos do comprimento de onda, um comprimento que colocaria a tensão máxima na entrada quando $Z_L < Z_0$.

Finalmente, é de interesse determinar a tensão na carga em relação à amplitude *e a fase*. Começamos com a tensão total na linha, usando a Equação (93).

$$V_{sT} = \left(e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}\right) V_0^+ \tag{104}$$

Podemos usar essa expressão para determinar a tensão em qualquer ponto da linha, usando a tensão em qualquer outro ponto. Uma vez que conhecemos a tensão na entrada da linha, fazemos $z = -l$,

$$V_{s,\text{entrada}} = \left(e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l}\right) V_0^+ \tag{105}$$

e resolvemos para V_0^+,

$$V_0^+ = \frac{V_{s,\text{entrada}}}{e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l}} = \frac{38{,}5\angle -8{,}8^\circ}{e^{j1{,}6\pi} - \frac{1}{3}e^{-j1{,}6\pi}} = 30{,}0\angle 72{,}0^\circ \text{ V}$$

Podemos agora considerar $z = 0$ na Equação (104) para encontrar a tensão na carga,

$$V_{s,L} = (1 + \Gamma)V_0^+ = 20\angle 72^\circ = 20\angle -288^\circ$$

A amplitude está de acordo com nosso valor anterior. A presença da onda refletida faz com que $V_{s,\,\text{entrada}}$ e $V_{s,\,\text{L}}$ difiram em fase por, aproximadamente –279°, em vez de –288°.

EXEMPLO 10.8

Com o objetivo de apresentar um exemplo ligeiramente mais complicado, vamos agora colocar uma impedância puramente capacitiva de $-j300\ \Omega$ em paralelo com os dois receptores de 300 Ω. Devemos encontrar a impedância de entrada e a potência entregue a cada receptor.

Solução. A impedância de carga é agora 150 Ω em paralelo com $-j300\ \Omega$, ou

$$Z_L = \frac{150(-j300)}{150 - j300} = \frac{-j300}{1 - j2} = 120 - j60\ \Omega$$

Primeiramente, calculamos o coeficiente de reflexão e o VSWR*:

* N. de T.: VSWR = s.

$$\Gamma = \frac{120 - j60 - 300}{120 - j60 + 300} = \frac{-180 - j60}{420 - j60} = 0{,}447\angle{-153{,}4^\circ}$$

$$s = \frac{1 + 0{,}447}{1 - 0{,}447} = 2{,}62$$

Logo, a VSWR é maior, e o casamento é, portanto, pior. Vamos prosseguir calculando a impedância de entrada. O comprimento elétrico da linha é ainda 288°, de modo que

$$Z_{\text{entrada}} = 300\,\frac{(120 - j60)\cos 288^\circ + j300\,\text{sen}\,288^\circ}{300\cos 288^\circ + j(120 - j60)\,\text{sen}\,288^\circ} = 755 - j138{,}5\ \Omega$$

Isso leva a uma fonte de corrente de

$$I_{s,\text{entrada}} = \frac{V_{Th}}{Z_{Th} + Z_{\text{entrada}}} = \frac{60}{300 + 755 - j138{,}5} = 0{,}0564\angle 7{,}47^\circ\ \text{A}$$

Logo, a potência média entregue na entrada da linha é $P_{\text{entrada}} = \frac{1}{2}(0{,}0564)^2(755) = 1{,}200$ W. Uma vez que a linha é sem perdas, tem-se que $P_L = 1{,}200$ W, e cada receptor recebe apenas 0,6 W.

EXEMPLO 10.9

Como um exemplo final, vamos terminar nossa linha com uma impedância puramente capacitiva $Z_L = -j300\Omega$. Procuramos o coeficiente de reflexão, a VSWR e a potência entregue à carga.

Solução. Obviamente, não conseguimos entregar energia média à carga por esta ser uma reatância pura. Como consequência, o coeficiente de reflexão é

$$\Gamma = \frac{-j300 - 300}{-j300 + 300} = -j1 = 1\angle -90^\circ$$

e a onda refletida é igual em amplitude à onda incidente. Com isso, não nos deve surpreender a constatação de que VSWR é

$$s = \frac{1 + |-j1|}{1 - |-j1|} = \infty$$

e que a impedância de entrada é uma reatância pura

$$Z_{\text{entrada}} = 300\,\frac{-j300\cos 288^\circ + j300\,\text{sen}\,288^\circ}{300\cos 288^\circ + j(-j300)\,\text{sen}\,288^\circ} = j589$$

Desse modo, nenhuma potência média pode ser entregue pela fonte à impedância de entrada, e com isso nenhuma potência média pode ser levada até a carga.

Poderíamos continuar encontrando numerosos outros aspectos e valores para esses exemplos. Contudo, muito do trabalho realizado ao lidar com problemas desse tipo pode ficar mais fácil se utilizarmos técnicas gráficas. Vamos encontrá-las na Seção 10.13.

EP10.4. Uma linha sem perdas de 50 W tem um comprimento de 0,4λ. A frequência de operação é 300 MHz. Uma carga $Z_L = 40 + j30\ \Omega$ está conectada em $z = 0$, e o equivalente Thevenin da fonte em $z = -l$ é $12\angle 0^\circ$ V em série com $Z_{Th} = 50 + j0\ \Omega$. Calcule: (*a*) Γ; (*b*) s; (*c*) Z_{entrada}.

Resp. $0{,}333\angle 90^\circ$; 2,00; $25{,}5 + j5{,}90\ \Omega$

EP10.5. Para a linha de transmissão do EP10.4, calcule também: (*a*) a tensão fasorial em $z = -l$; (*b*) a tensão fasorial em $z = 0$; (*c*) a potência média entregue a Z_L.

Resp. $4{,}14\angle 8{,}58^\circ$ V; $6{,}32\angle{-125{,}6^\circ}$ V; 0,320 W

10.13 MÉTODOS GRÁFICOS: A CARTA DE SMITH

Animação

Problemas com linhas de transmissão frequentemente envolvem manipulações de números complexos, o que torna o tempo e o esforço necessários para sua solução muito maiores do que seriam em uma sequência similar de operações com números reais. Uma forma de diminuir o trabalho, sem comprometer seriamente o grau de exatidão, é a utilização de cartas de linha de transmissão. Provavelmente, a mais amplamente utilizada é a carta de Smith.[3]

Basicamente, esse diagrama mostra curvas de resistência constante e reatância constante. Elas podem representar uma impedância de entrada ou uma impedância de carga. A última, obviamente, é a impedância de entrada de uma linha de comprimento nulo. Uma indicação da localização ao longo da linha é também mostrada, normalmente expressa por uma fração do comprimento de onda a partir de um máximo ou

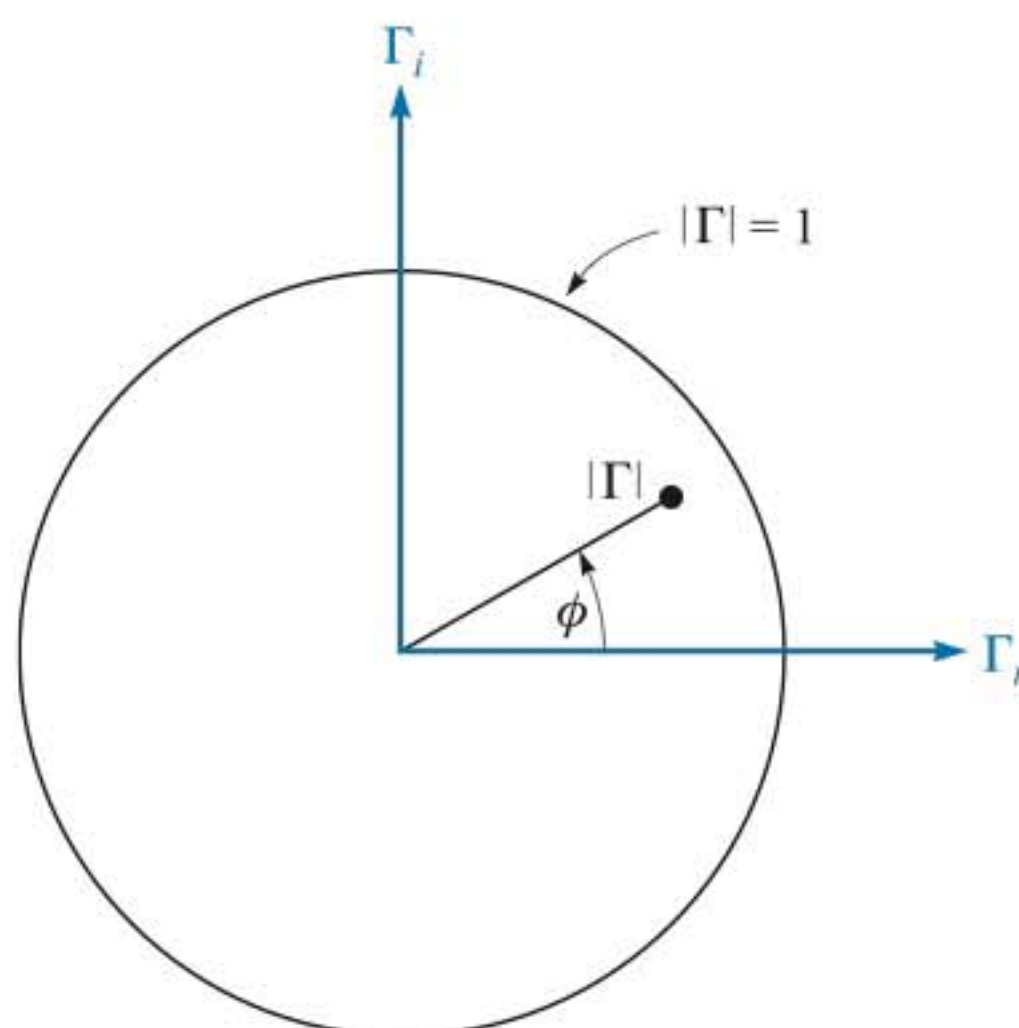



Figura 10.9 As coordenadas polares da carta de Smith são a amplitude e o ângulo de fase do coeficiente de reflexão. As coordenadas cartesianas são as partes real e imaginária do coeficiente de reflexão. A carta inteira está contida no interior do círculo $|\Gamma| = 1$.

[3] P. H. Smith, Transmission Line Calculator, *Electronics*, vol. 12, pp. 29-31, jan. 1939.

um mínimo de tensão. Apesar de não serem especificamente mostrados na carta, a taxa de onda estacionária e a amplitude e ângulo do coeficiente de reflexão são muito rapidamente determinados. Na verdade, o diagrama é construído dentro de um círculo de raio unitário utilizando coordenadas polares, com a variável para o raio sendo $|\Gamma|$ e a variável ϕ para o ângulo, contada no sentido anti-horário, sendo então $\Gamma = |\Gamma|e^{j\phi}$. A Figura 10.9 mostra esse círculo. Uma vez que $|\Gamma| < 1$, toda nossa informação deve estar contida sobre ou dentro do círculo unitário. De forma peculiar, o coeficiente de reflexão propriamente dito não é representado na carta final, pois esses contornos adicionais deixariam o diagrama muito difícil de ser lido.

A relação básica sobre a qual a carta é construída é

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \tag{106}$$

As impedâncias que representamos na carta serão *normalizadas* com relação à impedância característica. Vamos identificar a impedância de carga normalizada como z_L,

$$z_L = r + jx = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{R_L + jX_L}{Z_0}$$

e assim

$$\Gamma = \frac{z_L - 1}{z_L + 1}$$

ou

$$z_L = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} \tag{107}$$

Na forma polar, usamos $|\Gamma|$ e ϕ como a amplitude e o ângulo de Γ. Com Γ_r e Γ_i como as partes real e imaginária de Γ, respectivamente, escrevemos

$$\Gamma = \Gamma_r + j\Gamma_i \tag{108}$$

Logo

$$r + jx = \frac{1 + \Gamma_r + j\Gamma_i}{1 - \Gamma_r - j\Gamma_i} \tag{109}$$

As partes real e imaginária dessa equação são

$$r = \frac{1 - \Gamma_r^2 - \Gamma_i^2}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2} \tag{110}$$

$$x = \frac{2\Gamma_i}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2} \tag{111}$$

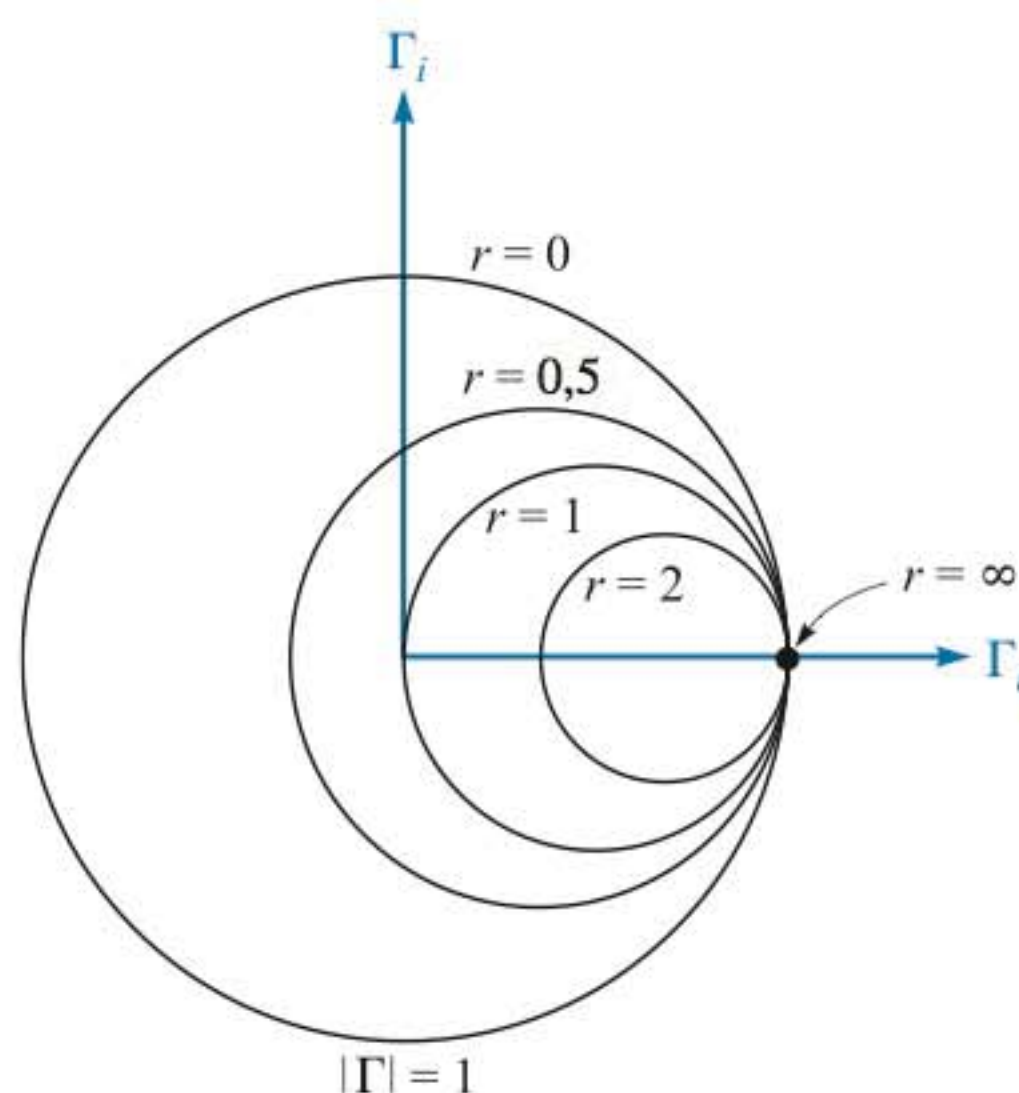



Figura 10.10 Círculos com r constante são mostrados no plano Γ_r, Γ_i. O raio de qualquer círculo é $1/(1 + r)$.

Após várias linhas de álgebra elementar, podemos escrever as Equações (110) e (111) em formas que mostram, prontamente, a natureza das curvas nos eixos Γ_r e Γ_i,

$$\left(\Gamma_r - \frac{r}{1+r}\right)^2 + \Gamma_i^2 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 \tag{112}$$

$$(\Gamma_r - 1)^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 \tag{113}$$

A primeira equação descreve uma família de círculos, onde cada círculo está associado com um valor específico de resistência r. Por exemplo, se $r = 0$, o raio desse círculo de resistência zero é visto como unitário, e está centrado na origem ($\Gamma_r = 0$, $\Gamma_i = 0$). Isso está de acordo, pois uma terminação com reatância pura leva a um coeficiente de reflexão

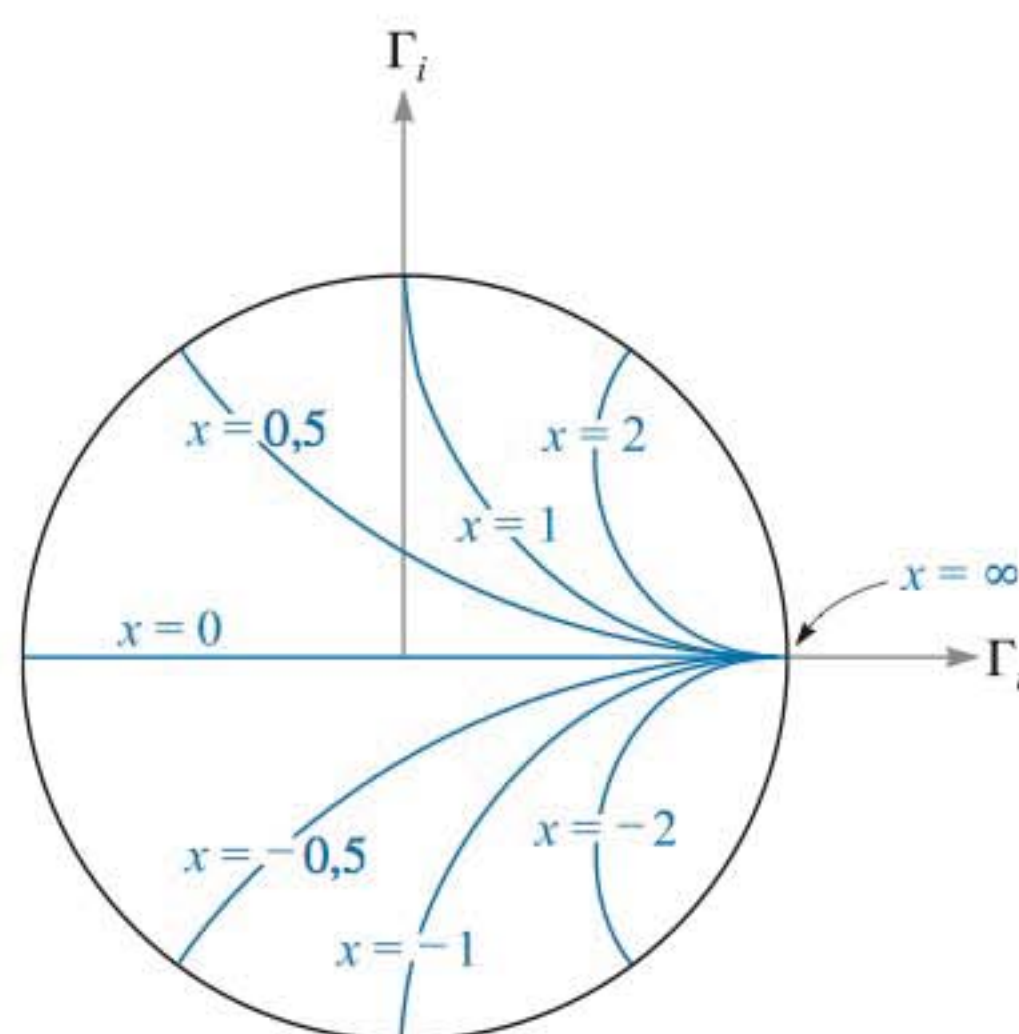



Figura 10.11 As porções dos círculos com x constante que se localizam dentro de $|\Gamma| = 1$ são mostrados nos eixos Γ_r, Γ_i. O raio de um dado círculo é $1/|x|$.

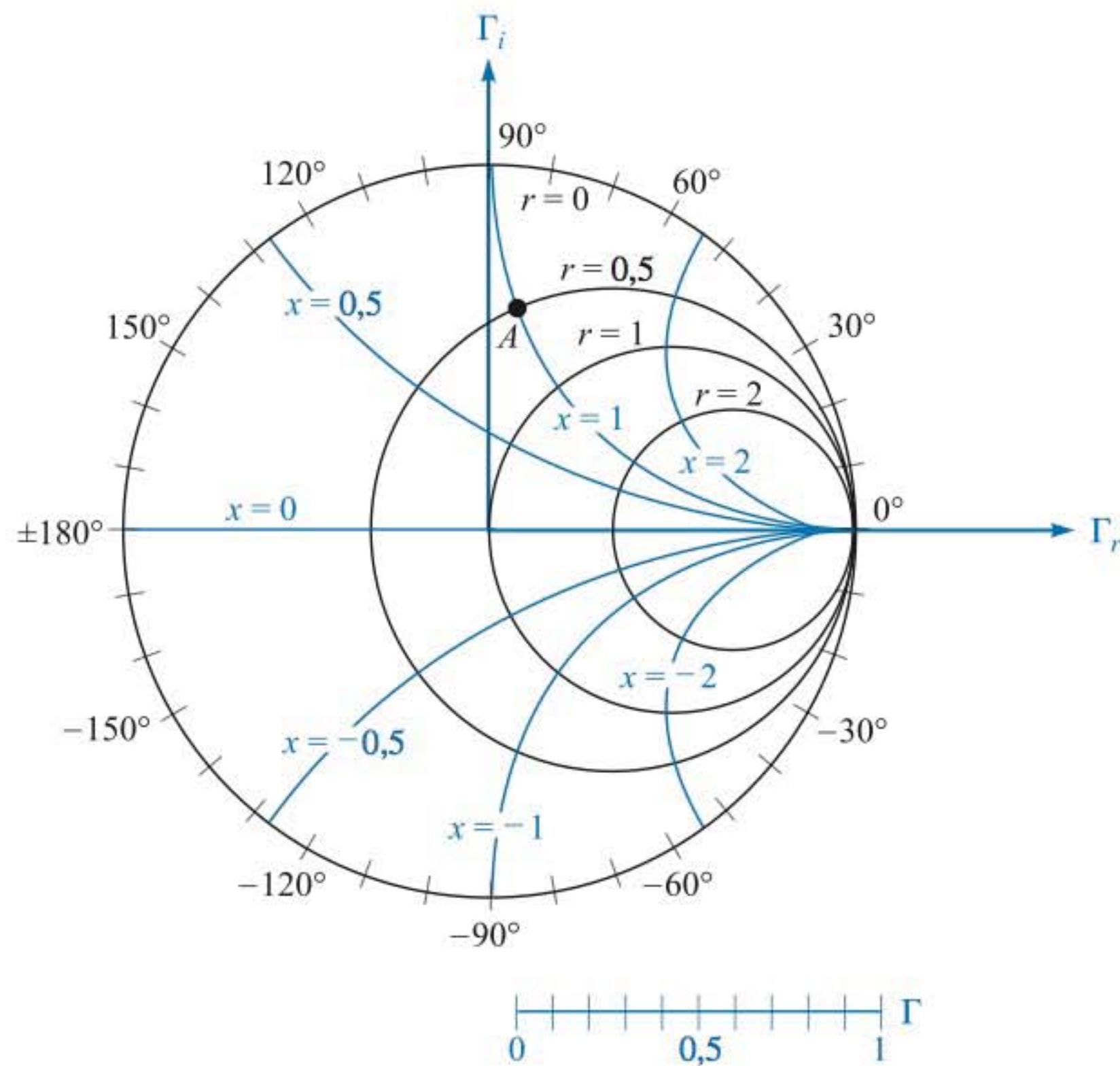



Figura 10.12 A carta de Smith contém os círculos de r constante e os círculos de x constante, além de uma escala radial auxiliar para determinar $|\Gamma|$ e uma escala angular na circunferência para medir ϕ.

de amplitude unitária. Por outro lado, se $r = \infty$, então $z_L = \infty$ e temos $\Gamma = 1 + j0$. O círculo descrito pela Equação (112) está centrado em $\Gamma_r = 1$, $\Gamma_i = 0$ e possui raio igual a zero. É, portanto, o ponto $\Gamma = 1 + j0$, conforme decidimos que seria. Como outro exemplo, o círculo para $r = 1$ está centrado em $\Gamma_r = 0{,}5$, $\Gamma_i = 0$ e tem um raio de 0,5. Esse círculo é mostrado na Figura 10.10, juntamente com círculos para $r = 0{,}5$ e $r = 2$. Todos os círculos estão centrados no eixo Γ_r e passam pelo ponto $\Gamma = 1 + j0$.

A Equação (113) também representa uma família de círculos, mas cada um desses círculos é definido por um valor particular de x, em vez de r. Se $x = \infty$, então $z_L = \infty$, e $\Gamma = 1 + j0$ de novo. O círculo descrito pela Equação (113) está centrado em $\Gamma = 1 + j0$ e possui raio zero. Logo, é o ponto $\Gamma = 1 + j0$. Se $x = +1$, então o círculo está centrado em $\Gamma = 1 + j1$ e possui raio unitário. Apenas um quarto desse círculo está dentro da fronteira dada pela curva $|\Gamma| = 1$, conforme mostrado na Figura 10.11. Um quarto de círculo similar aparece abaixo do eixo Γ_r para $x = -1$. As porções dos outros círculos para $x = 0{,}5$, $-0{,}5$, 2 e -2 são também mostrados. O "círculo" representando $x = 0$ é o eixo Γ_r. Ele também é identificado na Figura 10.11.

Ambas as famílias de círculos aparecem na carta de Smith, conforme mostrado na Figura 10.12. É agora evidente que, se nos for dado Z_L, devemos dividi-lo por Z_0 e obter z_L, posicionar os círculos r e x apropriados (interpolando-os se necessário) e determinar Γ pela interseção dos dois círculos. Uma vez que a carta não possui círculos concêntricos mostrando os valores de $|\Gamma|$, é necessário medir a distância radial da origem até a interseção com compasso e utilizar uma escala auxiliar para encontrar $|\Gamma|$. O segmento de reta graduado abaixo da carta na Figura 10.12 serve para esse

propósito. O ângulo de Γ é ϕ, e é o ângulo no sentido anti-horário a partir do eixo Γ_r. Novamente, linhas radiais mostrando o ângulo sobrecarregariam a carta, de forma que o ângulo é então indicado na circunferência do círculo. Uma linha reta partindo da origem e passando pela interseção pode ser estendida até o perímetro da carta. Como exemplo, se $Z_L = 25 + j50\ \Omega$ em uma linha de 50 Ω, $z_L = 0{,}5 + j1$, e o ponto A na Figura 10.12 mostra a interseção dos círculos $r = 0{,}5$ e $x = 1$. O coeficiente de reflexão é aproximadamente 0,62 em um ângulo ϕ de 83°.

A carta de Smith é completada adicionando-se uma segunda escala na circunferência na qual a distância ao longo da linha pode ser calculada. Essa escala é em unidades de comprimento de onda, mas os valores colocados nela não são óbvios. Para obtê-los, primeiramente dividimos a tensão em qualquer ponto ao longo da linha,

$$V_s = V_0^+(e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z})$$

pela corrente

$$I_s = \frac{V_0^+}{Z_0}(e^{-j\beta z} - \Gamma e^{j\beta z})$$

obtendo a impedância de entrada normalizada

$$z_{\text{entrada}} = \frac{V_s}{Z_0 I_s} = \frac{e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}}{e^{-j\beta z} - \Gamma e^{j\beta z}}$$

Substituindo z por $-l$ e dividindo o numerador e o denominador por $e^{j\beta l}$, temos a equação geral que relaciona a impedância de entrada normalizada, o coeficiente de reflexão e o comprimento da linha,

$$z_{\text{entrada}} = \frac{1 + \Gamma e^{-j2\beta l}}{1 - \Gamma e^{-j2\beta l}} = \frac{1 + |\Gamma| e^{j(\phi - 2\beta l)}}{1 - |\Gamma| e^{j(\phi - 2\beta l)}} \qquad (114)$$

Note que quando $l = 0$, estamos posicionados junto à carga, e $z_{\text{entrada}} = (1 + \Gamma)/(1 - \Gamma) = z_L$, conforme mostrado pela Equação (107).

A Equação (114) mostra que a impedância de entrada em qualquer ponto $z = -l$ pode ser obtida substituindo Γ, o coeficiente de reflexão na carga, por $\Gamma e^{-j2\beta l}$. Isto é, diminuímos o ângulo de Γ por $2\beta l$ radianos à medida que nos deslocamos da carga até a entrada da linha. Apenas o ângulo de Γ é mudado. A amplitude continua constante.

Com isso, à medida que vamos da carga z_L até a impedância de entrada z_{entrada}, nos movemos *em direção* ao gerador por uma distância l ao longo da linha de transmissão, mas nos movemos através de um ângulo *no sentido horário* de $2\beta l$ na carta de Smith. Uma vez que a amplitude de Γ permanece constante, o movimento em direção à fonte é realizado ao longo de um círculo de raio constante. Uma volta ao redor da carta é completada sempre que βl muda de π rad, ou quando l muda de meio comprimento de onda. Isso está de acordo com nossas descobertas anteriores de que a impedância de entrada de uma linha sem perdas de meia onda é igual à impedância de carga.

A carta de Smith é então completada pela adição de uma escala que mostra uma mudança de $0{,}5\lambda$ para uma circum-navegação do círculo unitário. Por conveniência, duas escalas são normalmente utilizadas: uma mostra um aumento na distância para um movimento no sentido horário, e a outra, um aumento para o deslocamento no

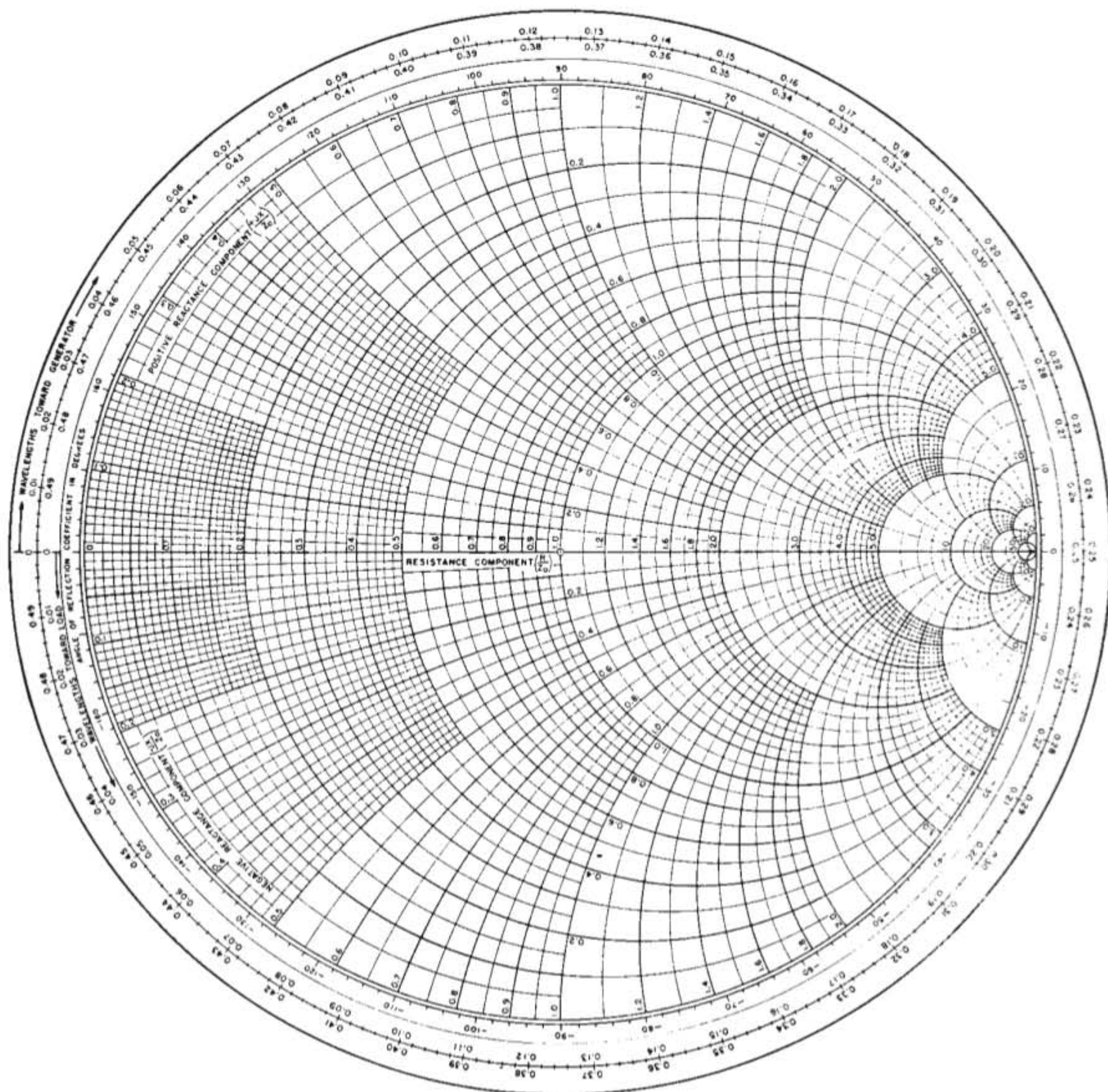



Figura 10.13 Uma redução fotográfica de uma versão de uma carta de Smith útil (cortesia da Emeloid Company, Hillside, N.J.). Para um trabalho minucioso, cartas mais amplas estão sempre disponíveis nos locais onde livros técnicos de qualidade são vendidos.

sentido anti-horário. Essas duas escalas são mostradas na Figura 10.13. Note que aquela identificada como "comprimentos de onda em direção ao gerador" (WTG) mostra valores crescentes de l/λ para deslocamento no sentido horário, conforme descrito anteriormente. O ponto zero dessa escala é arbitrariamente colocado à esquerda. Isso corresponde a impedâncias de entrada que possuem ângulos de fase de 0° e $R_L < Z_0$. Vimos também que mínimos de tensão estão sempre localizados aqui.

EXEMPLO 10.10

O uso da carta para a linha de transmissão é melhor demonstrado com um exemplo. Vamos considerar novamente uma impedância de carga $Z_L = 25 + j50\ \Omega$, no final de

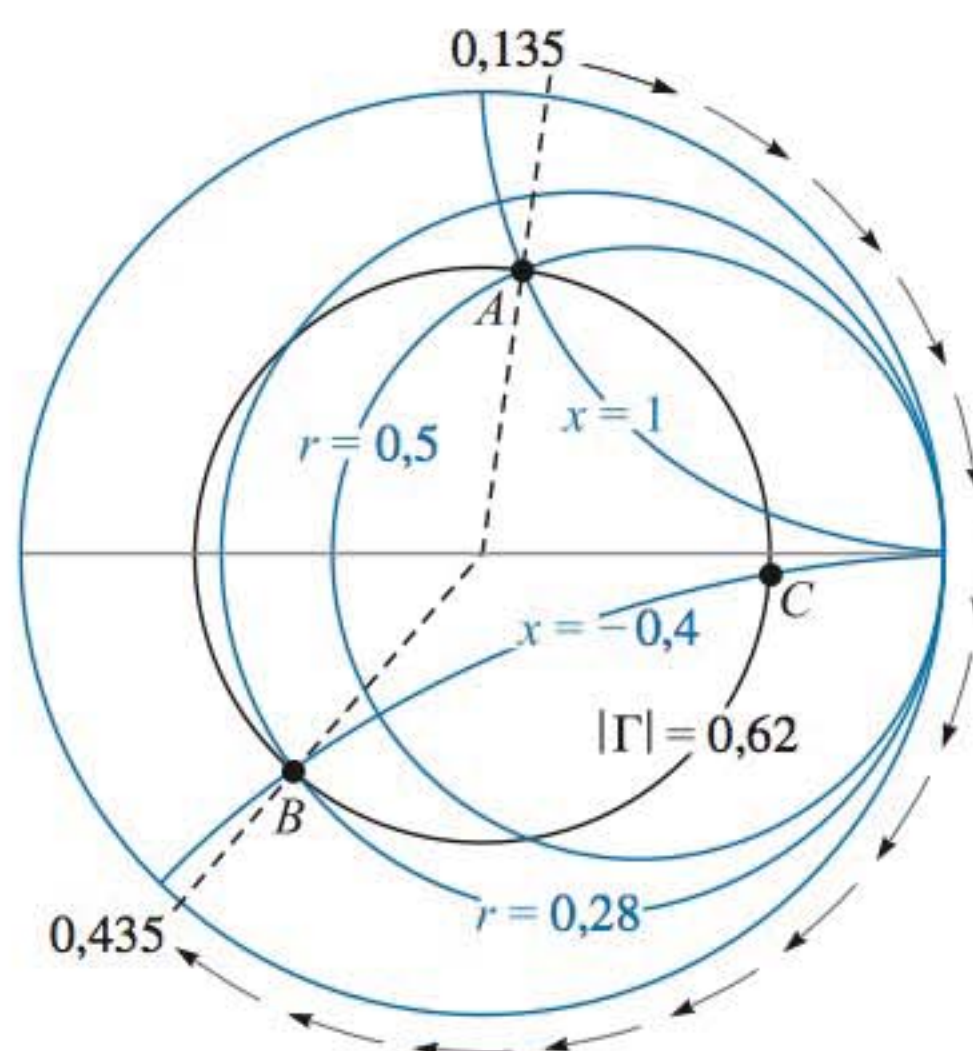



Figura 10.14 A impedância de entrada normalizada produzida por uma impedância de carga normalizada $z_L = 0,5 + j1$ em uma linha com $0,3\lambda$ de comprimento vale $z_{entrada} = 0,28 - j0,40$.

uma linha de 50 Ω. O comprimento da linha é de 60 cm e a frequência de operação é tal que o comprimento de onda na linha é de 2 m. Desejamos obter a impedância de entrada.

Solução. Temos $z_L = 0,5 + j1$, que é identificado como A na Figura 10.14, e lemos $\Gamma = 0,62\angle 82°$. Desenhando uma linha reta da origem, passando por A até a circunferência, temos uma leitura de 0,135 na escala de WTG. Temos $l/\lambda = 0,6/2 = 0,3$, e assim $0,3\lambda$ da carga até a entrada. Encontramos então $z_{entrada}$ em um ponto do círculo oposto $|\Gamma| = 0,62$ associado à leitura de WTG $= 0,135 + 0,300 = 0,435$. Essa construção é mostrada na Figura 10.14, e o ponto que localiza a impedância de entrada é identificado como B. A impedância de entrada normalizada é lida como $0,28 - j0,40$, e assim $Z_{entrada} = 14 - j20$. Um cálculo analítico mais exato fornece $Z_{entrada} = 13,7 - j20,2$.

Informações relacionadas à localização dos máximos e mínimos de tensão são também prontamente obtidas na carta de Smith. Já sabemos que um máximo ou um mínimo deve ocorrer na carga quando Z_L é uma resistência pura. Se $R_L > Z_0$ existe um máximo na carga, e se $R_L < Z_0$ existe um mínimo. Vamos estender esse resultado agora notando que podemos retirar um pedaço de uma linha de transmissão, no lado da carga, dividindo-a em um ponto onde a impedância de entrada seja uma resistência pura, e substituir tal seção por uma resistência $R_{entrada}$. Não haveria mudança na porção da linha no lado do gerador. Segue, então, que aqueles máximos e mínimos de tensão devem estar localizados naqueles pontos em que $Z_{entrada}$ é uma resistência pura. Impedâncias de entrada puramente resistivas devem ocorrer na linha $x = 0$ (o eixo Γ_r) da carta de Smith. Máximos de tensão ou mínimos de corrente ocorrem quando $r > 1$, ou em WTG $= 0,25$, e mínimos de tensão ou máximos de corrente ocorrem quando $r < 1$, ou em WTG $= 0$. No Exemplo 10.10, então, o máximo em WTG $= 0,250$ deve ocorrer em $0,250 - 0,135 = 0,115$ comprimento de

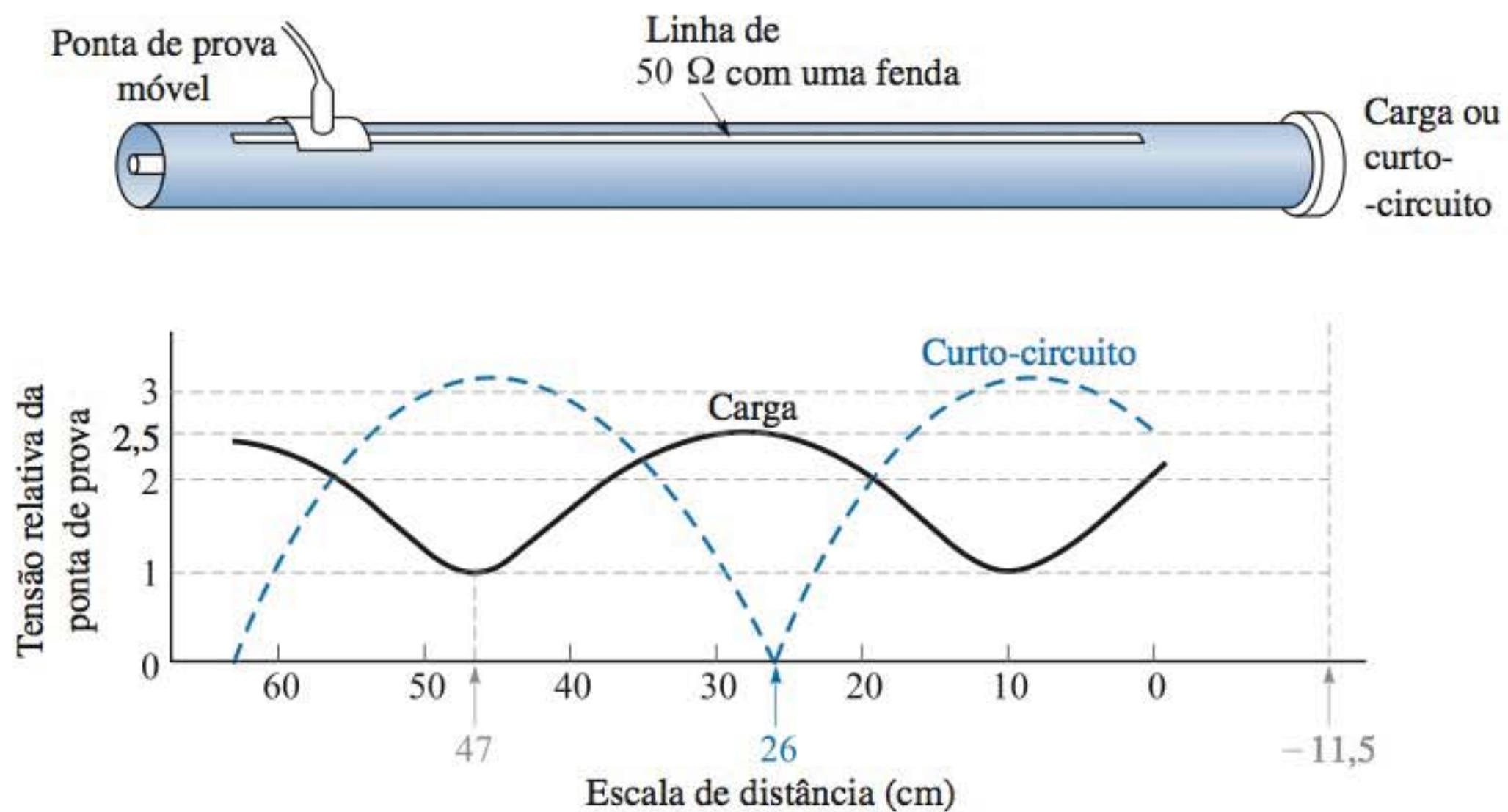



Figura 10.15 Um esboço de uma linha coaxial com uma fenda. A escala de distância está na linha com a fenda. Com a carga no lugar, $s = 2{,}5$, o mínimo ocorre em uma leitura de 47 cm na escala. Para um curto-circuito, o mínimo se localiza em uma leitura de 26 cm na escala. O comprimento de onda é de 75 cm.

onda em direção ao gerador a partir da carga. Isso corresponde a uma distância de $0{,}115 \times 200$ (ou 23 cm) da carga.

Devemos notar também que, uma vez que a taxa de onda estacionária produzida por uma carga resistiva R_L vale R_L/R_0 ou R_0/R_L, de acordo com o que for maior que uma unidade, o valor de s pode ser lido diretamente como o valor de r na interseção do círculo $|\Gamma|$ com o eixo r, $r > 1$. No nosso exemplo, essa interseção está identificada como ponto C, sendo $r = 4{,}2$. Logo, $s = 4{,}2$.

As cartas de linhas de transmissão podem também ser utilizadas para admitâncias normalizadas, apesar de existirem diversas diferenças sutis neste caso. Façamos $y_L = Y_L/Y_0 = g + jb$ e usemos os círculos r como círculos g e os círculos x como círculos b. As duas diferenças são: (1) o segmento de reta onde $g > 1$ e $b = 0$ corresponde a um mínimo de tensão, e (2) devem ser adicionados 180° ao ângulo de Γ quando lido do perímetro da carta. Vamos utilizar a carta de Smith dessa maneira na Seção 10.14.

Cartas especiais também estão disponíveis para linhas não normalizadas, particularmente cartas de 50 Ω e cartas de 20 mS.

EP10.6. Uma carga $Z_L = 80 - j100\ \Omega$ está posicionada em $z = 0$ em uma linha sem perdas de 50 Ω. A frequência de operação é de 200 MHz e o comprimento de onda na linha é de 2 m. (*a*) Se a linha possui 0,8 m de comprimento, use a carta de Smith para encontrar a impedância de entrada. (*b*) Quanto vale s? (*c*) Qual é a distância em relação à carga do máximo de tensão mais próximo? (*d*) Qual é a distância em relação à entrada do ponto mais próximo no qual o resto da linha poderia ser substituído por uma resistência pura?

Resp. $79 + j99\Omega$; 4,50; 0,0397 m; 0,760 m

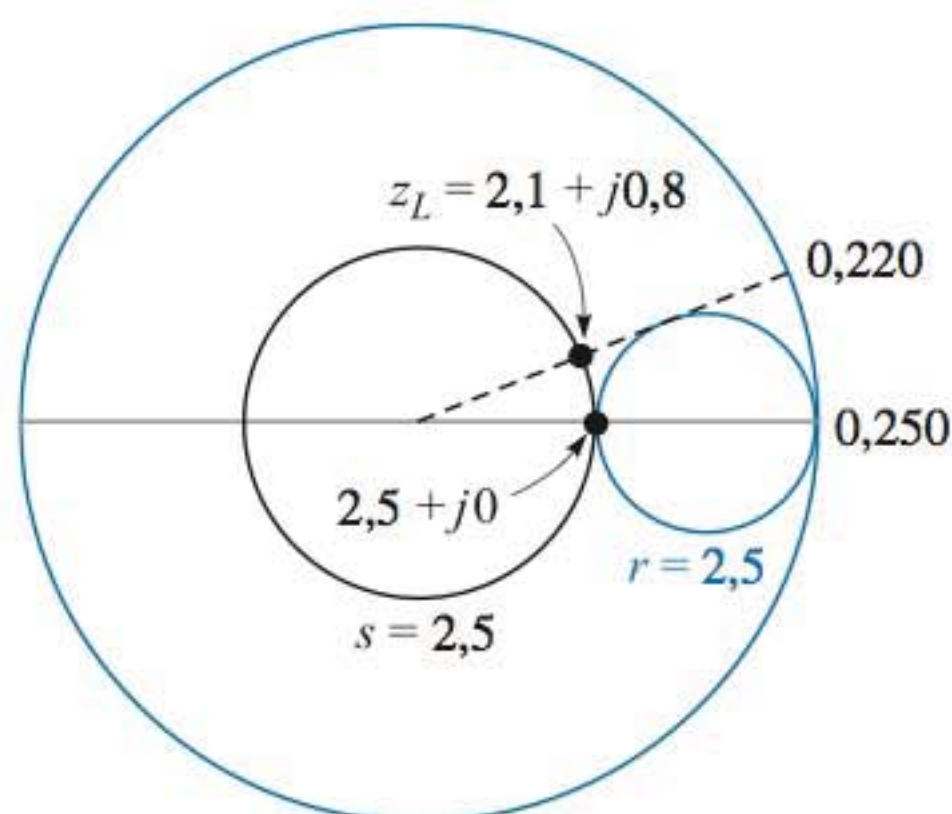



Figura 10.16 Se $z_{entrada} = 2,5 + j0$ em uma linha de comprimento igual a 0,3 comprimento de onda, então $z_L = 2,1 + j0,8$.

Em seguida, consideramos dois exemplos de problemas práticos de linhas de transmissão. O primeiro é a determinação da impedância de carga a partir de dados experimentais, e o segundo é o projeto de um estube único para casamento de uma rede.

Vamos supor que fizemos medições experimentais em uma linha de 50 Ω com uma fenda que mostraram uma taxa de onda estacionária para tensão de 2,5. Isso foi determinado deslizando-se uma ponta de prova para frente e para trás ao longo da linha para determinar as leituras de tensões máxima e mínima. Uma escala posicionada nos trilhos, ao longo dos quais a ponta se deslocava, indica que um *mínimo* ocorre em uma leitura de 47,0 cm da escala, conforme mostrado na Figura 10.15. O ponto zero da escala é arbitrário e não corresponde à localização da carga. Normalmente a localização do mínimo é especificada, pois pode ser determinada de forma mais exata que a localização do máximo. Pense nos mínimos mais pontiagudos de uma onda senoidal retificada. A frequência de operação é de 400 MHz, portanto o comprimento de onda será 75 cm. Para que localizemos exatamente a posição da carga, devemos removê-la e substituí-la por um curto-circuito. A posição do mínimo é então determinada como 26,0 cm.

Figura 10.17 Um estube de curto-circuito de comprimento d_1, localizado a uma distância d da carga Z_L, é utilizado para proporcionar um casamento de impedância visto da esquerda do estube.

Sabemos que o curto-circuito deve estar localizado em um número inteiro de meios comprimentos de onda em relação a um mínimo. Vamos arbitrariamente posicioná-lo a meio comprimento de onda de distância, em 26,0 – 37,5 = –11,5 cm na escala. Uma vez que o curto-circuito substituiu a carga, a carga também estará localizada em –11,5 cm. Nossos dados então mostram que o mínimo está em 47,0 – (–11,5) = 58,5 cm em relação à carga, ou, subtraindo meio comprimento de onda, um mínimo está a 21,0 cm da carga. O *máximo* de tensão está então a 21,0 – (37,5/2) = 2,25 cm da carga, ou a 2,25/75 = 0,030 comprimento de onda da carga.

Com essa informação, podemos agora considerar a carta de Smith. No máximo de tensão, a impedância de entrada é uma resistência pura igual a sR_0. Em uma base normalizada, $z_{\text{entrada}} = 2{,}5$. Entramos então na carta em $z_{\text{entrada}} = 2{,}5$ e lemos 0,250 na escala WTG. Subtraindo 0,030 comprimento de onda para alcançar a carga, encontramos que a interseção do círculo $s = 2{,}5$ (ou $|\Gamma| = 0{,}429$) com a linha radial até 0,220 comprimento de onda está em $z_L = 2{,}1 + j0{,}8$. A construção está esboçada na carta de Smith da Figura 10.16. Logo, $Z_L = 105 + j40\ \Omega$, um valor cuja localização é um ponto de leitura de –11,5 cm na escala, ou um número inteiro de meios comprimentos de onda em relação a essa posição. É claro que podemos selecionar a "localização" de nossa carga onde quisermos, colocando o curto circuito no ponto no qual desejamos considerá-la. Uma vez que as localizações das cargas não são bem definidas, é importante especificar o ponto (ou plano) no qual a impedância de carga é determinada.

Como um exemplo final, vamos tentar casar essa carga com a linha de 50 Ω colocando um estube de curto-circuito de comprimento d_1 a uma distância d da carga (Ver Figura 10.17). O estube tem a mesma impedância característica da linha principal. Os comprimentos d e d_1 devem ser determinados.

A impedância de entrada para o estube é uma reatância pura. Quando combinada em paralelo com a impedância de entrada do comprimento d que contém a carga, a

Figura 10.18 Uma carga normalizada, $z_L = 2{,}1 + j0{,}8$, é casada colocando-se um estube de curto-circuito de 0,129 comprimento de onda a uma distância de 0,19 comprimento de onda a partir da carga.

impedância de entrada resultante deve ser $1 + j0$. Como é muito mais fácil combinar admitâncias em paralelo do que impedâncias, vamos redefinir nosso objetivo considerando a admitância: a admitância de entrada do comprimento d que contém a carga deve ser $1 + jb_{entrada}$ quando se adiciona a admitância de entrada do estube jb_{estube} para produzir uma admitância total de $1 + j0$. Com isso, a admitância do estube é $-jb_{entrada}$. Vamos então utilizar a carta de Smith como uma carta de admitâncias em vez de usá-la como uma carta de impedâncias.

A impedância da carga é $2{,}1 + j0{,}8$, e sua localização é em –11,5 cm. A admitância da carga é então $1/(2{,}1 + j0{,}8)$, e esse valor pode ser determinado adicionando-se um quarto de comprimento de onda à carta de Smith, uma vez que $Z_{entrada}$ para uma linha de um quarto de comprimento de onda vale R_0^2/Z_L, ou $z_{entrada} = 1/z_L$, ou $y_{entrada} = z_L$. Entrando na carta (Figura 10.18) em $z_L = 2{,}1 + j0{,}8$, lemos 0,220 na escala WTG. Somamos (ou subtraímos) 0,250 e encontramos a admitância $0{,}41 - j0{,}16$ correspondendo a essa impedância. Este ponto ainda está localizado no círculo $s = 2{,}5$. Neste caso, em que ponto ou pontos nesse círculo a parte real da admitância é igual à unidade? Existem duas respostas: $1 + j0{,}95$ em WTG = 0,16, e $1 - j0{,}95$ em WTG = 0,34, conforme mostrado na Figura 10.18. Vamos escolher o primeiro valor, uma vez que ele leva ao estube mais curto. Logo, $y_{estube} = -j0{,}95$, e a localização do estube corresponde a WTG = 0,16. Uma vez que a admitância da carga foi encontrada em WTG = 0,470, então devemos nos deslocar (0,5 – 0,47) + 0,16 = 0,19 comprimento de onda para chegar até a localização do estube.

Finalmente, podemos utilizar a carta para determinar o comprimento necessário para o estube de curto-circuito. A condutância de entrada é zero para qualquer comprimento de estube de curto-circuito, e assim ficamos restritos ao perímetro da carta. No curto-circuito, $y = \infty$ e WTG = 0,250. Encontramos que $b_{entrada} = -0{,}95$ é alcançado em WTG = 0,379, conforme mostrado na Figura 10.18. O estube tem, então, 0,379 – 0,250 = 0,129 comprimento de onda, ou 9,67 cm de comprimento.

EP10.7. Medições de onda estacionária em uma linha sem perdas de 75 Ω mostram máximos de 18 V e mínimos de 5 V. Um mínimo está localizado em uma leitura de 30 cm na escala. Com a carga substituída por um curto-circuito, dois mínimos adjacentes são encontrados nas leituras de escala de 17 e 37 cm. Calcule: (*a*) s; (*b*) λ; (*c*) f; (*d*) Γ_L; (*e*) Z_L.

Resp. 3,60; 0,400 m; 750 MHz; $0{,}704\angle{-33{,}0}$; $77{,}9 + j104{,}7\ \Omega$

EP10.8. Uma carga normalizada, $z_L = 2 - j1$, está localizada em $z = 0$ em uma linha sem perdas de 50 Ω. Seja o comprimento de onda 100 cm. (*a*) Um estube de curto-circuito está para ser posicionado em $z = -d$. Qual é o menor valor adequado para d? (*b*) Qual é o menor comprimento possível para o estube? Calcule s: (*c*) na linha principal para $z < -d$; (*d*) na linha principal para $-d < z < 0$; (*e*) no estube.

Resp. 12,5 cm; 12,5 cm; 1,00; 2,62; ∞

10.14 ANÁLISE TRANSIENTE

Animação

Ao longo da maior parte deste capítulo, consideramos a operação de linhas de transmissão sob condições de regime permanente, nas quais a tensão e a corrente eram senoidais e tinham uma frequência única. Nesta seção, nos afastaremos desse caso simples de variação harmônica no tempo e vamos considerar as respostas das linhas de transmissão a funções degrau de tensão e pulsos, agrupados sob o título geral de *transientes*. Essas situações foram brevemente consideradas na Seção 10.2 quando se abordou tensões e correntes chaveadas. É importante estudar a operação da linha em modo transiente porque isso nos permite entender como linhas podem ser utilizadas para armazenar e liberar energia (em aplicações de formação de pulsos, por exemplo). A propagação de pulsos é algo muito importante, pois os sinais digitais, compostos por sequências de pulso, são largamente utilizados.

Vamos restringir nossa discussão à propagação de transientes em linhas sem perdas e que não apresentam distorção, de forma que o comportamento básico e os métodos de análise possam ser aprendidos. Devemos nos lembrar, entretanto, que sinais transientes são necessariamente compostos de muitas frequências, como uma análise de Fourier pode mostrar. Consequentemente, aparece a questão da dispersão na linha, já que, como vimos, as constantes de propagação na linha e os coeficientes

(*a*)

(*b*)

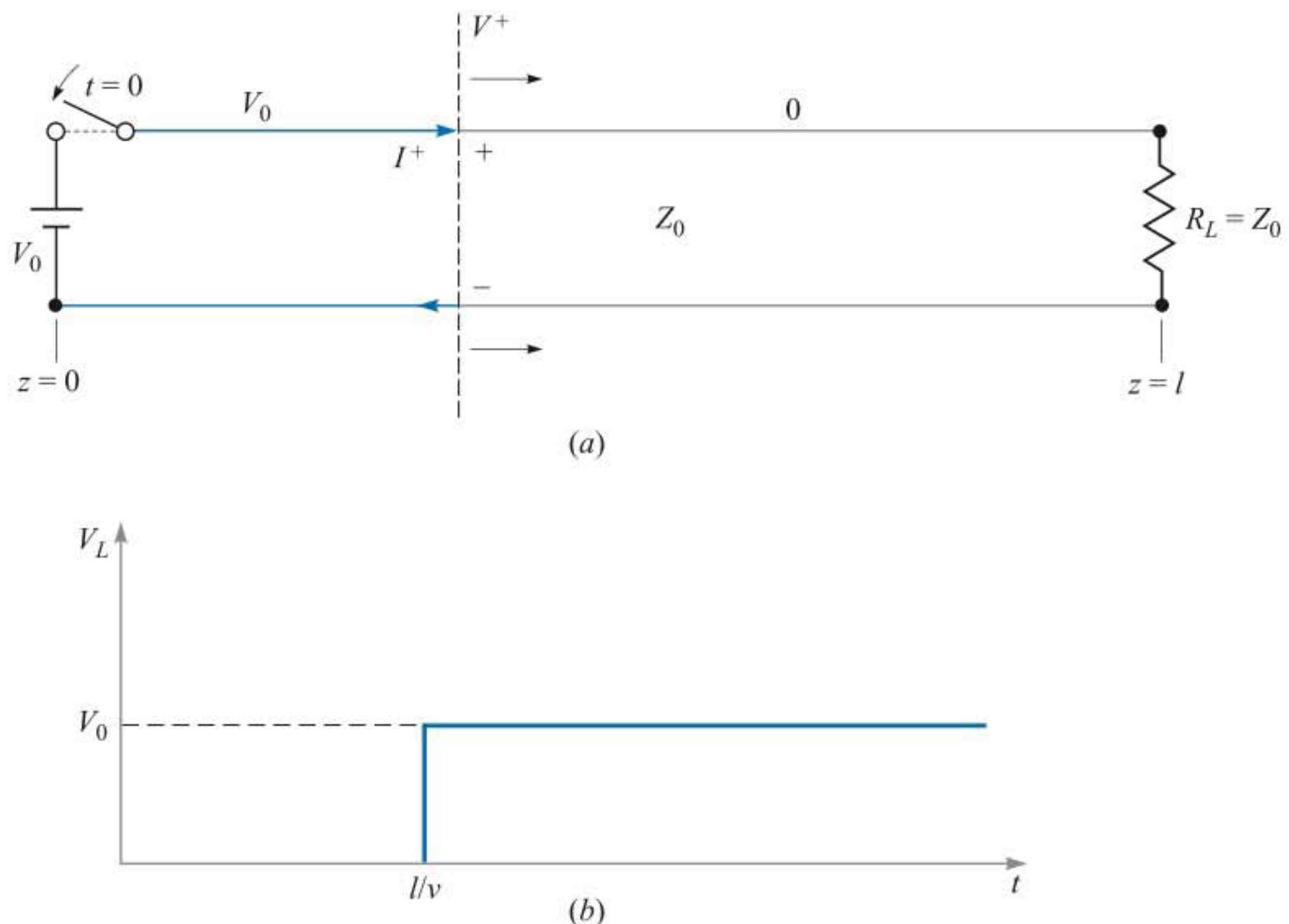



Figura 10.19 (*a*) Ao se fechar a chave no tempo $t = 0$, as ondas de tensão e de corrente V^+ e I^+ são iniciadas. A frente das duas ondas é indicada pela linha pontilhada, que se propaga na linha sem perdas em direção à carga a uma velocidade v. Neste caso, $V^+ = V_0$. A tensão na linha vale V^+ em todos os pontos à esquerda da frente da onda, onde a corrente vale $I^+ = V^+/Z_0$. À direita da frente da onda, a tensão e também a corrente são zero. A corrente no sentido horário, aqui indicada, é tratada como positiva e ocorre quando V^+ é positivo. (*b*) Tensão sobre o resistor de carga em função do tempo, mostrando o tempo de trânsito l/v relativo à propagação de um lado para o outro da linha.

de reflexão em cargas complexas serão dependentes da frequência. Dessa forma, temos que os pulsos geralmente tendem a se alargar com a distância propagada, e as formas dos pulsos podem mudar quando refletirem em uma carga complexa. Essas questões não serão aqui tratadas em detalhes, mas serão diretamente consideradas quando as dependências precisas com a frequência de β e Γ forem conhecidas. Em particular, $\beta(\omega)$ pode ser encontrada calculando-se a parte imaginária de γ, conforme dado pela Equação (41), que em geral incluiria as dependências com a frequência de R, C, G e L que aparecem devido a diversos mecanismos. Como exemplo, o efeito pelicular (que afeta tanto a resistência do condutor quanto sua indutância interna) resultará em R e L dependentes da frequência. Se $\beta(\omega)$ é conhecido, o alargamento de pulsos pode ser calculado utilizando-se métodos a serem apresentados no Capítulo 12.

Começamos nossa discussão básica de transientes considerando uma linha de transmissão sem perdas de comprimento l terminada por uma impedância de casamento $R_L = Z_0$, conforme mostrado na Figura 10.19*a*. Na extremidade da frente da linha está colocada uma bateria de tensão V_0, que é conectada à linha quando se fecha uma chave. No tempo $t = 0$, a chave é fechada, e a tensão na linha em $z = 0$ se tona igual à tensão da bateria. Essa tensão, entretanto, não aparece sobre a carga até que um tempo adequado tenha se passado relativo ao atraso de propagação. Especificamente, em $t = 0$, uma onda de tensão é iniciada na linha na extremidade onde está a bateria, que então se propaga em direção à carga. A frente da onda, chamada V^+ na Figura 10.19, tem valor $V^+ = V_0$. Pode-se pensar nela como se fosse a propagação de uma função degrau, uma vez que em todos os pontos à esquerda de V^+ a tensão da linha vale V_0. Em todos os pontos à direita (os quais ainda não foram atingidos pela frente da onda) a tensão na linha é zero. A onda se propaga em uma velocidade v, que em geral é a velocidade de grupo da linha.[4] A onda atinge a carga no tempo $t = l/v$ e então não reflete, já que há o casamento de impedâncias. O período transiente acaba então, e a tensão na carga fica igual à tensão na fonte. Um gráfico da tensão na carga em função do tempo é mostrado na Figura 10.19*b*, indicando o tempo de propagação de $t = l/v$.

Associada à onda de tensão V^+ está uma onda de corrente cuja frente de onda tem valor I^+. Essa onda é uma função degrau viajante da mesma maneira, cujos valores em todos os pontos à esquerda de V^+ valem $I^+ = V^+/Z_0$. Em todos os pontos à direita, a corrente é zero. Um gráfico da corrente na carga em função do tempo será idêntico, em forma, ao gráfico da tensão da Figura 10.19*b*, exceto pelo fato de que a corrente na carga em $t = l/v$ será $I_L = V^+/Z_0 = V_0/R_L$.

Em seguida, consideramos um caso mais geral, no qual a carga da Figura 10.19*a* é novamente um resistor, mas que *não está casado* com a linha ($R_L \neq Z_0$). Deste modo, reflexões ocorrerão na carga, complicando o problema. Em $t = 0$, a chave é fechada como antes e uma onda de tensão $V_1{}^+ = V_0$ se propaga para a direita. Quando atinge a carga, entretanto, a onda neste caso sofre uma reflexão, produzindo uma

[4] Uma vez que temos uma função degrau (composta de muitas frequências) em vez de uma senoide de frequência única, a onda se propagará na velocidade de grupo. Em uma linha sem perdas e sem dispersão como considerado nessa seção, $\beta = \omega\sqrt{LC}$, onde L e C são constantes com a frequência. Neste caso notaríamos que as velocidades de grupo de fase são iguais, isto é, $d\omega/d\beta = \omega/\beta = v = 1/\sqrt{LC}$. Escreveremos então a velocidade como v, sabendo que ela se refere tanto a v_p quanto a v_g.

onda que se propaga de volta, V_1^-. A relação entre V_1^- e V_1^+ é dada pelo coeficiente de reflexão na carga:

$$\frac{V_1^-}{V_1^+} = \Gamma_L = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} \tag{115}$$

Conforme V_1^- se propaga em sentido contrário, na direção da bateria, ela deixa para trás da sua extremidade frontal (frente de onda) uma tensão total $V_1^+ + V_1^-$. A tensão V_1^+ existe em todos os pontos à frente da onda V_1^- até que ela atinja a bateria, quando então a linha inteira estará carregada com uma tensão $V_1^+ + V_1^-$. Na bateria, a onda V_1^- reflete e produz uma nova onda progressiva, V_2^+. A razão entre V_2^+ e V_1^- é dada pelo coeficiente de reflexão na bateria:

$$\frac{V_2^+}{V_1^-} = \Gamma_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0} = \frac{0 - Z_0}{0 + Z_0} = -1 \tag{116}$$

onde a impedância na extremidade do gerador, Z_g, é a impedância da bateria, ou zero.

V_2^+ (igual a $-V_1^-$) agora se propaga em direção à carga, onde reflete produzindo uma onda regressiva $V_2^- = \Gamma_L V_2^+$. Essa onda então retorna à bateria, onde sofre reflexão com $\Gamma_g = -1$, e o processo se repete. Note que a cada nova volta completa a onda é reduzida de amplitude, pois $|\Gamma_L| < 1$. Por causa disso, as ondas de tensão viajantes aos poucos se aproximarão de zero, e o regime permanente é alcançado.

A tensão sobre o resistor de carga pode ser encontrada em qualquer tempo dado somando-se as ondas de tensão que chegaram na carga e as que nela refletiram até o momento desejado. Após muitas voltas, a tensão na carga será, em geral,

$$\begin{aligned} V_L &= V_1^+ + V_1^- + V_2^+ + V_2^- + V_3^+ + V_3^- + \cdots \\ &= V_1^+ \left(1 + \Gamma_L + \Gamma_g\Gamma_L + \Gamma_g\Gamma_L^2 + \Gamma_g^2\Gamma_L^2 + \Gamma_g^2\Gamma_L^3 + \cdots\right) \end{aligned}$$

Com uma operação simples de fatoração, a equação anterior se torna

$$V_L = V_1^+ (1 + \Gamma_L)\left(1 + \Gamma_g\Gamma_L + \Gamma_g^2\Gamma_L^2 + \cdots\right) \tag{117}$$

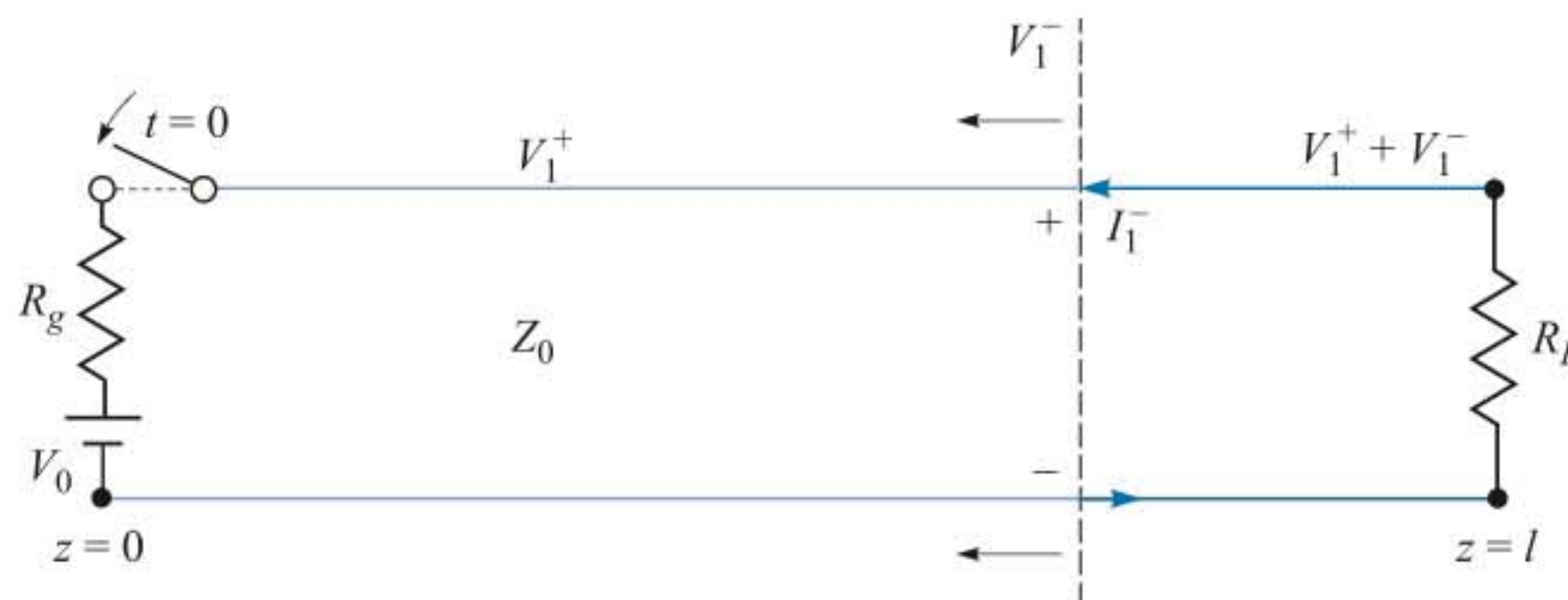



Figura 10.20 Com resistência em série junto à bateria, uma divisão de tensão ocorre quando a chave é fechada, de forma que $V_0 = V_{Rg} + V_1^+$. A primeira onda refletida é mostrada, a qual deixa uma tensão $V_1^+ + V_1^-$ para trás de sua extremidade frontal. Associada à onda está a corrente I_1^- que vale $-V_1^-/Z_0$. Uma corrente anti-horária é tratada como negativa e ocorrerá quando V_1^- for positivo.

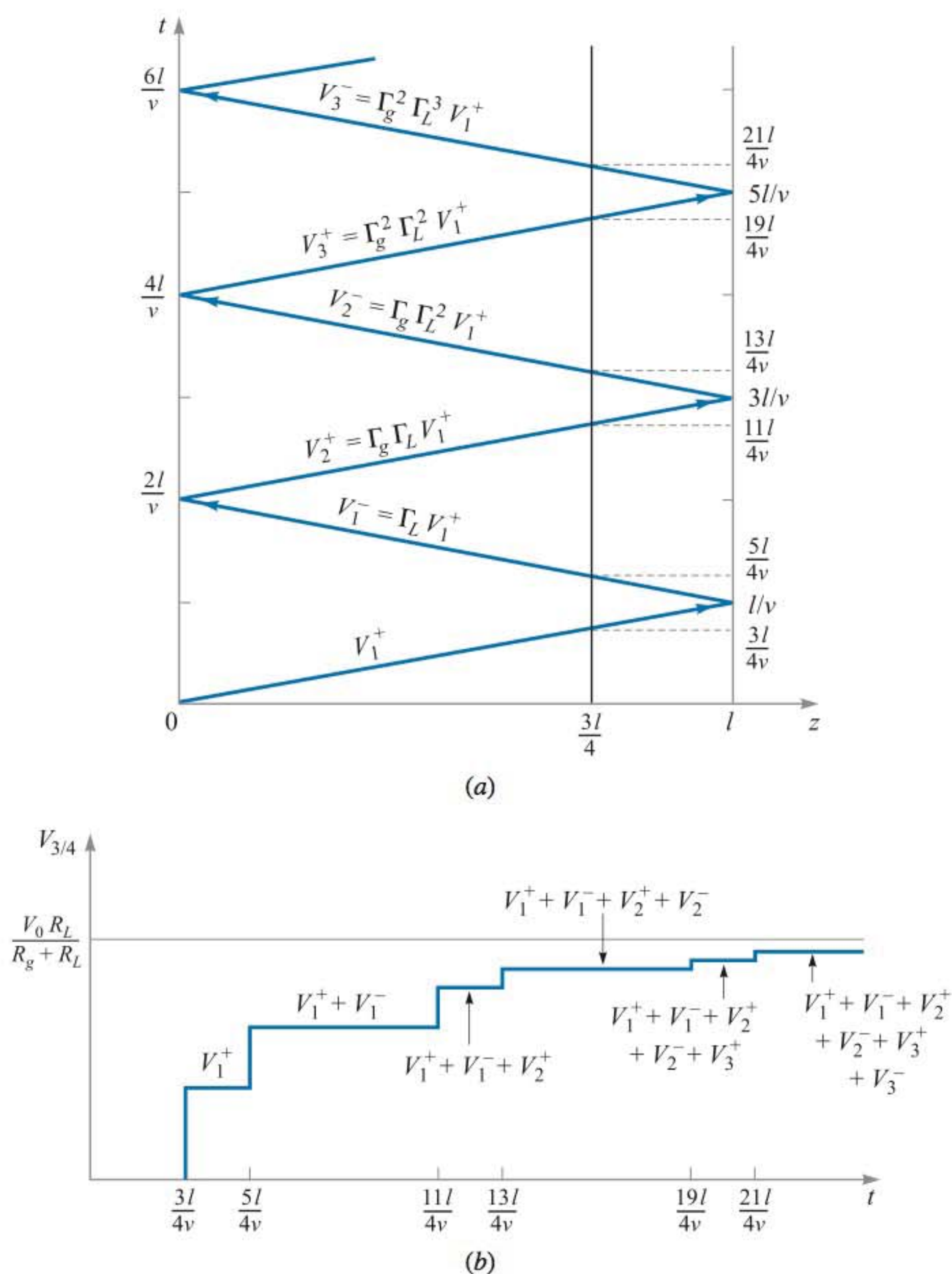



Figura 10.21 (*a*) Diagrama de reflexão de tensão para a linha da Figura 10.20. Uma linha de referência, desenhada em $z = 3l/4$, é utilizada para se calcular a tensão naquela posição em função do tempo. (*b*) A tensão na linha em $z = 3l/4$ conforme determinada pelo diagrama de reflexão de (*a*). Note que a tensão se aproxima do valor esperado $V_0R_L/(R_g + R_L)$ à medida que o tempo se aproxima do infinito.

Permitindo que o tempo se aproxime do infinito, o segundo termo entre parênteses na Equação (117) se torna uma expansão em série de potências para a expressão $1/(1 - \Gamma_g\Gamma_L)$. Logo, em regime permanente obtemos

$$V_L = V_1^+ \left(\frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_g \Gamma_L} \right) \tag{118}$$

No nosso exemplo atual, $V_1{}^+ = V_0$ e $\Gamma_g = -1$. Substituindo-os na Equação (118), encontramos o resultado esperado em regime permanente: $V_L = V_0$.

Uma situação mais geral envolveria uma impedância diferente de zero junto à bateria, conforme mostrado na Figura 10.20. Neste caso, um resistor de valor R_g é posicionado em série com a bateria. Quando a chave é fechada, a tensão da bateria aparece sobre a combinação em série de R_g com a impedância característica da linha, Z_0. O valor da onda de tensão inicial, V_1^+, é então encontrado por uma divisão de tensão simples, ou

$$V_1^+ = \frac{V_0 Z_0}{R_g + Z_0} \tag{119}$$

Com esse valor inicial, a sequência de reflexões e o desenvolvimento da tensão sobre a carga ocorrem da mesma maneira determinada pela Equação (117), com o valor de regime permanente determinado pela Equação (118). O valor do coeficiente de reflexão na extremidade onde está o gerador, determinado pela Equação (116), é $\Gamma_g = (R_g - Z_0)/(R_g + Z_0)$.

Uma maneira útil de seguir o trajeto da tensão em qualquer ponto da linha é utilizar um *diagrama de reflexão de tensão**. Tal diagrama para a linha da Figura 10.20 é mostrado na Figura 10.21*a*. É um gráfico bidimensional no qual a posição na linha, z, é mostrada no eixo horizontal. O tempo é representado no eixo vertical e é convenientemente expresso da maneira pela qual ele se relaciona com a posição e com a velocidade, por $t = z/v$. Uma linha vertical, colocada em $z = l$, é desenhada. Esta, juntamente com a ordenada, define os limites da linha de transmissão no eixo z. Com a chave posicionada junto à bateria, a onda inicial, V_1^+, começa na origem, ou vértice inferior esquerdo do diagrama ($z = t = 0$). A localização da frente de onda de V_1^+ em função do tempo é mostrada como uma linha diagonal que une a origem com o ponto ao longo da linha vertical do lado direito que corresponde ao tempo $t = l/v$ (tempo de trânsito de um lado para o outro). De lá (posição da carga), a localização da frente de onda da onda refletida, V_1^-, é mostrada como uma linha "refletida" que une o ponto $t = l/v$ no limite à direita ao ponto $t = 2l/v$ no eixo das ordenadas. De lá (posição da bateria), a onda sofre nova reflexão, formando V_2^+, mostrada como uma linha paralela àquela de V_1^+. Ondas refletidas subsequentes são mostradas, e seus valores são indicados.

A tensão em função do tempo em uma dada posição na linha pode agora ser determinada somando-se as tensões nas ondas à medida que elas cruzam uma linha vertical desenhada na localização desejada. Essa adição é realizada começando-se pela parte de baixo do diagrama ($t = 0$) e progredindo para cima (no tempo). Sempre que uma onda de tensão cruzar a linha vertical, seu valor é somado ao total naquele tempo. Como exemplo, a tensão em uma posição a três quartos de distância da bateria à carga está mostrada na Figura 10.21*b*. Para obter esse gráfico, a linha $z = (3/4)l$ é desenhada no diagrama. Sempre que uma onda cruza essa linha, a tensão da onda é adicionada à tensão que se acumulou em $z = (3/4)l$ por todo o tempo passado. Esse procedimento genérico permite que a tensão em qualquer tempo e posição específicos seja facilmente determinada. Fazendo isso, os termos na Equação (117) que ocorreram até o tempo escolhido são somados, mas com a informação do tempo em que cada termo aparece.

A corrente na linha pode ser encontrada de maneira semelhante por meio de um *diagrama de reflexão de corrente*. É mais fácil construir o diagrama de corrente diretamente do diagrama de tensão determinando um valor para a corrente que está

* N. de T.: Também denominado *diagrama de Lattice*.

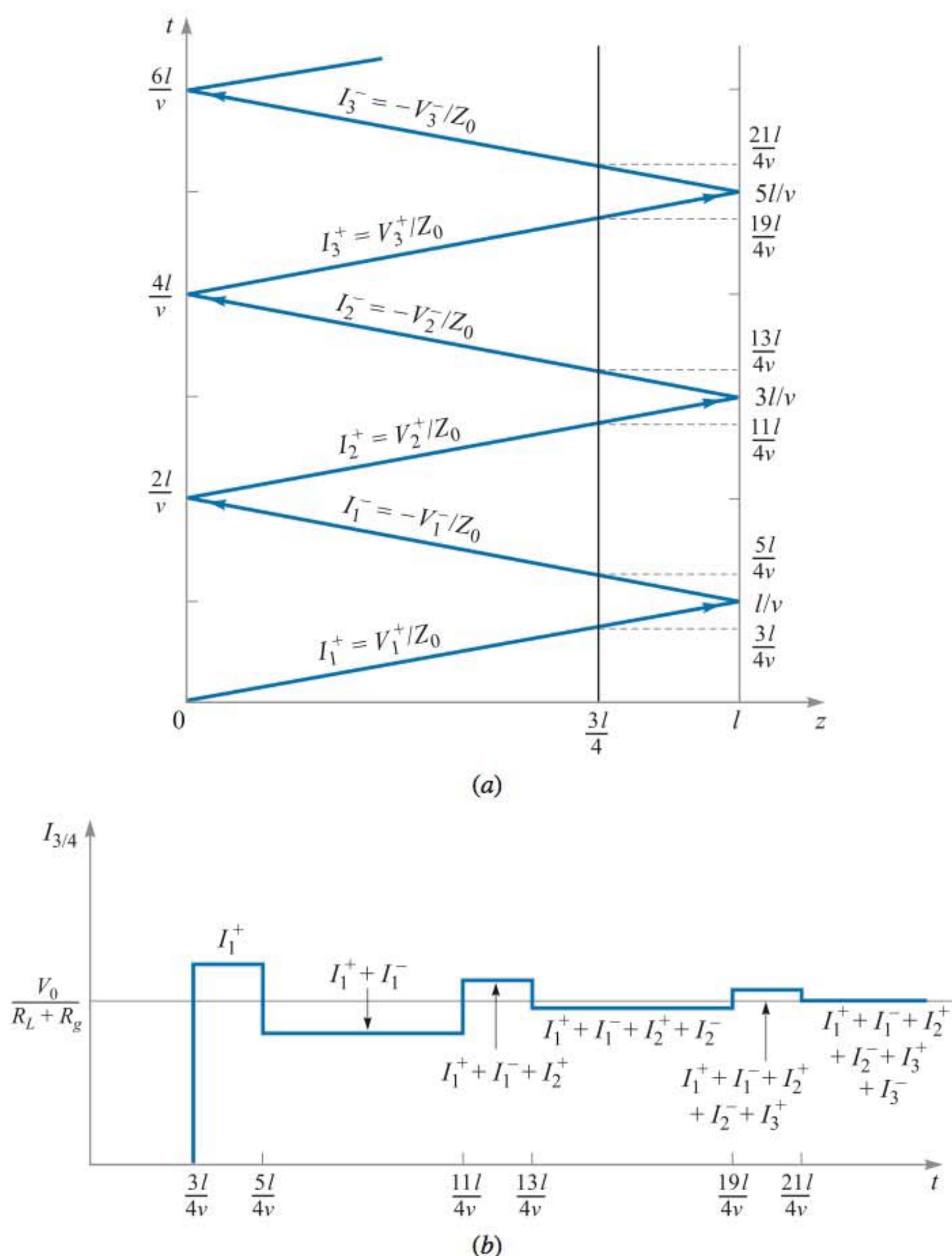



Figura 10.22 (*a*) Diagrama de reflexão de corrente para a linha da Figura 10.20 conforme obtido pelo diagrama de tensão da Figura 10.21*a*. (*b*) Corrente na posição $z = 3l/4$ determinada pelo diagrama de reflexão de corrente, mostrando o valor esperado de $V_0(R_L + R_g)$ em regime permanente.

associado a cada onda de tensão. Quando lidamos com corrente, é importante não perder de vista o *sinal* da corrente porque ele está relacionado às ondas de tensão e às suas polaridades. Referindo-se às Figuras 10.19*a* e 10.20, utilizamos a convenção na qual a corrente associada a uma onda de tensão viajante progressiva de polaridade positiva é positiva. Isso resultaria em uma corrente que flui no sentido horário, conforme mostrado na Figura 10.19*a*. A corrente associada a uma onda de tensão viajante regressiva em z de polaridade positiva (propagando, portanto, no sentido anti-horário) é negativa. Tal caso é ilustrado na Figura 10.20. Nos nossos desenhos bidimensionais de linhas de transmissão, associamos polaridade positiva à onda de tensão que se propaga em *qualquer* uma das direções se o condutor superior estiver carregado com

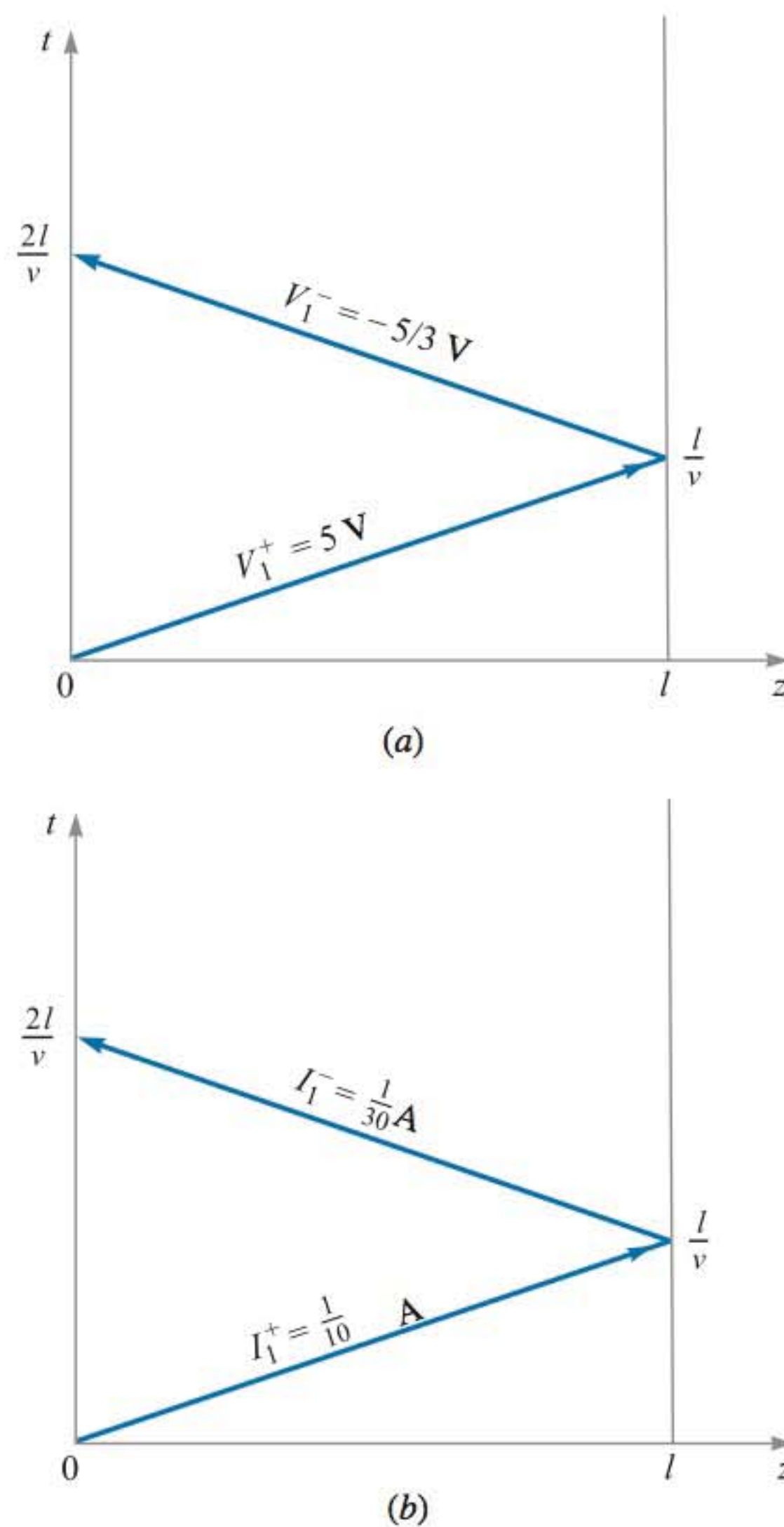



Figura 10.23 Diagramas de reflexão de tensão (*a*) e corrente (*b*) para o Exemplo 10.11.

carga positiva e o condutor inferior com carga negativa. Nas Figuras 10.19*a* e 10.20, ambas as ondas de tensão são de polaridade positiva, e assim suas ondas de corrente associadas equivalentes serão positivas para a onda progressiva e negativas para a onda regressiva. De uma forma geral, escrevemos

$$I^+ = \frac{V^+}{Z_0} \tag{120}$$

e

$$I^- = -\frac{V^-}{Z_0} \tag{121}$$

Para se encontrar imediatamente a corrente associada com a onda de tensão viajante regressiva é necessário um sinal de menos, conforme a Equação (121) indica.

A Figura 10.22*a* mostra o diagrama de reflexão de corrente que é derivado do diagrama de tensão da Figura 10.21*a*. Note que os valores de corrente são indicados pelos valores de tensão, com o sinal apropriado adicionado, segundo as Equações (120) e (121). Uma vez que o diagrama de corrente é construído, a corrente em uma posição e um tempo dados pode ser encontrada exatamente da mesma maneira que a tensão é encontrada utilizando-se o diagrama de tensão. A Figura 10.22*b* mostra a corrente como função do tempo na posição $z = (3/4)l$, determinada como um somatório dos valores de onda de corrente à medida que cruzam a linha vertical desenhada naquela posição.

EXEMPLO 10.11

Na Figura 10.20, $R_g = Z_0 = 50\ \Omega$, $R_L = 25\ \Omega$, e a tensão da bateria é $V_0 = 10$ V. A chave é fechada no tempo $t = 0$. Determine a tensão no resistor de carga e a corrente na bateria como funções do tempo.

Solução. Os diagramas de reflexão de tensão e corrente são mostrados nas Figuras 10.23*a* e 10.23*b*. No momento em que a chave é fechada, metade da tensão da bateria

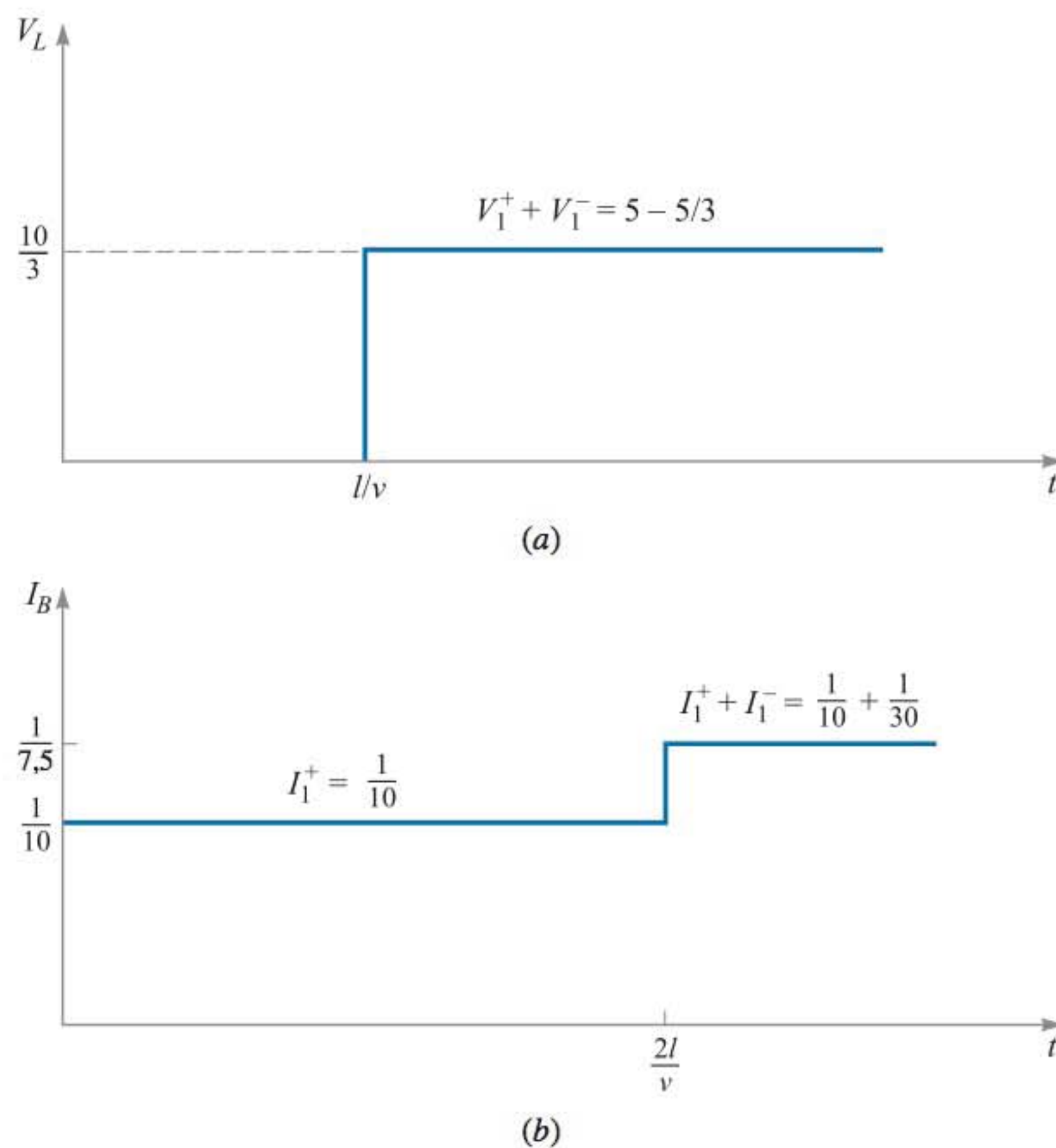



Figura 10.24 Tensão sobre a carga (*a*) e corrente na bateria (*b*) conforme determinadas pelos diagramas de reflexão da Figura 10.23 (Exemplo 10.11).

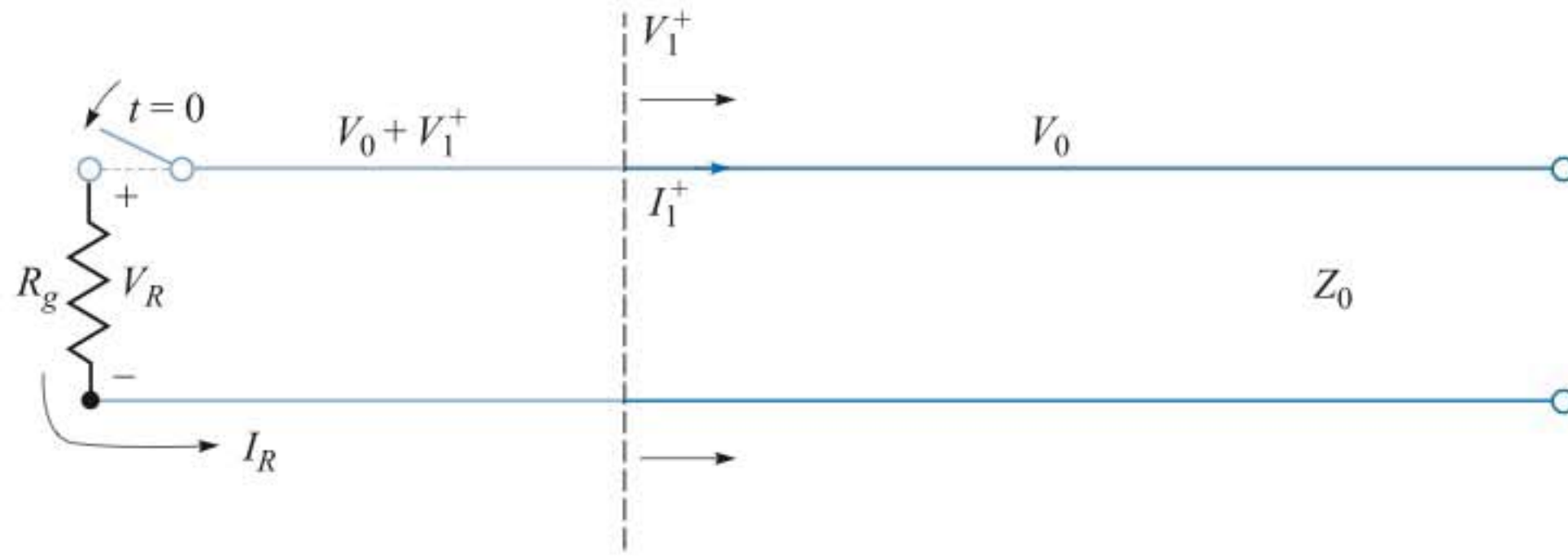



Figura 10.25 Em uma linha inicialmente carregada, quando se fecha a chave (conforme mostrado na figura), inicia-se uma onda de tensão de polaridade oposta àquela da tensão inicial. A onda então anula a tensão na linha e descarregará completamente a mesma em um tempo de trânsito referente a uma ida e volta se $R_g = Z_0$.

aparece sobre o resistor de 50 Ω, com a outra metade consistindo na onda de tensão inicial. Logo, $V_1^+ = (1/2)V_0 = 5$ V. A onda atinge a carga de 25 Ω, onde reflete com coeficiente de reflexão

$$\Gamma_L = \frac{25 - 50}{25 + 50} = -\frac{1}{3}$$

Assim, $V_1^- = -(1/3)V_1^+ = -5/3$ V. Essa onda retorna à bateria, onde encontra um coeficiente de reflexão $\Gamma_g = 0$. Logo, não aparecem novas ondas e o regime permanente é alcançado.

Uma vez que os valores das ondas de tensão são conhecidos, o diagrama de reflexão de corrente pode ser construído. Os valores para as duas ondas de corrente são

$$I_1^+ = \frac{V_1^+}{Z_0} = \frac{5}{50} = \frac{1}{10} \text{ A}$$

e

$$I_1^- = -\frac{V_1^-}{Z_0} = -\left(-\frac{5}{3}\right)\left(\frac{1}{50}\right) = \frac{1}{30} \text{ A}$$

Note que não foi feita aqui nenhuma tentativa de derivar I_1^- de I_1^+. Ambas são obtidas de forma independente a partir de suas respectivas tensões.

A tensão na carga em função do tempo é agora encontrada somando-se as tensões ao longo da linha vertical junto à carga. O gráfico resultante é mostrado na Figura 10.24*a*. A corrente na bateria é encontrada somando-se as correntes ao longo do eixo vertical, e o gráfico resultante é mostrado na Figura 10.24*b*. Note que, em regime permanente, tratamos o circuito como concentrado, com a bateria em série com os resistores de 50 e 25 ohms. Desta forma, esperamos ver uma corrente de regime permanente pela bateria (e em qualquer outro lugar) de

$$I_B \text{ (regime permanente)} = \frac{10}{50 + 25} = \frac{1}{7{,}5} \text{ A}$$

Esse valor é também encontrado pelo diagrama de reflexão de corrente para $t > 2l/\nu$. De forma similar, a tensão em regime permanente na carga deve ser

$$V_L \text{ (regime permanente)} = V_0 \frac{R_L}{R_g + R_L} = \frac{(10)(25)}{50 + 25} = \frac{10}{3} \text{ V}$$

que é também encontrado pelo diagrama de reflexão de tensão para $t > l/\nu$.

Outro tipo de problema transiente envolve linhas que estão *inicialmente carregadas*. Nesses casos, deve-se considerar a maneira pela qual a linha descarrega em uma carga. Considere a situação mostrada na Figura 10.25, na qual uma linha carregada de impedância característica Z_0 é descarregada através de um resistor de valor R_g quando uma chave junto ao resistor é fechada.[5] Consideramos o resistor na posição $z = 0$. A outra extremidade da linha está aberta (como seria necessário) e está localizada em $z = l$.

Quando a chave é fechada, uma corrente I_R começa a circular pelo resistor e o processo de descarregamento da linha se inicia. Essa corrente não flui imediatamente em todos os pontos da linha de transmissão, mas sim começa no resistor e estabelece sua presença em partes mais distantes da linha com o passar do tempo. Como analogia, considere uma longa fila de automóveis no sinal vermelho. Quando o sinal fica verde, os carros da frente são os primeiros a se locomoverem em direção ao cruzamento, seguidos sucessivamente por aqueles que estão atrás. O ponto que divide os carros em movimento e os carros parados é, na verdade, uma onda que se propaga em direção ao final da fila. Na linha de transmissão, o fluxo de carga progride de maneira similar. Uma onda de tensão, V_1^+, é iniciada e se propaga para a direita. À esquerda da frente de onda a carga está em movimento. À direita da frente de onda, a carga está parada e com sua densidade original. Acompanhando a carga em movimento à esquerda de V_1^+ há uma diminuição na densidade de carga à medida que o processo de descarregamento ocorre, e com isso a tensão da linha à esquerda de V_1^+ é parcialmente reduzida. Essa tensão será dada pela soma da tensão inicial, V_0, com V_1^+, o que significa que

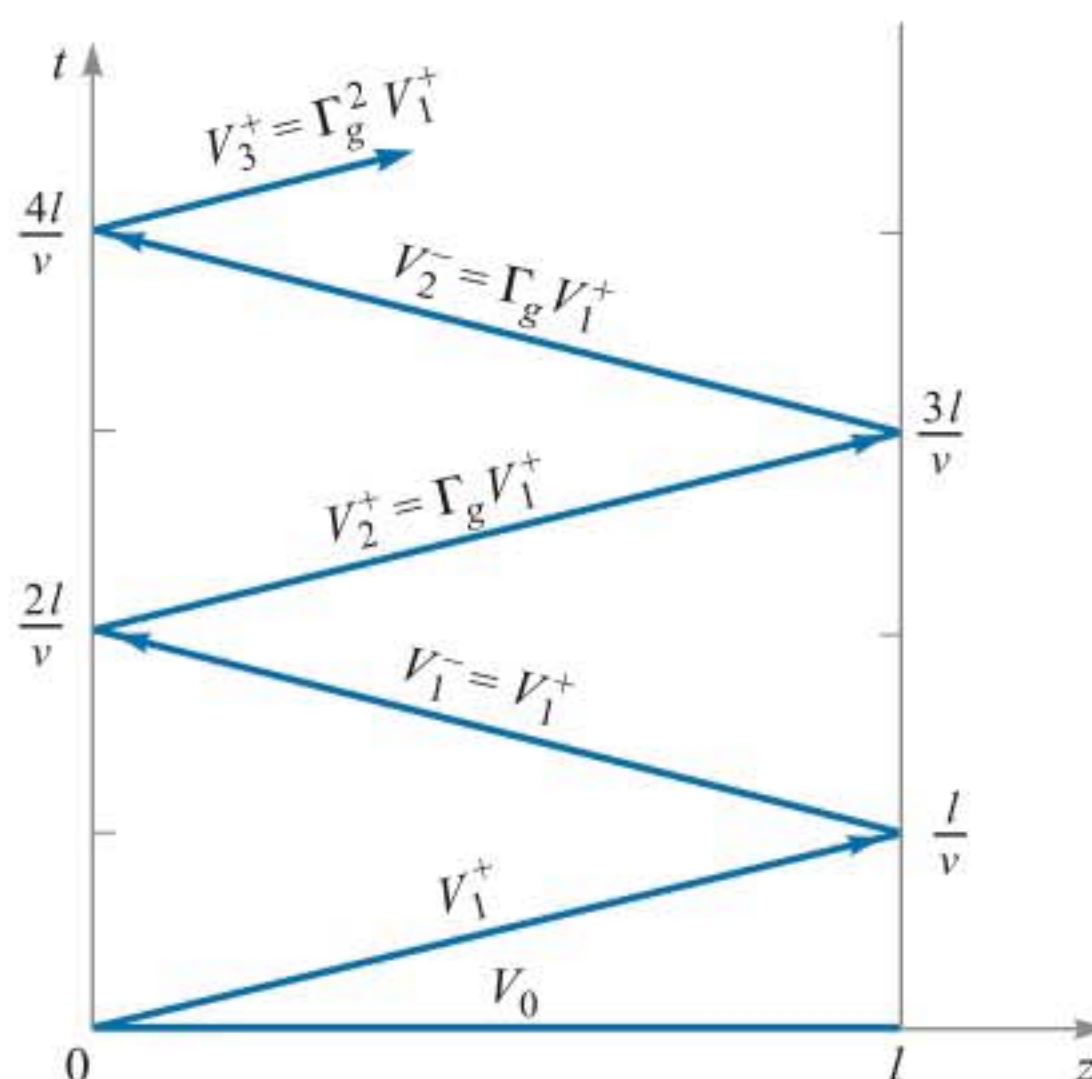



Figura 10.26 Diagrama de reflexão da tensão para a linha carregada da Figura 10.25, mostrando a condição inicial de V_0 em todos os pontos na linha em $t = 0$.

[5] Apesar de esse ser um resistor de carga, iremos chamá-lo de R_g por estar posicionado na extremidade da frente (gerador) da linha.

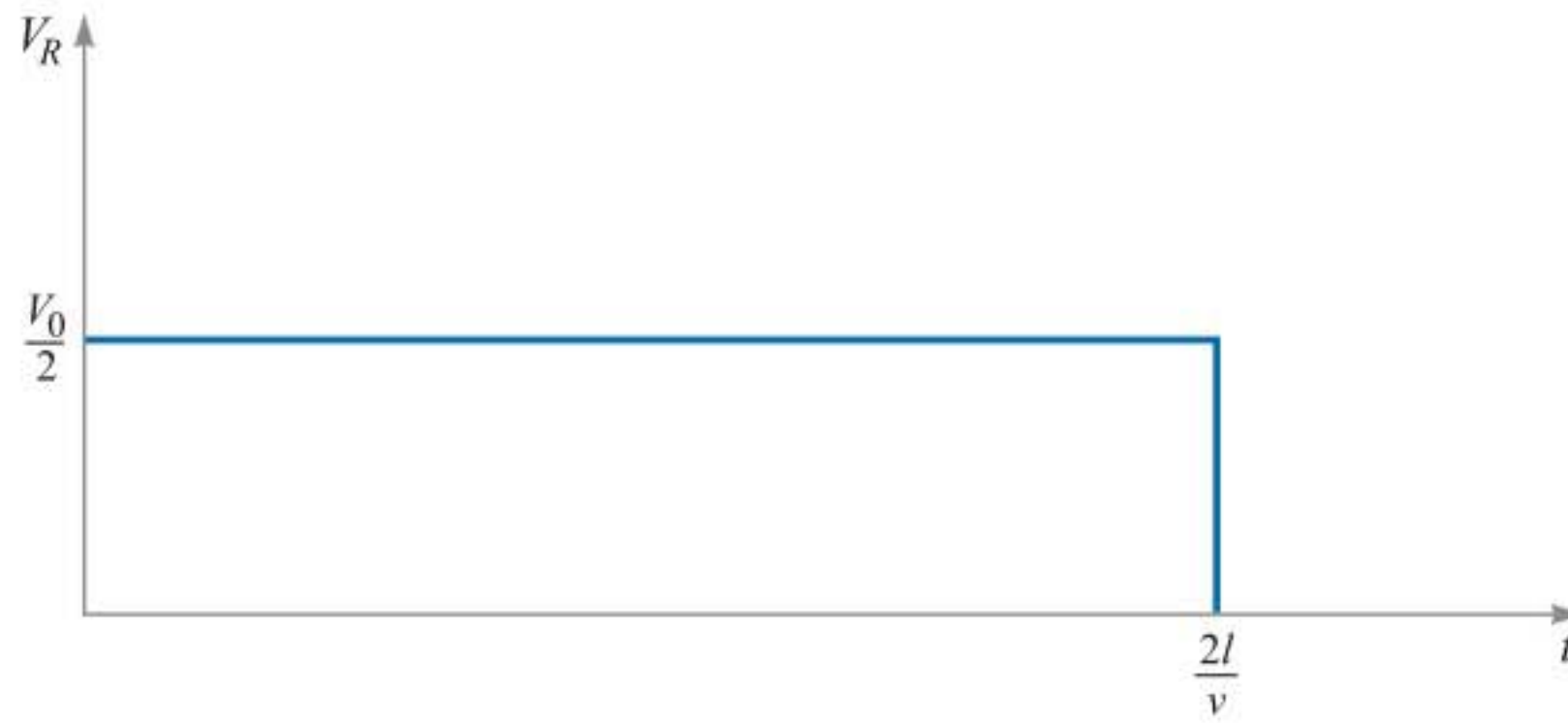



Figura 10.27 Tensão sobre o resistor como função do tempo, conforme determinado pelo diagrama de reflexão da Figura 10.26, no qual $R_g = Z_0$ ($\Gamma = 0$).

$V_1{}^+$ deve de fato ser negativa (ou de sinal oposto a V_0). O processo de descarregamento da linha é analisado seguindo-se $V_1{}^+$ à medida que propaga e sofre reflexões múltiplas nas duas extremidades. Diagramas de reflexão de tensão e de corrente são utilizados para esse propósito de forma muito parecida com a anterior.

Referindo-se à Figura 10.25, vemos que para V_0 positivo a corrente que circula pelo resistor terá sentido anti-horário e, assim, negativo. Também sabemos que a continuidade requer que a corrente no resistor seja igual à corrente associada à onda de tensão, ou

$$I_R = I_1^+ = \frac{V_1^+}{Z_0}$$

Neste caso, a tensão no resistor será

$$V_R = V_0 + V_1^+ = -I_R R_g = -I_1^+ R_g = -\frac{V_1^+}{Z_0} R_g$$

onde o sinal negativo surge porque V_R, tendo polaridade positiva, é produzida pela corrente negativa, I_R. Resolvemos para $V_1{}^+$ e obtemos

$$\boxed{V_1^+ = \frac{-V_0 Z_0}{Z_0 + R_g}} \tag{122}$$

Uma vez que encontramos $V_1{}^+$, podemos construir os diagramas de reflexão de tensão e de corrente. O diagrama para a tensão é mostrado na Figura 10.26. Note que a condição inicial de tensão V_0 em todos os pontos na linha é levada em conta sobrepondo-se uma tensão V_0 ao eixo horizontal do diagrama de tensão. O diagrama é então desenhado como antes, mas com $\Gamma_L = 1$ (na extremidade aberta de carga). Variações na forma como a linha descarrega, então, dependem do valor do resistor na extremidade chaveada R_g que determina o coeficiente de reflexão Γ_g naquele ponto. O diagrama de reflexão de corrente é derivado do diagrama de tensão em sua forma usual. Não há corrente inicial a ser considerada.

Um caso especial de importância prática é aquele no qual o resistor está casado com a linha, ou $R_g = Z_0$. Neste caso, a Equação (122) fornece $V_1{}^+ = -V_0/2$. A linha se descarrega completamente em um tempo de trânsito relativo a uma ida e volta de

$V_1{}^+$ e produz uma tensão sobre o resistor de valor $V_R = V_0/2$, o qual persiste pelo tempo $T = 2l/v$. A tensão no resistor em função do tempo é mostrada na Figura 10.27. A linha de transmissão nessa aplicação é conhecida como *linha formadora de pulsos*. Pulsos que são gerados dessa maneira são bem formados e apresentam baixo ruído, desde que a chave seja suficientemente rápida. Unidades comerciais são capazes de gerar pulsos de alta tensão de larguras da ordem de alguns nanossegundos, utilizando-se chaves especiais.

Quando o resistor não está casado com a linha, a descarga completa ainda ocorre, mas o faz após várias reflexões, levando a uma forma de pulso complicada.

EXEMPLO 10.12

Na linha carregada da Figura 10.25, a impedância característica é $Z_0 = 100\ \Omega$, e $R_g = 100/3\ \Omega$. A linha está carregada com uma tensão inicial $V_0 = 160$ V, e a chave é fechada no tempo $t = 0$. Determine e faça o gráfico da tensão e da corrente sobre o resistor para o tempo $0 < t < 8l/v$ (quatro voltas completas).

Solução. Com os valores dados de R_g e Z_0, a Equação (116) fornece $\Gamma_g = -1/2$. Então, com $\Gamma_L = 1$, e usando a Equação (122), encontramos

$$\begin{aligned} V_1^+ &= V_1^- = -3/4V_0 = -120\,\text{V} \\ V_2^+ &= V_2^- = \Gamma_g V_1^- = +60\,\text{V} \\ V_3^+ &= V_3^- = \Gamma_g V_2^- = -30\,\text{V} \\ V_4^+ &= V_4^- = \Gamma_g V_3^- = +15\,\text{V} \end{aligned}$$

Utilizando esses valores no diagrama de reflexão de tensão, calculamos a tensão no tempo junto ao resistor movendo-nos para cima pelo eixo vertical do lado esquerdo, somando as tensões à medida que progredimos, e começando com $V_0 + V_1{}^+$ em $t = 0$. Note que quando somamos tensões ao longo do eixo vertical, encontramos os pontos de interseção entre as ondas incidentes e as refletidas, que ocorrem (no tempo) em cada inteiro múltiplo de $2l/v$. Desta forma, quando nos movemos para cima no eixo, somamos as tensões de *ambas* as ondas ao nosso total, em cada ocorrência. A tensão em cada intervalo de tempo é então:

$$\begin{aligned} V_R &= V_0 + V_1^+ = 40\,\text{V} && (0 < t < 2l/v) \\ &= V_0 + V_1^+ + V_1^- + V_2^+ = -20\,\text{V} && (2l/v < t < 4l/v) \\ &= V_0 + V_1^+ + V_1^- + V_2^+ + V_2^- + V_3^+ = 10\,\text{V} && (4l/v < t < 6l/v) \\ &= V_0 + V_1^+ + V_1^- + V_2^+ + V_2^- + V_3^+ + V_3^- + V_4^+ = -5\,\text{V} && (6l/v < t < 8l/v) \end{aligned}$$

O gráfico de tensão resultante no período de tempo desejado é mostrado na Figura 10.28*a*.

A corrente pelo resistor é mais facilmente obtida dividindo-se as tensões na Figura 10.28*a* por $-R_g$. Como uma demonstração, podemos também usar o diagrama de reflexão de corrente da Figura 10.22*a* para obter esse resultado. Utilizando as Equações (120) e (121), calculamos as ondas de corrente da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
I_1^+ &= V_1^+/Z_0 = -1{,}2\text{ A}\\
I_1^- &= -V_1^-/Z_0 = +1{,}2\text{ A}\\
I_2^+ &= -I_2^- = V_2^+/Z_0 = +0{,}6\text{ A}\\
I_3^+ &= -I_3^- = V_3^+/Z_0 = -0{,}30\text{ A}\\
I_4^+ &= -I_4^- = V_4^+/Z_0 = +0{,}15\text{ A}
\end{aligned}
$$

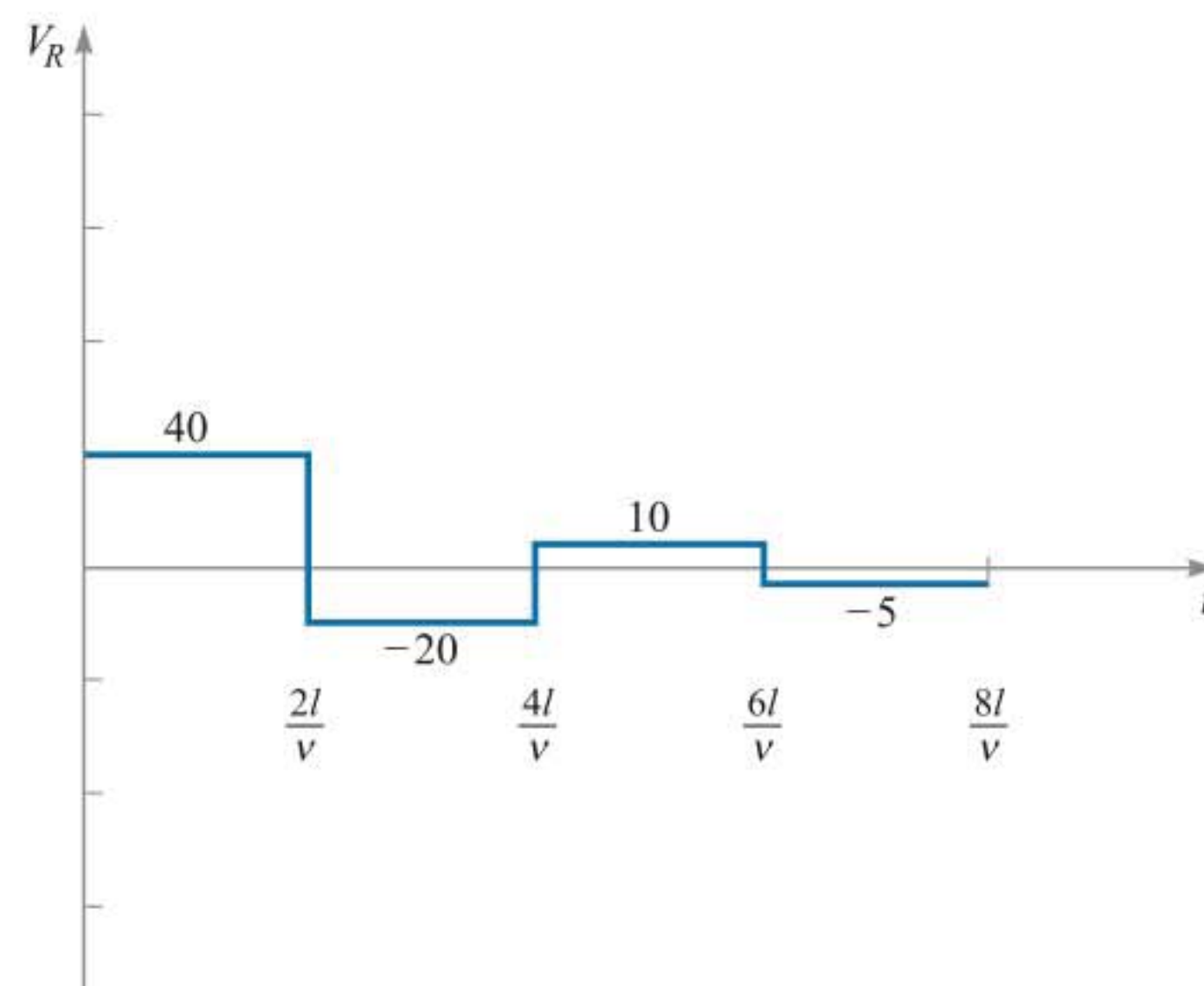
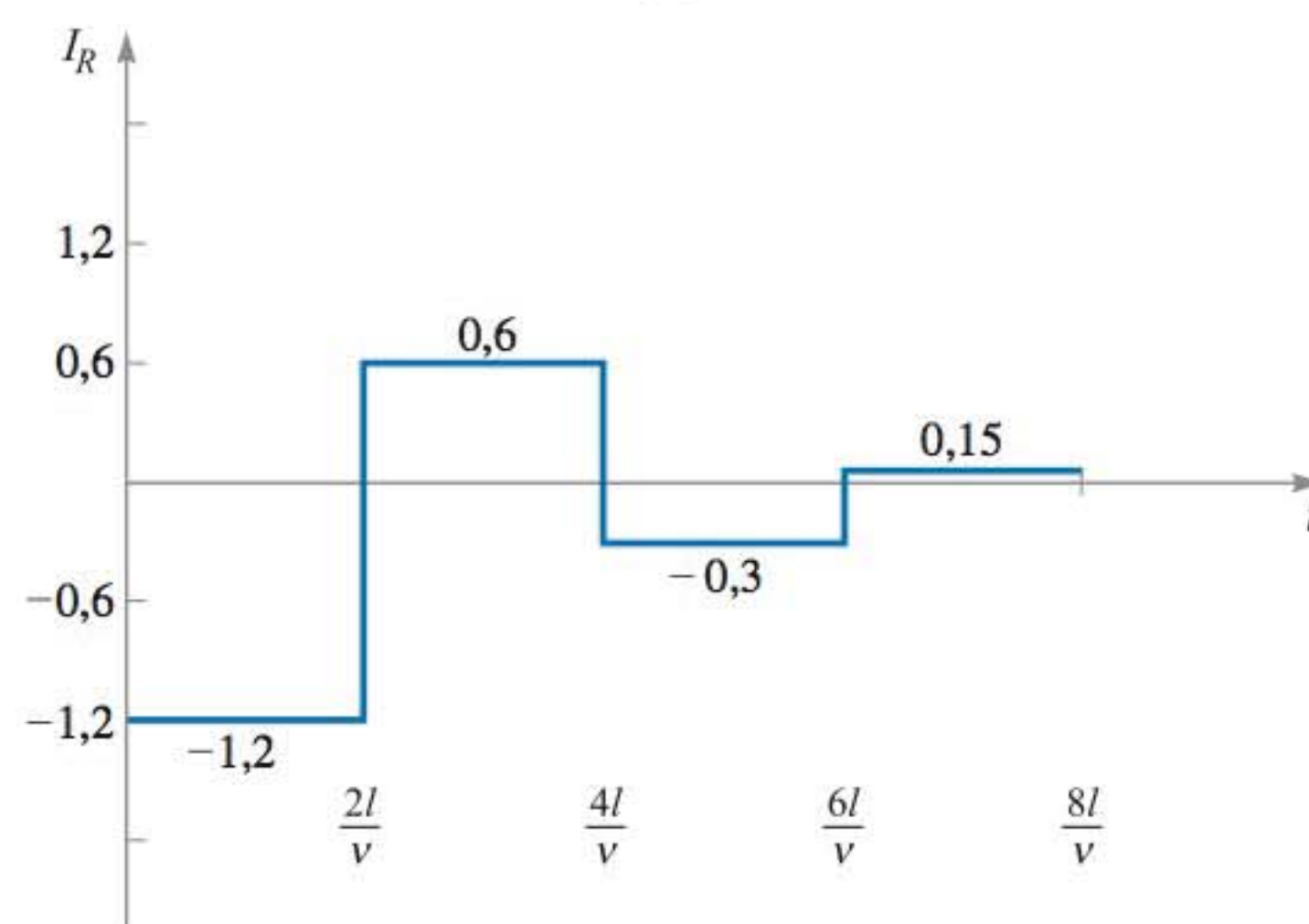
Utilizando esses valores no diagrama de reflexão de corrente, Figura 10.22*a*, somamos as correntes no resistor ao longo do tempo movendo-nos para cima no eixo esquerdo, conforme fizemos no diagrama de tensão. O resultado é mostrado na Figura 10.28*b*. Como uma verificação adicional da correção da construção de nosso diagrama, notamos que a corrente na extremidade aberta da linha ($Z = l$) deve sempre ser zero. Desta forma, ao somar as correntes ao longo do eixo direito devemos ter um resultado nulo para todo o tempo. Recomendamos ao estudante que verifique isso.

(*a*)

(*b*)

Figura 10.28 Tensão (*a*) e corrente (*b*) no resistor em função do tempo para a linha da Figura 10.25, com valores especificados no Exemplo 10.12.

REFERÊNCIAS

1. White, H. J., P. R. Gillette, and J. V. Lebacqz. "The Pulse-Forming Network". Capítulo 6 da obra *Pulse Generators*, editado por G.N. Glasoe e J.V. Lebacqz. New York: Dover, 1965.
2. Brown, R. G., R. A. Sharpe, W. L. Hughes and R. E. Post. *Lines, Waves and Antennas*. 2. ed. Nova York: The Ronald Press Company, 1973. O tema linhas de transmissão é tratado nos seis primeiros capítulos, com numerosos exemplos.
3. Cheng, D. K. *Fields and Wave Electromagnetics*. 2. ed. Reading, Mass: Addison-Wesley, 1989. Disponibiliza numerosos exemplos da carta de Smith e transientes.
4. Seshadri, S. R. *Fundamentals of Transmission Lines and Electromagnetics Fields*. Reading, Mass: Addison-Wesley, 1971.

PROBLEMAS

WWW Quizzes

10.1 Os parâmetros de certa linha de transmissão, operando em $\omega = 6 \times 10^8$ rad/s, são: $L = 0{,}35\ \mu$H/m, $C = 40$ pF/m, $G = 75\ \mu$S/m e $R = 17\ \Omega$/m. Calcule γ, α, β, λ e Z_0.

10.2 Uma onda senoidal em uma linha de transmissão é especificada pela tensão e corrente nas formas fasoriais:

$$V_s(z) = V_0\, e^{\alpha z}\, e^{j\beta z} \qquad \text{e} \qquad I_s(z) = I_0\, e^{\alpha z}\, e^{j\beta z}\, e^{j\phi}$$

onde V_0 e I_0 são reais. (*a*) Em qual direção (e por que) esta onda propaga? (*b*) É sabido que $\alpha = 0$, $Z_0 = 50\ \Omega$ e que a velocidade da onda é $v_p = 2{,}5 \times 10^8$ m/s, com $\omega = 10^8\ \text{s}^{-1}$. Calcule R, G, L, C, λ e ϕ.

10.3 A impedância característica de certa linha de transmissão sem perdas é 72 Ω. Se $L = 0{,}5\ \mu$H/m, calcule: (*a*) C; (*b*) v_p; (*c*) β se $f = 80$ MHz. (*d*) A linha é terminada com uma carga de 60 Ω. Encontre Γ e s.

10.4 Uma onda de tensão senoidal de amplitude V_0, frequência ω e constante de fase β propaga no sentido crescente de z em direção à extremidade aberta de uma carga, em uma linha de transmissão sem perdas de impedância característica Z_0. Na extremidade, a onda reflete totalmente com deslocamento de fase zero, e a onda refletida interfere com a incidente, de tal forma a produzir um padrão de onda estacionária em todo o comprimento da linha (Ver Exemplo 10.1). Determine o padrão de onda estacionária para a *corrente* na linha. Expresse o resultado na forma instantânea real e simplificada.

10.5 Duas características de certa linha de transmissão sem perdas são: $Z_0 = 50\ \Omega$ e $\gamma = 0 + j0{,}2\pi\ \text{m}^{-1}$ em $f = 60$ MHz. (*a*) Calcule L e C para a linha. (*b*) Uma carga $Z_L = 60 + j80\ \Omega$ é posicionada em $z = 0$. Qual é a distância mais curta entre a carga e um ponto no qual $Z_{\text{entrada}} = R_{\text{entrada}} + j0$?

10.6 Uma carga de 50 Ω é ligada a uma seção de 50 m da linha de transmissão do Problema 10.1, e um sinal de 100 W é alimentado na extremidade de entrada da linha. (*a*) Avalie a perda distribuída na linha em dB/m. (*b*) Calcule o coeficiente de reflexão na carga. (*c*) Determine a potência que é dissipada pela carga resistiva. (*d*) Qual é a queda de potência, em dB,

que a potência dissipada na carga representa quando comparada à potência de entrada original? (*e*) Em reflexão parcial da carga, qual é a potência que retorna à entrada e qual é a queda em dB que isto representa quando comparada à potência original de entrada de 100 W?

10.7 Um transmissor e um receptor estão conectados utilizando-se um par de linhas de transmissão em cascata. Na frequência de operação, a linha 1 tem uma perda de 0,1 dB/m, e a linha 2 tem 0,2 dB/m. A conexão é composta de 40 m de linha 1 e de 25 m de linha 2. Na junção, uma perda de contato de 2 dB é medida. Se a potência transmitida é de 100 mW, qual é a potência no receptor?

10.8 Uma medida de potência absoluta é a escala dBm, na qual a potência é especificada em decibéis relativos a 1 miliwatt. Especificamente, $P(\text{dBm}) = 10 \log_{10}[P(\text{mW})/1 \text{ mW}]$. Suponha que um receptor tenha uma *sensibilidade* de –20 dBm, que indica a potência *mínima* que ele deve receber de forma a interpretar adequadamente os dados eletrônicos transmitidos. Suponha que este receptor esteja na extremidade da carga de uma linha de transmissão de 50 Ω que tem 100 m de comprimento e perda especificada de 0,09 dB/m. A impedância do receptor é de 75 Ω e não está casado com a linha. Qual é a mínima potência de entrada requerida à linha em: (*a*) dBm, (*b*) mW?

10.9 Uma fonte de tensão senoidal alimenta a combinação série de uma impedância, $Z_g = 50 - j50\ \Omega$ e uma linha de transmissão sem perdas de comprimento L, curto-circuitada na extremidade da carga. A impedância característica da linha vale 50 Ω, e o comprimento de onda λ é medido na linha. (*a*) Determine, expressando-o pelo comprimento de onda, o comprimento mais curto de linha que resultará na fonte de tensão alimentando uma impedância total de 50 Ω. (*b*) Outros comprimentos de linha conseguem satisfazer as condições apresentadas na parte (*a*)? Se sim, quais são eles?

10.10 Duas linhas de transmissão sem perdas, com diferentes impedâncias características, são conectadas. As impedâncias são $Z_{01} = 100\ \Omega$ e $Z_{03} = 25\ \Omega$. A frequência de operação é de 1 GHz. (*a*) Determine a impedância característica requerida, Z_{02}, de uma seção de um quarto de onda a ser inserida entre as duas linhas, de tal forma a promover o casamento de impedância na junção, permitindo, assim, a transmissão de potência total pelas três linhas. (*b*) A capacitância por unidade de comprimento da linha intermediária é de 100 pF/m. Calcule o menor comprimento, em metros, desta linha que satisfaz a condição de casamento de impedância. (*c*) Com a instalação dos três segmentos nas partes (*a*) e (*b*), a frequência é agora dobrada, 2 GHz. Determine a impedância de entrada na junção linha 1 – linha 2, vista pelas ondas incidentes da linha 1. (*d*) Tendo em vista as condições da parte (*c*), e com a potência incidente da linha 1, calcule a taxa de onda estacionária que será medida na linha 1 e a fração da potência incidente da linha 1 que é refletida e propaga de volta para a entrada da linha 1.

10.11 Uma linha de transmissão que possui as constantes primárias L, C, R e G tem comprimento ℓ e é terminada por um carga que tem uma impedância

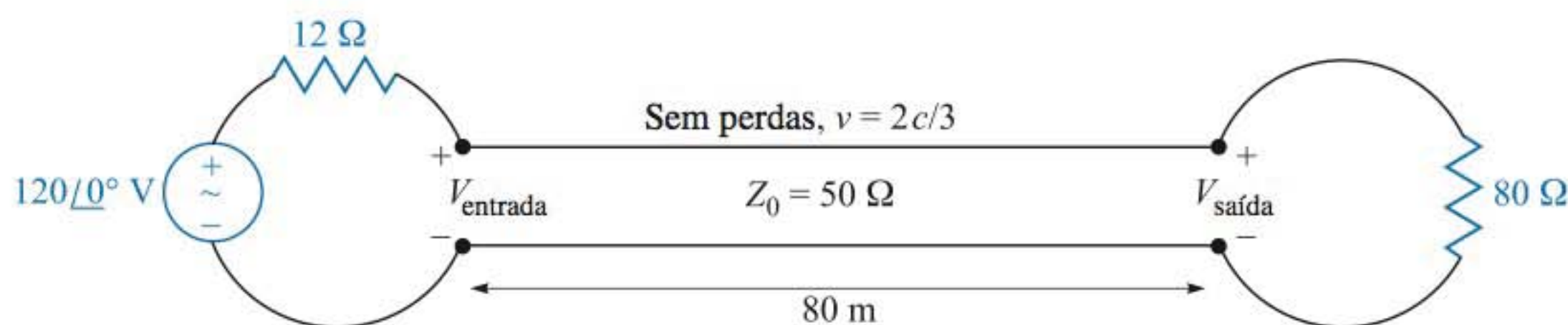



Figura 10.29 Ver Problema 10.15.

complexa $R_L + jX_L$. No terminal de entrada da linha, uma fonte de tensão contínua, V_0, está conectada. Considerando que todos os parâmetros são conhecidos para a frequência zero, encontre a potência de regime permanente dissipada pela carga se (*a*) $R = G = 0$; (*b*) $R \neq 0$, $G = 0$; (*c*) $R = 0$, $G \neq 0$; (*d*) $R \neq 0$, $G \neq 0$.

10.12 Em um circuito no qual uma fonte de tensão senoidal alimenta uma impedância interna em série com uma impedância de carga, sabe-se que a máxima potência transferida para a carga ocorre quando as impedâncias da fonte e da carga formam um par conjugado complexo. Suponha que a fonte (com sua impedância interna) alimente agora uma impedância de carga complexa $Z_L = R_L + jX_L$ que foi deslocada para o final de uma linha de transmissão, sem perdas, de comprimento ℓ e impedância característica Z_0. Se a impedância da fonte é $Z_g = R_g + jX_g$, escreva uma equação que possa ser resolvida para se encontrar o comprimento de linha, ℓ, necessário para que a carga deslocada receba a máxima potência.

10.13 A onda de tensão incidente em certa linha de transmissão sem perdas para a qual $Z_0 = 50\ \Omega$ e $v_p = 2 \times 10^8$ m/s é $V^+(z, t) = 200 \cos(\omega t - \pi z)$ V. (*a*) Calcule ω. (*b*) Calcule $I^+(z, t)$. A seção de linha para a qual $z > 0$ é substituída por uma carga $Z_L = 50 + j30\ \Omega$ em $z = 0$. Calcule: (*c*) Γ_L; (*d*) $V_s^-(z)$; (*e*) V_s em $z = -2{,}2$ m.

10.14 Uma linha de transmissão sem perdas, com impedância característica $Z_0 = 50\ \Omega$, é alimentada por uma fonte no terminal de entrada que consiste na combinação em série de um gerador senoidal de 10 V e um resistor de 50 Ω. A linha tem um comprimento igual a um quarto do comprimento de onda. Na outra extremidade da linha está conectada uma impedância de carga, $Z_L = 50 - j50\ \Omega$. (*a*) Determine a impedância de entrada da linha vista pela combinação fonte de tensão-resistor. (*b*) Calcule a potência dissipada pela carga. (*c*) Avalie a amplitude da tensão na carga.

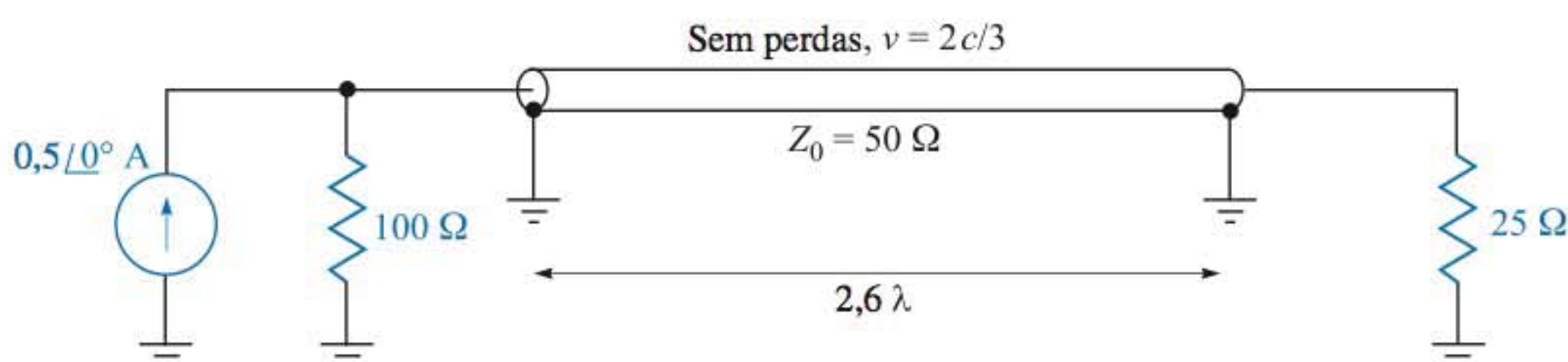



Figura 10.30 Ver Problema 10.17.

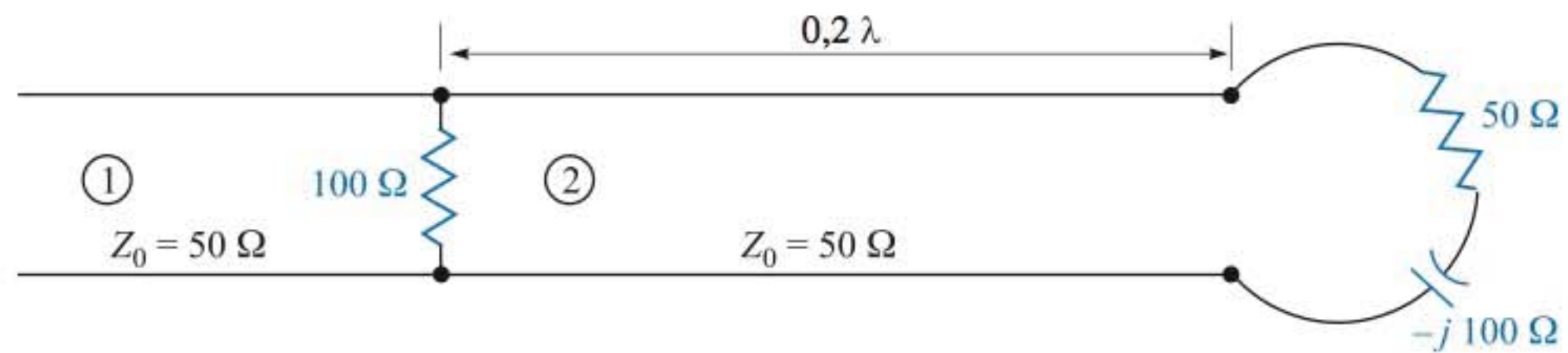



Figura 10.31 Ver Problema 10.18.

10.15 Para a linha de transmissão representada na Figura 10.29, encontre $V_{s,\,\text{saída}}$ se: (*a*) $f = 60$ Hz; (*b*) $f = 500$ kHz.

10.16 Uma linha de transmissão sem perdas de 100 Ω está conectada a uma segunda linha de impedância igual a 40 Ω, cujo comprimento é $\lambda/4$. A outra extremidade da linha curta é terminada em um resistor de 25 Ω. Uma onda senoidal (de frequência *f*), com potência média de 50 W, incide da linha de 100 Ω. (*a*) Determine a impedância de entrada para a linha de um quarto de onda. (*b*) Determine a potência de regime permanente que é dissipada pelo resistor. (*c*) Suponha que a frequência de operação seja diminuída para a metade de seu valor original. Determine a nova impedância de entrada, Z'_{entrada}, para este caso. (*d*) Para a nova frequência, calcule a potência, em W, que retorna ao terminal de entrada da linha após a reflexão.

10.17 Determine a potência média absorvida por cada resistor da Figura 10.30.

10.18 A linha mostrada na Figura 10.31 é sem perdas. Calcule *s* em ambas as seções 1 e 2.

10.19 Uma linha de transmissão sem perdas de 50 cm de comprimento opera em uma frequência de 100 MHz. Os parâmetros da linha são $L = 0{,}2\ \mu$H/m e $C = 80$ pF/m. A linha é terminada em um curto circuito em $z = 0$, e existe uma carga $Z_L = 50 + j20$ Ω ligada à linha na posição $z = -20$ cm. Qual é a potência média entregue a Z_L se a tensão de entrada vale $100\angle 0^\circ$ V?

10.20 (*a*) Determine *s* na linha de transmissão da Figura 10.32. Note que o dielétrico é o ar. (*b*) Calcule a impedância de entrada. (*c*) Se $\omega L = 10$ Ω, calcule I_s. (*d*) Que valor de *L* produzirá um valor máximo para $|I_s|$ em $\omega = 1$ Grad/s? Para esse valor de *L*, calcule a potência média: (*e*) fornecida pela fonte; (*f*) entregue a $Z_L = 40 + j30$ Ω.

10.21 Uma linha sem perdas, que tem o ar como dielétrico, possui uma impedância característica de 400 Ω. A linha está operando a uma frequência de 200 MHz e $Z_{\text{entrada}} = 200 - j200$ Ω. Utilize métodos analíticos ou a carta de Smith (ou

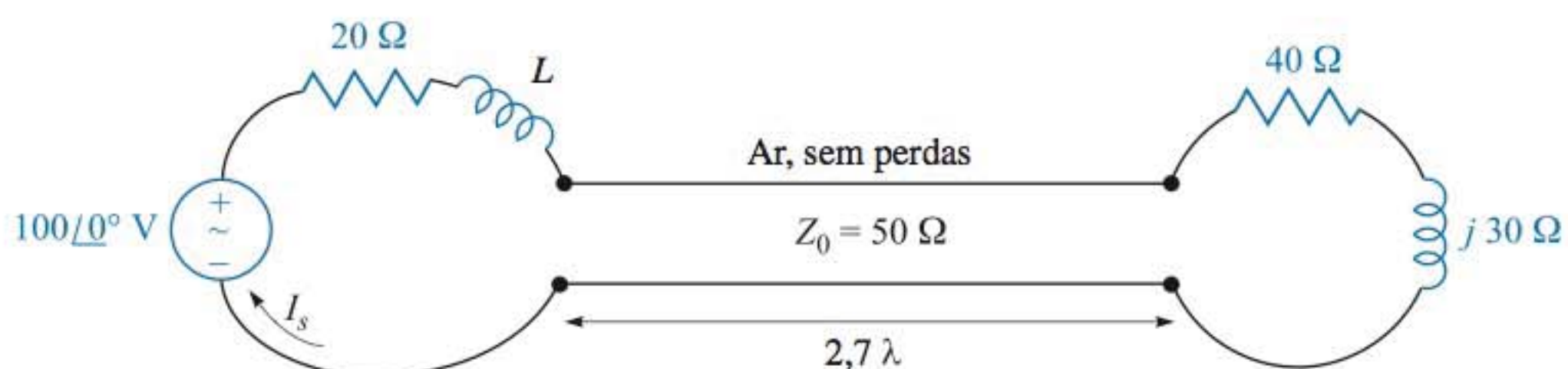



Figura 10.32 Ver Problema 10.20.

Sem perdas
$Z_0 = 50\ \Omega$
20 Ω
20 Ω
Sem perdas
$Z_0 = 50\ \Omega$
l
20 Ω

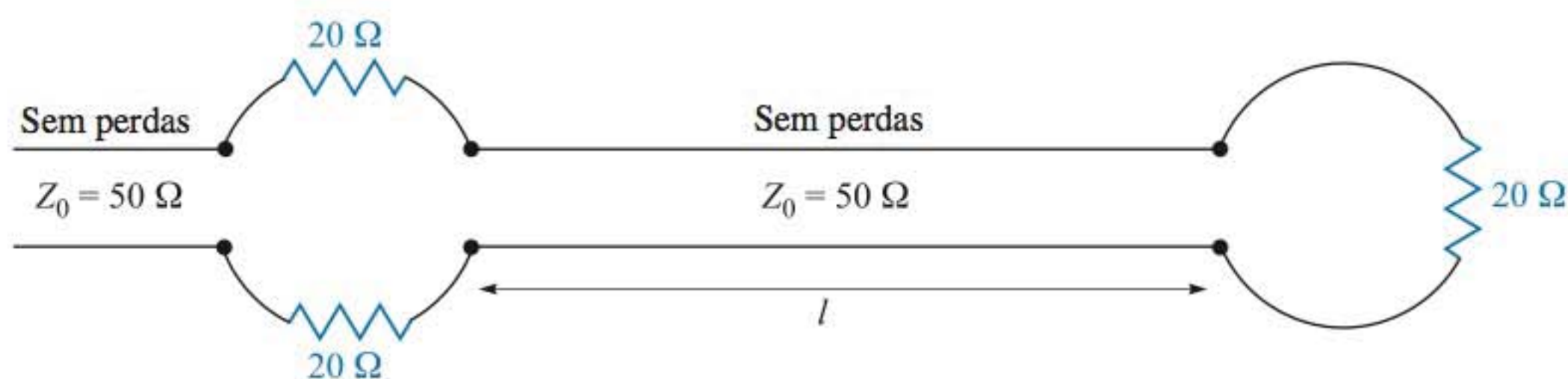



Figura 10.33 Ver Problema 10.24.

ambos) para encontrar: (*a*) s; (*b*) Z_L, se a linha tem 1 m de comprimento; (*c*) a distância, em relação à carga, do máximo de tensão mais próximo.

10.22 Uma linha sem perdas de 75 Ω é terminada em uma impedância de carga desconhecida. Um VSWR de 10 é medido e o primeiro mínimo de tensão ocorre em 0,15 comprimento de onda na frente da carga. Usando a carta de Smith, determine: (*a*) a impedância da carga; (*b*) a intensidade e fase do coeficiente de reflexão; (*c*) o menor comprimento de linha necessário para obter uma impedância de carga inteiramente resistiva.

10.23 A carga normalizada em uma linha de transmissão sem perdas vale $2 + j1$. Considerando $\lambda = 20$ m, faça uso da carta de Smith para encontrar: (*a*) a distância mais curta em relação à carga de um ponto no qual $z_{entrada} = r_{entrada} + j0$, onde $r_{entrada} > 0$; (*b*) $z_{entrada}$ neste ponto. (*c*) A linha é seccionada neste ponto e a porção que contém z_L é jogada fora. Um resistor $r = r_{entrada}$ da parte (*a*) é conectado à linha. Qual é o valor de s no restante da linha? (*d*) Qual é a distância mais curta, em relação a esse resistor, de um ponto no qual $z_{entrada} = 2 + j1$?

10.24 Com a ajuda da carta de Smith, faça o gráfico da curva de $|Z_{entrada}|$ *versus* l para a linha de transmissão mostrada na Figura 10.33. Cubra a faixa $0 < l/\lambda < 0{,}25$.

10.25 Uma linha de transmissão de 300 Ω está curto-circuitada em $z = 0$. Um máximo de tensão, $|V|_{max} = 10$ V, é encontrado em $z = -25$ cm, e a tensão mínima, $|V|_{min} = 0$, está em $z = -50$ cm. Utilize a carta de Smith para encontrar Z_L (com o curto-circuito substituído pela carga) se as leituras de tensão são: (*a*) $|V|_{max} = 12$ V em $z = -5$ cm e $|V|_{min} = 5$ V; (*b*) $|V|_{max} = 17$ V em $z = -20$ cm e $|V|_{min} = 0$ V.

10.26 Uma linha sem perdas de 50 Ω tem comprimento de 1,1 λ. Ela é terminada por uma impedância de carga desconhecida. O terminal de entrada da linha de 50 Ω é conectado à extremidade da carga de uma linha sem perdas de 75 Ω. Um VSWR de 4 é medido na linha de 75 Ω, na qual o primeiro máximo de tensão ocorre a uma distância de 0,2 λ na frente da junção entre as duas linhas. Use a carta de Smith para encontrar a impedância de carga desconhecida.

10.27 A admitância característica ($Y_0 = 1/Z_0$) de uma linha de transmissão sem perdas é de 20 mS. A linha é terminada em uma carga $Y_L = 40 - j20$ mS. Utilize a carta de Smith para encontrar: (*a*) s; (*b*) $Y_{entrada}$ se $l = 0{,}15\lambda$; (*c*) a distância em comprimentos de onda de Y_L até o máximo de tensão mais próximo.

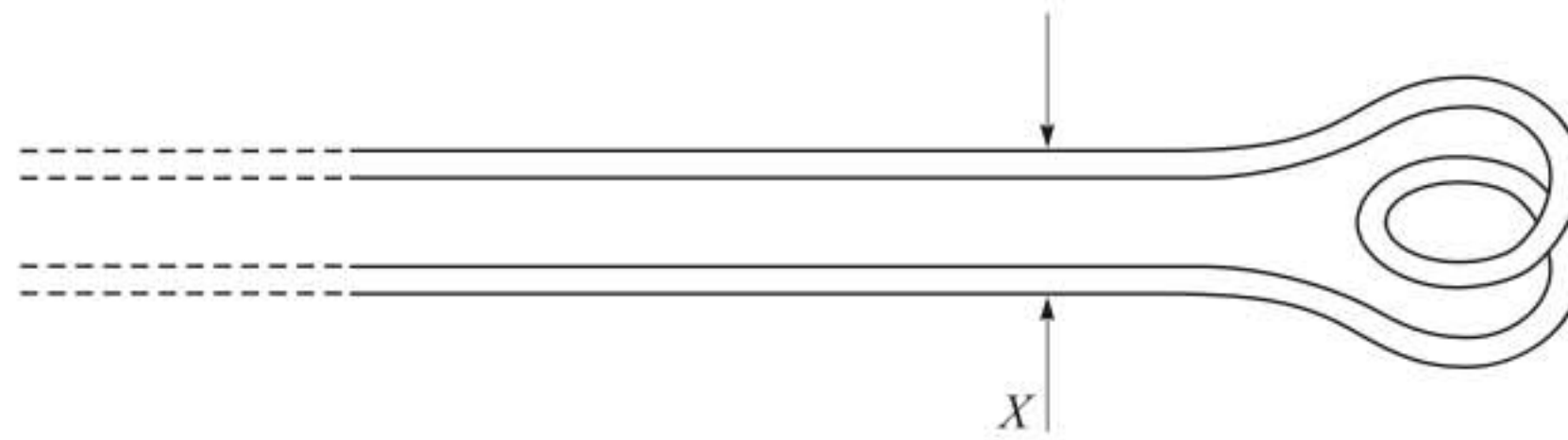



Figura 10.34 Ver Problema 10.30.

10.28 O comprimento de onda de certa linha sem perdas é de 10 cm. Se a impedância de entrada normalizada é $z_{\text{entrada}} = 1 + j2$, use a carta de Smith para determinar: (*a*) *s*; (*b*) z_L, se o comprimento da linha é de 12 cm; (*c*) x_L, se $z_L = 2 + jx_L$ onde $x_L > 0$.

10.29 Uma taxa de onda estacionária de 2,5 existe em uma linha sem perdas de 60 Ω. Medições com ponta de prova localizaram um mínimo de tensão na linha cuja posição foi marcada com um pequeno risco na linha. Quando a carga é substituída por um curto-circuito, os mínimos ficam separados por 25 cm de distância, e um mínimo está localizado em um ponto a 7 cm em direção à fonte, a partir do risco. Calcule Z_L.

10.30 Uma linha de dois fios, construída com fio sem perdas e de seção reta circular, é gradualmente alargada de forma a se ligar a espiras acopladas que se parecem com uma batedeira de ovos. No ponto *X*, indicado por uma seta na Figura 10.34, um curto circuito é colocado na linha. Uma ponta de prova é deslocada ao longo da linha e indica que o primeiro mínimo de tensão à esquerda de *X* está a 16 cm de *X*. Com o curto-circuito removido, um mínimo de tensão é encontrado a 5 cm à esquerda de *X*, e um máximo de tensão é localizado valendo três vezes o mínimo de tensão. Use a carta de Smith para calcular: (*a*) *f*; (*b*) *s*; (*c*) a impedância de entrada normalizada da batedeira de ovos vista olhando-se para a direita a partir do ponto *X*.

10.31 Com objetivo de comparar o quão pontiagudos são os máximos e mínimos de uma onda estacionária, considere uma carga $z_L = 4 + j0$ posicionada em $z = 0$. Seja $|V|_{\min} = 1$ e $\lambda = 1$ m. Determine a largura de: (*a*) um mínimo onde $|V| < 1,1$; (*b*) um máximo onde $|V| > 4/1,1$.

10.32 Na Figura 10.17, sendo $Z_L = 250\ \Omega$, $Z_0 = 50\ \Omega$, encontre o menor valor de *d* e o menor comprimento d_1 de um estube de curto-circuito que fornecerá

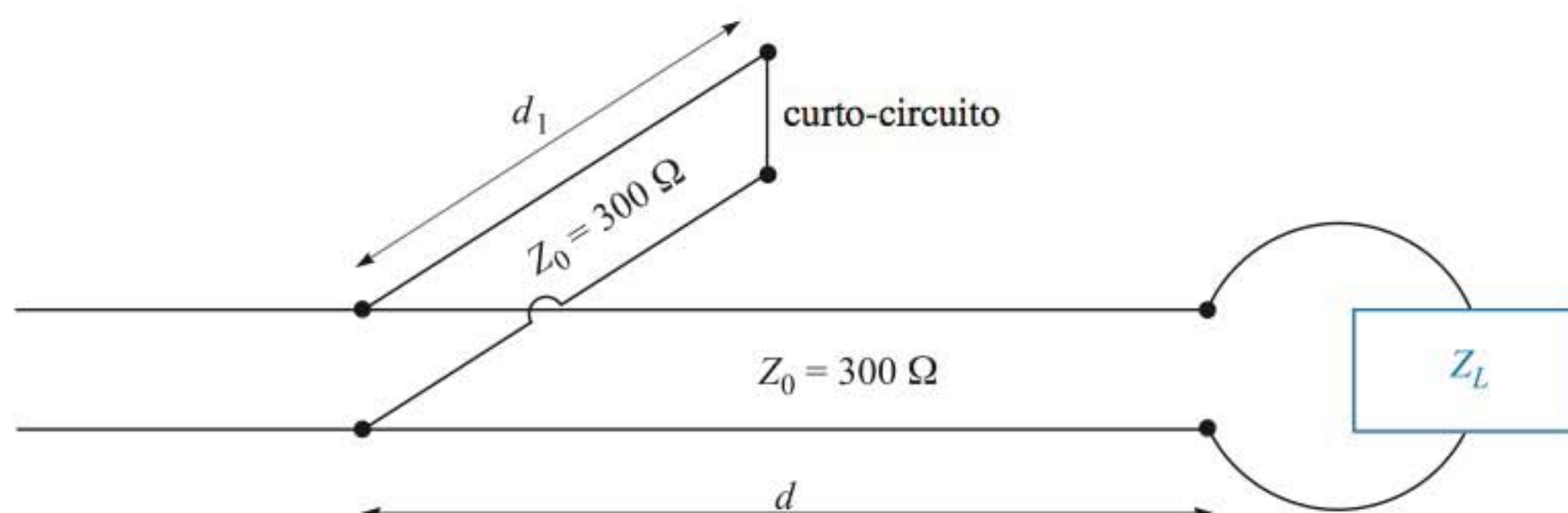



Figura 10.35 Ver Problema 10.34.

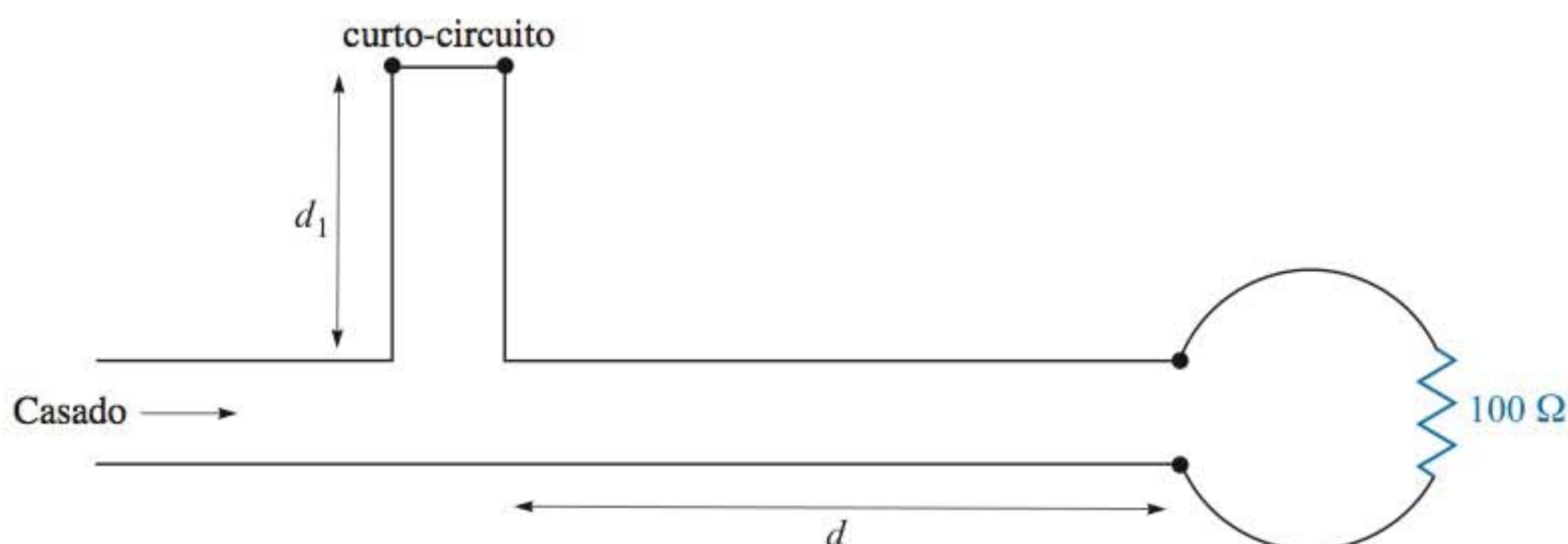



Figura 10.36 Ver Problema 10.36.

um casamento perfeito na principal linha à esquerda do estube. Expresse todas as respostas em comprimentos de onda.

10.33 Na Figura 10.17, seja $Z_L = 40 - j10\ \Omega$, $Z_0 = 50\ \Omega$, $f = 800$ MHz e $v = c$. (a) Encontre a menor distância d_1 de um estube de curto-circuito e a distância mais curta d em que ele pode ser posicionado em relação à carga, de forma a propiciar um casamento perfeito com a linha principal à esquerda do estube. (b) Repita para um estube com a terminação em aberto.

10.34 A linha sem perdas mostrada na Figura 10.35 está operando com $\lambda = 100$ cm. Se $d_1 = 10$ cm, $d = 25$ cm e a linha está casada à esquerda do estube, quanto vale Z_L?

10.35 Uma carga $Z_L = 25 + j75\ \Omega$ está posicionada em $z = 0$ em uma linha de dois fios sem perdas, para a qual $Z_0 = 50\ \Omega$ e $v = c$. (a) Se $f = 300$ MHz, encontre a menor distância d ($z = -d$) na qual a admitância de entrada tem parte real igual a $1/Z_0$ e uma parte imaginária negativa. (b) Qual é o valor de capacitância C que deve ser conectado à linha naquele ponto para proporcionar uma taxa de onda estacionária unitária na porção restante da linha?

10.36 Linhas de dois fios mostradas na Figura 10.36 são todas sem perdas e têm $Z_0 = 200\ \Omega$. Encontre d e o menor valor possível de d_1 de forma a se ter uma carga casada, se $\lambda = 100$ cm.

10.37 Na linha de transmissão da Figura 10.20, $R_g = Z_0 = 50\ \Omega$ e $R_L = 25\ \Omega$. Determine e faça o gráfico da tensão no resistor de carga e da corrente na bateria em função do tempo pela construção de diagramas de reflexão de tensão e de corrente apropriados.

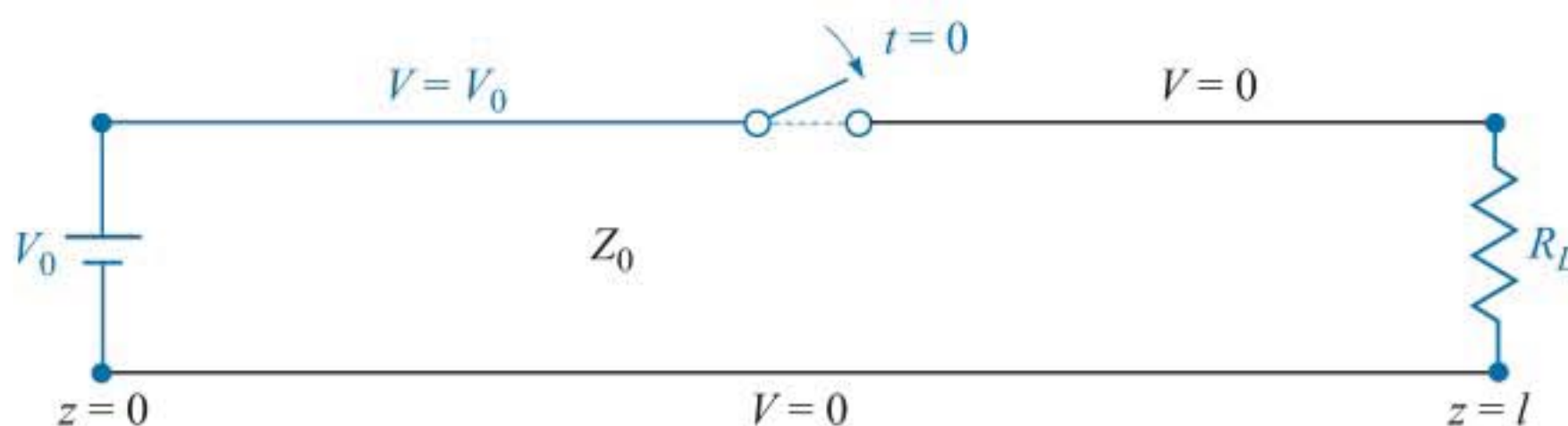



Figura 10.37 Ver Problema 10.41.

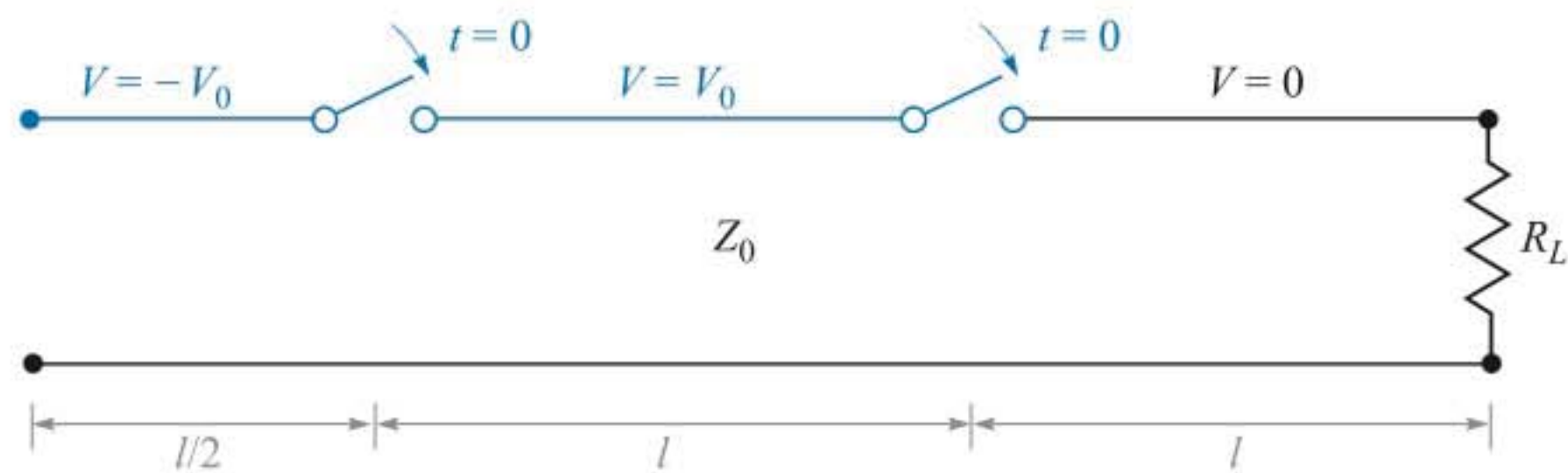



Figura 10.38 Ver Problema 10.42.

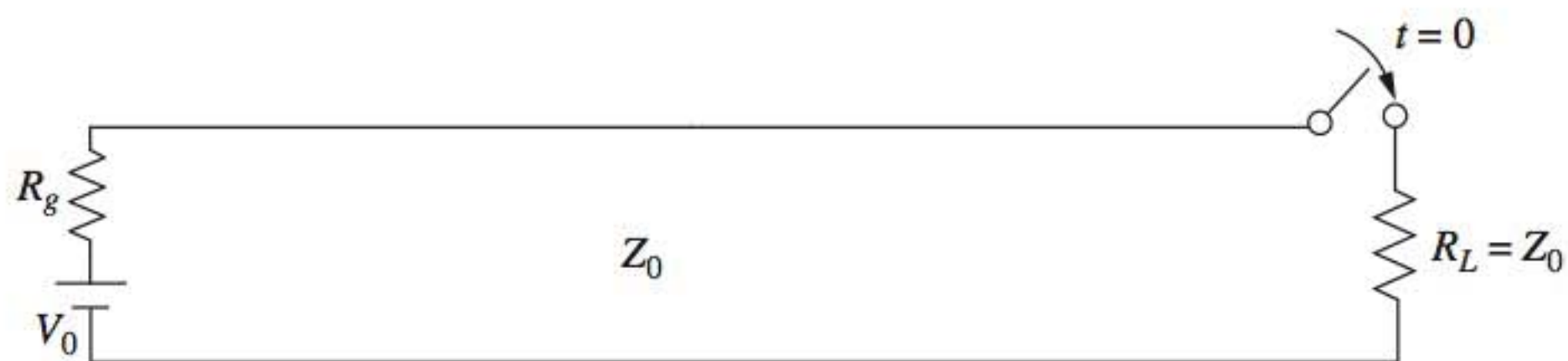



Figura 10.39 Ver Problema 10.43.

10.38 Repita o Problema 10.37 com $Z_0 = 50\ \Omega$ e $R_L = R_g = 25\ \Omega$. Realize a análise para o período de tempo $0 < t < 8L/v$.

10.39 Na linha de transmissão da Figura 10.20, $Z_0 = 50\ \Omega$ e $R_L = R_g = 25\ \Omega$. A chave é fechada em $t = 0$ e é *aberta novamente* no tempo $t = l/4v$, criando assim um *pulso* retangular de tensão na linha. Construa um diagrama de reflexão de tensão apropriado para esse caso e utilize-o para fazer um gráfico da tensão no resistor de carga em função do tempo, para $0 < t < 8l/v$ (note que o efeito da abertura da chave é o de iniciar uma segunda onda de tensão, cuja amplitude é tal que deixa uma corrente equivalente igual a zero a partir da sua abertura).

10.40 Na linha carregada da Figura 10.25, a impedância característica vale $Z_0 = 100\ \Omega$, e $R_g = 300\ \Omega$. A linha está carregada com uma tensão inicial, $V_0 = 160$ V, e a chave é fechada em $t = 0$. Determine e faça o gráfico da tensão e da corrente sobre o resistor para o tempo $0 < t < 8l/v$ (quatro idas e voltas completas). Este problema acompanha o Exemplo 10.12 como outro caso especial do problema básico de linha carregada, no qual agora $R_g > Z_0$.

10.41 Na linha de transmissão da Figura 10.37, a chave está posicionada *a meia distância* na linha e é fechada em $t = 0$. Construa um diagrama de reflexão de tensão para esse caso, onde $R_L = Z_0$. Faça o gráfico da tensão no resistor de carga em função do tempo.

10.42 Um *gerador de onda congelada* simples é mostrado na Figura 10.38. Ambas as chaves são fechadas simultaneamente em $t = 0$. Construa um diagrama de reflexão de tensão apropriado para o caso no qual $R_L = Z_0$. Determine e construa o gráfico da tensão no resistor de carga em função do tempo.

10.43 Na Figura 10.39, $R_L = Z_0$ e $R_g = Z_0/3$. A chave é fechada em $t = 0$. Determine e faça o gráfico como funções do tempo: (*a*) da tensão em R_L; (*b*) da tensão em R_g; (*c*) da corrente na bateria.

11

Onda Plana Uniforme

Este capítulo lida com a aplicação das equações de Maxwell para o problema da propagação de ondas eletromagnéticas. A onda plana uniforme representa o caso mais simples, apropriado para uma introdução, e ao mesmo tempo é de grande importância prática; o formato das ondas encontradas em situações práticas geralmente é assim considerado. Neste estudo, vamos explorar os princípios básicos da propagação de ondas eletromagnéticas, e vamos entender o processo físico que determina a velocidade de propagação e o ponto até o qual a atenuação pode ocorrer. Vamos derivar e utilizar o teorema de Poynting para calcular a potência transportada pela onda. Finalmente, aprenderemos como descrever a polarização de ondas. ■

11.1 PROPAGAÇÃO DE ONDAS NO ESPAÇO LIVRE

Começaremos com um estudo rápido das equações de Maxwell, no qual ofereceremos procurar dicas a respeito dos fenômenos de onda. No Capítulo 10, vimos como tensões e correntes se propagam como ondas em linhas de transmissão, e sabemos que a existência de tensões e correntes implica a existência de campos elétricos e magnéticos. Dessa forma, podemos identificar uma linha de transmissão como uma estrutura que confina os campos, mas que também permite que eles viajem ao longo de seu comprimento como ondas. Pode-se argumentar que são os campos que geram as tensões e as correntes na onda em uma linha de transmissão, e mesmo se não houver estrutura na qual a tensão e a corrente possam existir os campos ainda assim existiriam e se propagariam. No espaço livre, os campos não estão limitados por nenhuma estrutura que os confine e, por isso, podem ter *qualquer* intensidade e direção, conforme determinado inicialmente pelo dispositivo (tal como uma antena) que os gera.

Quando consideramos ondas eletromagnéticas no espaço livre, notamos que o meio é *desprovido de fontes* ($\rho_v = 0$ e $\mathbf{J} = \mathbf{0}$). Sob essas condições, as equações de Maxwell podem ser escritas em termos de **E** e **H** somente como

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \tag{4}$$

Agora vamos ver se a movimentação da onda pode ser inferida a partir dessas quatro equações, antes mesmo de resolvê-las. A Equação (1) determina que se o campo elétrico **E** está variando com o tempo em algum ponto, o campo magnético **H** possui rotacional naquele ponto. Logo, **H** varia espacialmente em uma direção normal à sua direção de orientação. Além disso, se **E** está variando com o tempo, então **H** geralmente também variará no tempo, apesar de não necessariamente da mesma maneira. Em seguida, verificamos, da Equação (2), que um **H** variável no tempo gera **E**, o qual, tendo rotacional, varia espacialmente na direção normal à sua orientação. Temos agora mais uma vez um campo elétrico variável – nossa hipótese original –, mas esse campo está a uma pequena distância do ponto do distúrbio original. Poderíamos imaginar (corretamente) que a velocidade com a qual o efeito se move afastando-se do ponto original é a velocidade da luz, mas isso deve ser verificado por um exame mais detalhado das equações de Maxwell.

Postulamos a existência de uma *onda plana uniforme*, na qual ambos os campos, **E** e **H**, pertencem ao *plano transversal* – isto é, o plano cuja normal está na direção da propagação. Além disso, por definição, ambos os campos possuem intensidades uniformes no plano transversal. Por essa razão, tal onda é às vezes chamada de *onda transversa eletromagnética* (TEM). A variação espacial necessária a ambos os campos na direção normal às suas orientações ocorrerá então apenas na direção de propagação – ou normal ao plano transversal. Considere, por exemplo, que $\mathbf{E} = E_x\mathbf{a}_x$, ou que o campo elétrico esteja *polarizado* na direção x. Se adicionalmente considerarmos que a onda viaja na direção z, permitimos variação espacial de **E** apenas com z. Utilizando a Equação (2), notamos que, com essas restrições, o rotacional de **E** se reduz a um termo único:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial z}\mathbf{a}_y = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}\mathbf{a}_y \tag{5}$$

A direção do rotacional de **E** na Equação (5) determina a direção de **H**, a qual está (como vimos) ao longo da direção y. Logo, em uma onda plana uniforme, as direções de **E** e **H** e a direção de propagação são mutuamente ortogonais. Usando o campo magnético direcionado em y o fato de que ele varia apenas com z, a Equação (1) se simplifica para

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\frac{\partial H_y}{\partial z}\mathbf{a}_x = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}\mathbf{a}_x \tag{6}$$

As Equações (5) e (6) podem ser mais sucintamente escritas:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \tag{7}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \tag{8}$$

Essas equações se comparam diretamente com as equações telegráficas para a linha de transmissão sem perdas [Equações (20) e (21) do Capítulo 10]. Manipulações adicionais das Equações (7) e (8) serão utilizados, assim como foi feito com as equações telegráficas. Especificamente, diferenciamos a Equação (7) com relação a z, obtendo:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 H_y}{\partial t \partial z} \tag{9}$$

Então, a Equação (8) é diferenciada em relação a t:

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z \partial t} = -\epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \tag{10}$$

Substituindo a Equação (10) na Equação (9) temos

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \tag{11}$$

Essa equação, em analogia direta com a Equação (13) do Capítulo 10, será identificada como a equação de onda para nosso campo elétrico TEM polarizado em x no espaço livre. Da Equação (11), identificamos adicionalmente a velocidade de propagação:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s} = c \tag{12}$$

onde c denota a velocidade da luz no espaço livre. Um procedimento similar, envolvendo a diferenciação da Equação (7) em relação a t e da Equação (8) em relação a z, leva à equação de onda para o campo magnético, idêntica em forma à Equação (11):

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} \tag{13}$$

WW Animação

Conforme foi discutido no Capítulo 10, a solução para as equações na forma das Equações (11) e (13) serão ondas viajantes progressivas e regressivas que possuem a forma geral [neste caso para a Equação (11)]:

$$E_x(z, t) = f_1(t - z/v) + f_2(t + z/v) \tag{14}$$

onde, novamente, f_1 e f_2 podem ser quaisquer funções cujo argumento seja da forma $t \pm z/v$.

Neste ponto, imediatamente nos especializamos em funções senoidais de uma frequência específica e escrevemos a solução para a Equação (11) na forma de cossenos viajantes progressivos e regressivos. Uma vez que as ondas são senoidais, denotamos a velocidade das mesmas como *velocidade de fase*, ν_p. As ondas são escritas como

$$\begin{aligned} E_x(z,t) &= \mathcal{E}_x(z,t) + \mathcal{E}'_x(z,t) \\ &= |E_{x0}|\cos[\omega(t - z/\nu_p) + \phi_1] + |E'_{x0}|\cos[\omega(t + z/\nu_p) + \phi_2] \\ &= \underbrace{|E_{x0}|\cos[\omega t - k_0 z + \phi_1]}_{\text{propagação progressiva em } z} + \underbrace{|E'_{x0}|\cos[\omega t + k_0 z + \phi_2]}_{\text{propagação regressiva em } z} \end{aligned} \tag{15}$$

Quando escrevemos a segunda linha da Equação (15), consideramos o fato de que as ondas estão viajando no espaço livre, caso no qual a velocidade de fase é $\nu_p = c$. Adicionalmente, o ***número de onda*** no espaço livre é definido como

$$\boxed{k_0 \equiv \frac{\omega}{c} \text{ rad/m}} \tag{16}$$

De uma maneira consistente com nossos estudos de linha de transmissão, nos referimos às soluções expressas na Equação (15) como as formas *instantâneas reais* do campo elétrico. Elas são as representações matemáticas do que seria experimentalmente medido. Os termos ωt e $k_0 z$, que aparecem na Equação (15), possuem unidades de ângulo e são geralmente expressos em radianos. Sabemos que ω é a frequência em radianos por segundo, que mede o deslocamento de fase *por unidade de tempo*, e que possui unidades de *rad/s*. De maneira similar, vemos que k_0 será interpretado como uma frequência *espacial*, que no presente caso mede o deslocamento de fase *por unidade de distância* ao longo da direção z em rad/m. Notamos que k_0 é a constante de defasamento para propagação sem perdas de ondas planas uniformes no espaço livre. O *comprimento de onda* no espaço livre é a distância na qual o defasamento espacial completa 2π radianos, considerando um tempo fixo, ou

$$k_0 z = k_0 \lambda = 2\pi \quad \rightarrow \quad \boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k_0} \quad \text{(espaço livre)}} \tag{17}$$

A maneira pela qual as ondas se propagam é a mesma encontrada em linhas de transmissão. Especificamente, vamos considerar algum ponto (tal como uma crista de onda) na função cosseno viajante progressiva da Equação (15). Para que uma crista ocorra, o argumento do cosseno deve ser um inteiro múltiplo de 2π. Considerando a m-ésima crista da onda, a condição se torna

$$k_0 z = 2m\pi$$

Desta forma, vamos considerar agora o ponto escolhido no cosseno, e ver o que acontece à medida que o tempo passa. Nossa condição é a de que o argumento inteiro do cosseno seja o mesmo múltiplo de 2π durante todo o tempo, de forma a não perder de vista o ponto escolhido. Nossa condição se torna

$$\omega t - k_0 z = \omega(t - z/c) = 2m\pi \tag{18}$$

À medida que o tempo passa, a posição z deve aumentar também de forma a satisfazer a Equação (18). A crista da onda (e a onda inteira) se desloca na direção positiva de z

em uma velocidade de fase c (no espaço livre). Usando raciocínio similar, a onda na Equação (15) que tem argumento ($\omega t + k_0 z$) para o cosseno descreve uma onda que se move na direção negativa de z, já que na medida em que o tempo aumenta, z deve agora decrescer para manter o argumento constante. Por simplicidade, restringiremos nossa atenção neste capítulo apenas à onda que se propaga no sentido positivo de z.

Conforme foi feito para ondas em linhas de transmissão, expressamos os campos instantâneos reais da Equação (15) utilizando suas formas fasoriais. Usando o campo que se propaga progressivamente na Equação (15), escrevemos:

$$\mathcal{E}_x(z,t) = \frac{1}{2}\underbrace{|E_{x0}|e^{j\phi_1}}_{E_{x0}} e^{-jk_0 z} e^{j\omega t} + c.c. = \frac{1}{2} E_{xs} e^{j\omega t} + c.c. = \mathrm{Re}[E_{xs} e^{j\omega t}] \quad (19)$$

O termo c.c. significa complexo conjugado, e podemos identificar aí o *campo elétrico fasorial* como $E_{xs} = E_{x0}e^{-jk_0 z}$. Conforme indicado na Equação (19), E_{x0} é a amplitude *complexa* (que inclui a fase ϕ_1).

EXEMPLO 11.1

Vamos expressar $\mathcal{E}_y(z,t) = 100 \cos (10^8 t - 0{,}5z + 30°)$ V/m como um fasor.

Solução. Primeiramente, vamos obter a notação exponencial,

$$\mathcal{E}_y(z,t) = \mathrm{Re}\left[100 e^{\,j(10^8 t - 0{,}5z + 30°)}\right]$$

e depois retirar Re e suprimir $e^{j10^8 t}$, obtendo o fasor

$$E_{ys}(z) = 100 e^{-j0{,}5z + j30°}$$

Note que uma nomenclatura misturada é utilizada para o ângulo neste caso. Isto é, $0{,}5z$ está em radianos, enquanto 30° está em graus. Dado um componente escalar ou um vetor, expressos como um fasor, poderemos facilmente recuperar a expressão no, domínio do tempo.

EXEMPLO 11.2

Dada a amplitude complexa do campo elétrico de uma onda plana uniforme, $\mathbf{E}_0 = 100\mathbf{a}_x + 20\angle 30°\mathbf{a}_y$ V/m, construa os campos fasorial e instantâneo real uma vez que se sabe que a onda se propaga na direção progressiva de z no espaço livre e tem uma frequência de 10 MHz.

Solução. Começamos construindo a expressão fasorial geral:

$$\mathbf{E}_s(z) = \left[100\mathbf{a}_x + 20e^{j30°}\mathbf{a}_y\right] e^{-jk_0 z}$$

onde $k_0 = \omega/c = 2\pi \times 10^7/3 \times 10^8 = 0{,}21$ rad/m. A forma instantânea real é então encontrada pela regra expressa na Equação (19):

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(z,t) &= \mathrm{Re}\left[100e^{-j0{,}21z}e^{j2\pi\times 10^7 t}\mathbf{a}_x + 20e^{j30°}e^{-j0{,}21z}e^{j2\pi\times 10^7 t}\mathbf{a}_y\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[100e^{j(2\pi\times 10^7 t\,-\,0.21z)}\mathbf{a}_x + 20e^{j(2\pi\times 10^7 t\,-\,0{,}21z\,+\,30°)}\mathbf{a}_y\right] \\
&= 100\cos(2\pi\times 10^7 t - 0{,}21z)\mathbf{a}_x + 20\cos(2\pi\times 10^7 t - 0{,}21z + 30°)\,\mathbf{a}_y
\end{aligned}$$

É evidente que tomar a derivada parcial de qualquer grandeza de campo com relação ao tempo é equivalente a multiplicar o fasor correspondente por $j\omega$. Como um exemplo, podemos expressar a Equação (8) (utilizando campos senoidais) como

$$\frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial z} = -\epsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial t} \tag{20}$$

onde, de uma maneira consistente com a Equação (19),

$$\mathcal{E}_x(z,t) = \frac{1}{2} E_{xs}(z)\, e^{j\omega t} + c.c. \qquad \text{e} \qquad \mathcal{H}_y(z,t) = \frac{1}{2} H_{ys}(z)\, e^{j\omega t} + c.c. \tag{21}$$

Na substituição dos campos da Equação (21) na Equação (20), a última equação se simplifica para

$$\boxed{\frac{dH_{ys}(z)}{dz} = -j\omega\epsilon_0 E_{xs}(z)} \tag{22}$$

Obtendo essa equação, notamos em primeiro lugar que os termos conjugados complexos na Equação (21) produzem sua própria equação separada, redundante com a Equação (22). Em segundo lugar, os fatores $e^{j\omega t}$, comuns a ambos os lados, se anularam. Em terceiro lugar, a derivada parcial com relação a z se torna a derivada total, uma vez que o fasor H_{ys} depende apenas de z.

Em seguida, aplicamos esse resultado às equações de Maxwell, para obtê-las na forma fasorial. Substituído o campo conforme expresso na Equação (21), as Equações (1) a (4) resultam em

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = j\omega\epsilon_0 \mathbf{E}_s \tag{23}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu_0 \mathbf{H}_s \tag{24}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_s = 0 \tag{25}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_s = 0 \tag{26}$$

Deve-se notar que as Equações (25) e (26) não são mais relações independentes, pois elas podem ser obtidas tomando-se o divergente das Equações (23) e (24), respectivamente.

As Equações (23) a (26) podem ser utilizadas para se obter a forma vetorial do regime permanente senoidal da equação de onda no espaço livre. Começamos tomando o rotacional de ambos os lados da Equação (24):

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu_0 \nabla \times \mathbf{H}_s = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}_s) - \nabla^2 \mathbf{E}_s \tag{27}$$

onde a última igualdade é uma identidade, a qual define o *Laplaciano vetorial* de $\mathbf{E}_s$:

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E}_s = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}_s) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_s}$$

Na Equação (25) notamos que $\nabla \cdot \mathbf{E}_s = 0$. Com isso, e substituindo a Equação (23) na Equação (27), obtemos

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E}_s = -k_0^2 \mathbf{E}_s} \tag{28}$$

e, novamente $k_0 = \omega/c = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$. A Equação (28) é conhecida como a equação vetorial de Helmholtz no espaço livre.[1] Essa equação é bastante complicada quando expandida, mesmo em coordenadas cartesianas, pois dela resultam três equações fasoriais escalares (uma para cada componente vetorial), cada uma com quatro termos. O componente em x da Equação (28) se torna, utilizando ainda a notação com o operador nabla,

$$\nabla^2 E_{xs} = -k_0^2 E_{xs} \tag{29}$$

e a expansão do operador leva à equação diferencial parcial de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2} = -k_0^2 E_{xs}$$

Novamente, considerando uma onda plana uniforme na qual E_{xs} não varia com x ou y, as duas derivadas correspondentes são zero, e obtemos

$$\frac{d^2 E_{xs}}{dz^2} = -k_0^2 E_{xs} \tag{30}$$

cuja solução já conhecemos:

$$E_{xs}(z) = E_{x0}e^{-jk_0z} + E'_{x0}e^{jk_0z} \tag{31}$$

Vamos agora voltar para as equações de Maxwell, as Equações (23) a (26), e determinar a forma do campo **H**. Dado $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$ é mais facilmente obtido da Equação (24):

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu_0\mathbf{H}_s \tag{24}$$

a qual é grandemente simplificada para um componente E_{xs} único variando apenas com z,

$$\frac{dE_{xs}}{dz} = -j\omega\mu_0 H_{ys}$$

Usando a Equação (31) para E_{xs}, temos

$$H_{ys} = -\frac{1}{j\omega\mu_0}\left[(-jk_0)E_{x0}e^{-jk_0z} + (jk_0)E'_{x0}e^{jk_0z}\right]$$

$$= E_{x0}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}e^{-jk_0z} - E'_{x0}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}e^{jk_0z} = H_{y0}e^{-jk_0z} + H'_{y0}e^{jk_0z} \tag{32}$$

Na forma instantânea real, isso se torna

$$H_y(z,t) = E_{x0}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\cos(\omega t - k_0z) - E'_{x0}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\cos(\omega t + k_0z) \tag{33}$$

onde E_{x0} e E'_{x0} são considerados reais.

---

[1] Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821-1894) era professor em Berlin e trabalhava nos campos da fisiologia, eletrodinâmica e ótica. Hertz era um de seus estudantes.

De uma forma geral, a partir da Equação (32) observamos que as amplitudes dos campos elétrico e magnético da onda viajante progressiva no espaço livre se relacionam por meio de

$$E_{x0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_{y0} = \eta_0 H_{y0} \tag{34a}$$

Também notamos que as amplitudes das ondas viajantes regressivas se relacionam por

$$E'_{x0} = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H'_{y0} = -\eta_0 H'_{y0} \tag{34b}$$

onde a *impedância intrínseca* do espaço livre é definida como

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \doteq 120\pi \ \Omega \tag{35}$$

A dimensão de η_0 em ohms é imediatamente evidente da sua definição como a razão entre E (unidades de V/m) e H (unidades de A/m). Está em analogia direta com a impedância característica Z_0 de uma linha de transmissão, a qual é definida como a relação entre tensão e corrente na onda viajante. Notamos que a diferença entre as Equações (34*a*) e (34*b*) é um sinal de menos. Isso é consistente com a analogia com a linha de transmissão que levou às Equações (25*a*) e (25*b*) no Capítulo 10. Aquelas equações se prestaram à definição de correntes positiva e negativa associadas às ondas de tensão progressiva e regressiva. De forma semelhante, a Equação (34*a*) especifica que para uma onda plana uniforme progressiva em z cujo vetor campo elétrico está na direção positiva de x em um dado ponto no tempo e espaço, o vetor campo magnético estará na direção *positiva* de y nas mesmas coordenadas de tempo e espaço. No caso de uma onda viajante regressiva que possui um campo elétrico orientado na direção positiva de x, o vetor campo magnético estará na direção *negativa* de y. O significado físico disso tem a ver com a definição de transmissão de potência na onda, conforme especificado pelo vetor de Poynting, $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ (em watts/m^2). O produto vetorial de $\mathbf{E}$ com $\mathbf{H}$ deve fornecer a direção correta de propagação da onda, e por isso a necessidade do sinal de menos na Equação (34*b*) se torna aparente. Questões associadas à transmissão de potência serão discutidas na Seção 11.3.

Uma ideia da maneira pela qual os campos variam no espaço pode ser obtida nas Figuras 11.1*a* e 11.1*b*. A intensidade de campo elétrico na Figura 11.1*a* é mostrada em $t = 0$, e o valor instantâneo do campo é apresentado ao longo de três linhas, o eixo z e linhas arbitrárias paralelas ao eixo z nos planos $x = 0$ e $y = 0$. Como o campo é uniforme em planos perpendiculares ao eixo z, a variação ao longo de todas as três linhas é a mesma. Um ciclo completo de variação ocorre em um comprimento de onda, λ. Os valores de H_y nos mesmos instantes de tempo e posições são mostrados na Figura 11.1*b*.

Uma onda plana uniforme não pode existir fisicamente, pois ela se estende até o infinito em duas dimensões pelo menos e representa uma quantidade infinita de

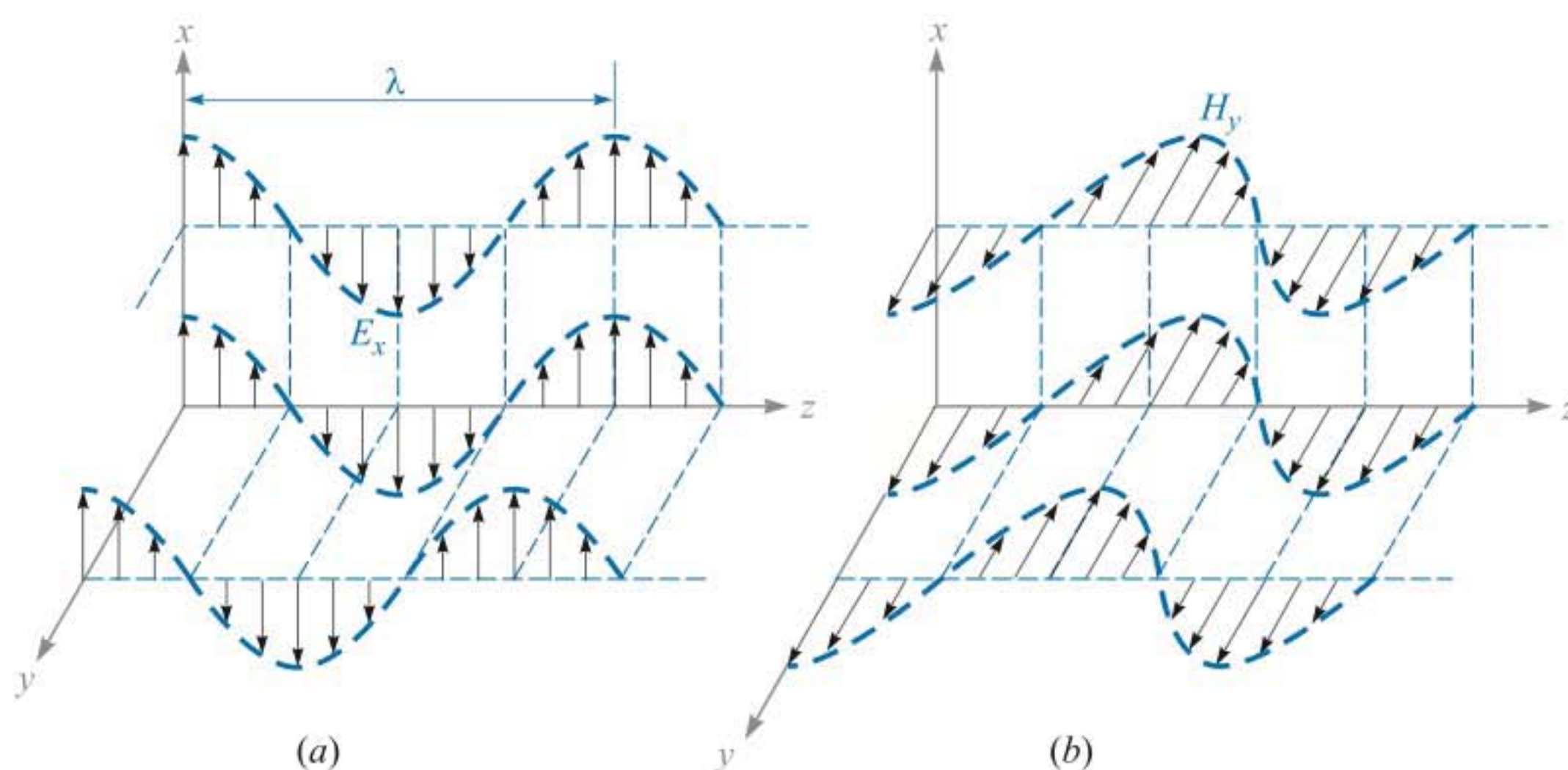



Figura 11.1 (*a*) As setas representam os valores instantâneos de $E_{x0}\cos[\omega(t - z/c)]$ em $t = 0$ ao longo do eixo z, ao longo de uma reta arbitrária no plano $x = 0$ paralela ao eixo z e ao longo de uma reta arbitrária no plano $y = 0$ paralela ao eixo z. (*b*) Valores correspondentes de H_y são indicados. Note que E_x e H_y estão em fase em qualquer ponto no tempo.

Animação

energia. O campo distante de uma antena de transmissão, entretanto, é essencialmente uma onda plana uniforme em uma região limitada. Como exemplo, um sinal de radar atingindo um alvo distante é próximo de uma onda plana uniforme.

Apesar de termos considerado apenas uma onda variando senoidalmente no tempo e no espaço, uma combinação adequada de soluções para a equação de onda pode ser obtida para se atingir uma onda de qualquer forma desejada, mas que satisfaça a Equação (14). O somatório de um número infinito de harmônicas pelo uso da série de Fourier pode produzir uma onda periódica de forma quadrada ou triangular tanto no espaço como no tempo. Ondas não periódicas podem ser obtidas de nossa solução básica para os métodos de integração de Fourier. Esses tópicos são abordados nos livros mais avançados em teoria eletromagnética.

EP11.1. A amplitude do campo elétrico de uma onda plana uniforme propagando-se na direção $\mathbf{a}_z$ é 250 V/m. Se $\mathbf{E} = E_x\mathbf{a}_x$ e $\omega = 1{,}00$ Mrad/s, calcule: (*a*) a frequência; (*b*) o comprimento de onda; (*c*) o período; (*d*) a amplitude de $\mathbf{H}$.

Resp. 159 kHz; 1,88 km; 6,28 μs; 0,663 A/m

EP11.2. Seja $\mathbf{H}_s = (2\angle{-40°}\mathbf{a}_x - 3\angle 20°\mathbf{a}_y)e^{-j0{,}07z}$ A/m para uma onda plana uniforme que se propaga no espaço livre. Calcule: (*a*) ω; (*b*) H_x em $P(1, 2, 3)$ em $t = 31$ ns; (*c*) $|\mathbf{H}|$ em $t = 0$ na origem.

Resp. 21,0 Mrad/s; 1,934 A/m; 3,22 A/m

11.2 PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM DIELÉTRICOS

Estendemos agora nosso tratamento analítico da onda plana uniforme para a propagação em um dielétrico de permissividade ϵ e permeabilidade μ. O meio é considerado

homogêneo (possuindo μ e ϵ constantes com a posição) e isotrópico (no qual μ e ϵ não variam com a orientação do campo). A equação de Helmholtz é

$$\nabla^2 \mathbf{E}_s = -k^2 \mathbf{E}_s \tag{36}$$

onde o número de onda é uma função das propriedades do material, conforme descrito por μ e ϵ:

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = k_0\sqrt{\mu_r \epsilon_r} \tag{37}$$

Para E_{xs} temos

$$\frac{d^2 E_{xs}}{dz^2} = -k^2 E_{xs} \tag{38}$$

Uma característica importante da propagação de ondas em um dielétrico é que k pode ser um valor complexo, e como tal é chamado de *constante de propagação* complexa. Uma solução geral da Equação (38), na verdade, permite a possibilidade de um k complexo, e é comum expressá-lo pelas suas partes real e imaginária da seguinte maneira:

$$jk = \alpha + j\beta \tag{39}$$

Uma solução para a Equação (38) seria:

$$E_{xs} = E_{x0}e^{-jkz} = E_{x0}e^{-\alpha z}e^{-j\beta z} \tag{40}$$

Multiplicando a Equação (40) por $e^{j\omega t}$ e considerando a parte real, teremos uma forma para o campo que pode ser mais facilmente visualizada:

$$E_x = E_{x0}e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z) \tag{41}$$

Nós a reconhecemos como uma onda plana uniforme que se propaga na direção progressiva de z com constante de defasamento β, mas a qual (para α positivo) perde amplitude com o aumento de z de acordo com o fator $e^{-\alpha z}$. Logo, o efeito geral de um k de valor complexo é o de levar a uma onda viajante que muda sua amplitude com a distância. Se α é positivo, é chamado de *coeficiente de atenuação*. Se α é negativo, a amplitude da onda aumenta com a distância, e α é chamado de *coeficiente de ganho*. Este último efeito ocorreria, por exemplo, em amplificadores a *laser*. Na discussão presente e futuras deste livro, consideraremos apenas meios passivos, nos quais um ou mais mecanismos de perdas estão presentes, produzindo assim um α positivo.

O coeficiente de atenuação é medido em nepers por metro (Np/m) de forma que o expoente de e possa ser medido na unidade adimensional de nepers. Logo, se $\alpha = 0{,}01$ Np/m, a amplitude de crista da onda em $z = 50$ m será $e^{-0{,}5}/e^{-0} = 0{,}607$ de seu valor em $z = 0$. Quando viaja uma distância de $1/\alpha$ na direção $+z$, a amplitude da onda é reduzida pelo fator familiar de e^{-1}, ou 0,368.

As maneiras pelas quais os processos físicos em um material podem afetar o campo elétrico da onda são descritas mediante uma *permissividade complexa*, na forma

$$\epsilon = \epsilon' - j\epsilon'' = \epsilon_0(\epsilon'_r - j\epsilon''_r) \tag{42}$$

Dois mecanismos importantes que originam uma permissividade complexa (e com isso resultam em perdas na onda) são a oscilação iônica e o relaxamento do dipolo, ambos discutidos no Apêndice E. Um mecanismo adicional é a condução de elétrons livres ou lacunas, a qual será explorada ao longo deste capítulo.

Perdas que se originam da resposta do meio ao campo magnético podem ocorrer também, sendo que essas são modeladas por uma *permeabilidade complexa*, $\mu = \mu' - j\mu'' = \mu_0(\mu'_r - j\mu''_r)$. Exemplos de meios desse tipo incluem materiais *ferrimagnéticos*, ou *ferrites*. A resposta magnética é geralmente muito fraca em comparação à resposta dielétrica na maioria dos materiais de interesse para a propagação de ondas. Nestes materiais, $\mu \approx \mu_0$. Consequentemente, nossa discussão sobre mecanismos de perdas estará restrita àqueles descritos pela permissividade complexa, e em nosso tratamento consideraremos μ como inteiramente real.

Podemos substituir a Equação (42) na Equação (37), o que resulta em

$$k = \omega\sqrt{\mu(\epsilon' - j\epsilon'')} = \omega\sqrt{\mu\epsilon'}\sqrt{1 - j\frac{\epsilon''}{\epsilon'}} \tag{43}$$

Note a presença do segundo fator de radiciação na Equação (43), o qual se torna unitário (e real) à medida que ϵ'' se aproxima de zero. Com ϵ'' diferente de zero, k é complexo, e então perdas ocorrem, quantificadas pelo fator de atenuação α na Equação (39). A constante de defasamento β (e consequentemente o comprimento de onda e a velocidade de fase) também será afetada por ϵ''. Assim, α e β são encontrados tomando-se as partes real e imaginária de jk a partir da Equação (43). Obtemos

$$\alpha = \text{Re}\{jk\} = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon'}{2}}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2} - 1\right)^{1/2} \tag{44}$$

$$\beta = \text{Im}\{jk\} = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon'}{2}}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2} + 1\right)^{1/2} \tag{45}$$

Temos um α diferente de zero (e por isso com perdas) caso a parte imaginária da permissividade, ϵ'', estiver presente. Também observamos nas Equações (44) e (45) a presença da razão ϵ''/ϵ', que é chamada de *tangente de perdas*. O significado do termo será demonstrado quando investigarmos o caso específico de meios condutivos. A importância prática dessa razão reside na comparação da sua amplitude em relação à unidade, a qual permite simplificações a serem feitas nas Equações (44) e (45).

Ocorrendo ou não perdas, da Equação (41) podemos obter que a velocidade de fase da onda é dada por

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \tag{46}$$

O comprimento de onda é a distância necessária para efetuar um deslocamento de fase de 2π radianos

$$\beta\lambda = 2\pi$$

o que leva à definição fundamental de comprimento de onda,

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \tag{47}$$

Uma vez que temos uma onda plana uniforme, o campo magnético é encontrado a partir de

$$H_{ys} = \frac{E_{x0}}{\eta} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

onde a impedância intrínseca é agora uma grandeza complexa,

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon' - j\epsilon''}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \frac{1}{\sqrt{1 - j(\epsilon''/\epsilon')}} \tag{48}$$

Os campos elétrico e magnético não estão mais em fase.

Um caso especial é aquele em que consideramos um meio sem perdas, ou *dielétrico perfeito*, no qual $\epsilon'' = 0$, e então $\epsilon = \epsilon'$. Da Equação (44), isso leva a $\alpha = 0$, e da Equação (45),

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon'} \qquad \text{(meio sem perdas)} \tag{49}$$

Com $\alpha = 0$, o campo real assume a forma

$$E_x = E_{x0} \cos(\omega t - \beta z) \tag{50}$$

Podemos interpretar isso como uma onda viajante na direção $+z$ em uma velocidade de fase v_p, onde

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon'}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon'_r}}$$

O comprimento de onda é

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\epsilon'}} = \frac{1}{f\sqrt{\mu\epsilon'}} = \frac{c}{f\sqrt{\mu_r\epsilon'_r}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r\epsilon'_r}} \qquad \text{(meio sem perdas)} \tag{51}$$

onde λ_0 é o comprimento de onda no espaço livre. Note que $\mu_r \epsilon'_r > 1$, e dessa forma o comprimento de onda e a velocidade são menores em todos os meios reais, se comparados aos seus valores no espaço livre.

Associado com E_x está a intensidade de campo magnético

$$H_y = \frac{E_{x0}}{\eta} \cos(\omega t - \beta z)$$

onde a impedância intrínseca é

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \tag{52}$$

Os dois campos são mais uma vez perpendiculares entre si, perpendiculares à direção de propagação e estão em fase um com o outro, em todos os pontos. Note que quando se calcula o produto vetorial de **E** com **H**, o vetor resultante está na direção de propagação. Veremos a razão para tal quando discutirmos sobre o vetor de Poynting.

EXEMPLO 11.3

Vamos aplicar esses resultados a uma onda plana de 1 MHz que se propaga na água doce. Nessa frequência, as perdas na água são desprezíveis, o que significa que podemos considerar $\epsilon'' = 0$. Na água, $\mu_r = 1$ e em 1 MHz, $\epsilon_r' = 81$.

Solução. Começamos calculando a constante de defasamento. Utilizando a Equação (45) com $\epsilon'' = 0$, temos

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon'} = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}\sqrt{\epsilon_r'} = \frac{\omega\sqrt{\epsilon_r'}}{c} = \frac{2\pi \times 10^6\sqrt{81}}{3{,}0 \times 10^8} = 0{,}19 \text{ rad/m}$$

Utilizando esse resultado, podemos determinar o comprimento de onda e a velocidade de fase:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{0{,}19} = 33 \text{ m}$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \times 10^6}{0{,}19} = 3{,}3 \times 10^7 \text{ m/s}$$

O comprimento de onda no ar teria sido 300 m. Continuando nossos cálculos, achamos a impedância intrínseca usando a Equação (48) e considerando ainda $\epsilon'' = 0$:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r'}} = \frac{377}{9} = 42\ \Omega$$

Se fizermos a intensidade de campo elétrico ter uma amplitude máxima de 0,1 V/m, então

$$E_x = 0{,}1 \cos(2\pi 10^6 t - 0{,}19z) \text{ V/m}$$

$$H_y = \frac{E_x}{\eta} = (2{,}4 \times 10^{-3})\cos(2\pi 10^6 t - 0{,}19z) \text{ A/m}$$

EP11.3. Uma onda plana uniforme de 9,375 GHz está se propagando no polietileno (ver Apêndice C). Se a amplitude da intensidade de campo elétrico é 500 V/m e considera-se um material sem perdas, calcule: (*a*) a constante de defasamento; (*b*) o comprimento de onda no polietileno; (*c*) a velocidade de propagação; (*d*) a impedância intrínseca; (*e*) a amplitude da intensidade de campo magnético.

Resp. 295 rad/m; 2,13 cm; $1{,}99 \times 10^8$ m/s; 251 Ω; 1,99 A/m

EXEMPLO 11.4

Novamente consideramos a propagação de onda plana na água, mas em uma frequência de micro-ondas muito mais alta: 2,5 GHz. Em frequências nessa faixa e em frequências mais altas, os fenômenos de relaxamento do dipolo e de ressonância nas moléculas de água se tornam importantes.[2] As partes real e imaginária da permissividade estão presentes, e ambas variam com a frequência. Em frequências abaixo daquelas da luz visível, os dois mecanismos juntos produzem um valor de ϵ'' que aumenta com o aumento da frequência, atingindo um máximo próximo a 10^{13} Hz. O valor de ϵ' diminui com o aumento da frequência, atingindo um mínimo também próximo de 10^{13} Hz. A Referência 3 traz detalhes específicos. Em 2,5 GHz, os efeitos de relaxamento do dipolo dominam. Os valores de permissividade são $\epsilon'_r = 78$ e $\epsilon''_r = 7$. Da Equação (44), temos

$$\alpha = \frac{(2\pi \times 2{,}5 \times 10^9)\sqrt{78}}{(3{,}0 \times 10^8)\sqrt{2}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{7}{78}\right)^2} - 1 \right)^{1/2} = 21 \text{ Np/m}$$

Esse primeiro cálculo demonstra o princípio de operação do *forno de micro-ondas*. Quase todos os alimentos contêm água, e então podem ser cozidos quando a radiação de micro-ondas incidente é absorvida e convertida em calor. Note que o campo se atenuará para um valor de e^{-1} vezes seu valor inicial em uma distância de $1/\alpha = 4{,}8$ cm. Essa distância é chamada de *profundidade de penetração* do material, e é claro que é dependente da frequência. A profundidade de 4,8 cm é razoável para cozinhar comida, pois ela levaria a um aumento de temperatura que é bastante uniforme ao longo da profundidade do material. Em frequências muito mais altas, onde ϵ'' é maior, a profundidade de penetração diminui, e muita potência é absorvida na superfície. Em frequências mais baixas, a profundidade de penetração aumenta, e geralmente não temos uma absorção suficiente. Fornos de micro-ondas comerciais operam em frequências próximas a 2,5 GHz.

Usando a Equação (45), em um cálculo muito similar àquele para α, encontramos $\beta = 464$ rad/m. O comprimento de onda é $\lambda = 2\pi/\beta = 1{,}4$ cm, enquanto no espaço livre ele teria sido $\lambda_0 = c/f = 12$ cm.

Usando (48), a impedância intrínseca é encontrada como sendo

$$\eta = \frac{377}{\sqrt{78}} \frac{1}{\sqrt{1 - j(7/78)}} = 43 + j1{,}9 = 43\angle 2{,}6^\circ\ \Omega$$

e E_x está adiante de H_y no tempo por 2,6° em todos os pontos.

Em seguida, consideraremos o caso de materiais condutores, nos quais correntes são formadas pela movimentação de elétrons livres ou lacunas sob a influência de um campo elétrico. A relação que governa é $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, onde σ é a condutividade do material. Com condutividade finita, a onda perde potência por aquecimento resistivo do

[2] Esses mecanismos e como eles produzem uma permissividade complexa são descritos no Apêndice E. Adicionalmente, sugere-se ao leitor as páginas 73-84 na Referência 1 e páginas 678-82 na Referência 2 para tratamentos gerais dos efeitos de relaxamento e ressonância na propagação de ondas. Discussões e dados específicos para a água são apresentados na Referência 3, páginas 314-316.

material. Procuramos uma interpretação da permissividade complexa considerando sua relação com a condutividade. Considere a equação de rotacional de Maxwell, a Equação (23). Substituindo seus termos pela Equação (42), temos

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = j\omega(\epsilon' - j\epsilon'')\mathbf{E}_s = \omega\epsilon''\mathbf{E}_s + j\omega\epsilon'\mathbf{E}_s \qquad (53)$$

Essa equação pode ser expressa de uma maneira mais familiar, na qual a corrente de condução está incluída:

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = \mathbf{J}_s + j\omega\epsilon\mathbf{E}_s \qquad (54)$$

Em seguida usamos $\mathbf{J}_s = \sigma\mathbf{E}_s$, e interpretamos ϵ na Equação (54) como ϵ'. A última equação se torna:

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = (\sigma + j\omega\epsilon')\mathbf{E}_s = \mathbf{J}_{\sigma s} + \mathbf{J}_{ds} \qquad (55)$$

a qual expressamos pela densidade de corrente de condução, $\mathbf{J}_{\sigma s} = \sigma\mathbf{E}_s$, e pela densidade de corrente de deslocamento, $\mathbf{J}_{ds} = j\omega\epsilon'\mathbf{E}_s$. Comparando as Equações (53) e (55), verificamos que, em um meio condutivo,

$$\epsilon'' = \frac{\sigma}{\omega} \qquad (56)$$

Vamos agora voltar nossa atenção para o caso de um material dielétrico no qual as perdas são muito pequenas. O critério pelo qual devemos julgar se as perdas são ou não pequenas é a magnitude da tangente de perdas, ϵ''/ϵ'. Esse parâmetro terá uma influência direta no coeficiente de atenuação α, conforme obtido da Equação (44). No caso de meios condutores, para os quais a Equação (56) se aplica, a tangente de perdas se torna $\sigma/\omega\epsilon'$. Pela inspeção da Equação (55), vemos que a razão entre as intensidades da densidade de corrente de condução e densidade de corrente de deslocamento é

$$\frac{J_{\sigma s}}{J_{ds}} = \frac{\epsilon''}{j\epsilon'} = \frac{\sigma}{j\omega\epsilon'} \qquad (57)$$

Isto é, esses dois vetores apontam na mesma direção e sentido no espaço, mas estão 90° defasados no tempo. A densidade de corrente de deslocamento está à frente da densidade de corrente de condução por 90°, assim como a corrente em um capacitor está 90° à frente da corrente por um resistor colocado em paralelo, em um circuito elétrico comum. Essa relação entre fases é mostrada na Figura 11.2. O ângulo θ (que não deve ser confundido com o ângulo polar em coordenadas esféricas) deve, então, ser identificado como o ângulo pelo qual a densidade de corrente de deslocamento está à frente da densidade de corrente total, e

$$\text{tg}\,\theta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} = \frac{\sigma}{\omega\epsilon'} \qquad (58)$$

A lógica por trás do termo *tangente de perdas* fica então evidente. O Problema 11.16 no final do capítulo indica que o Q de um capacitor (seu fator de qualidade, não sua carga) que possui um dielétrico com perdas é o inverso da tangente de perdas.

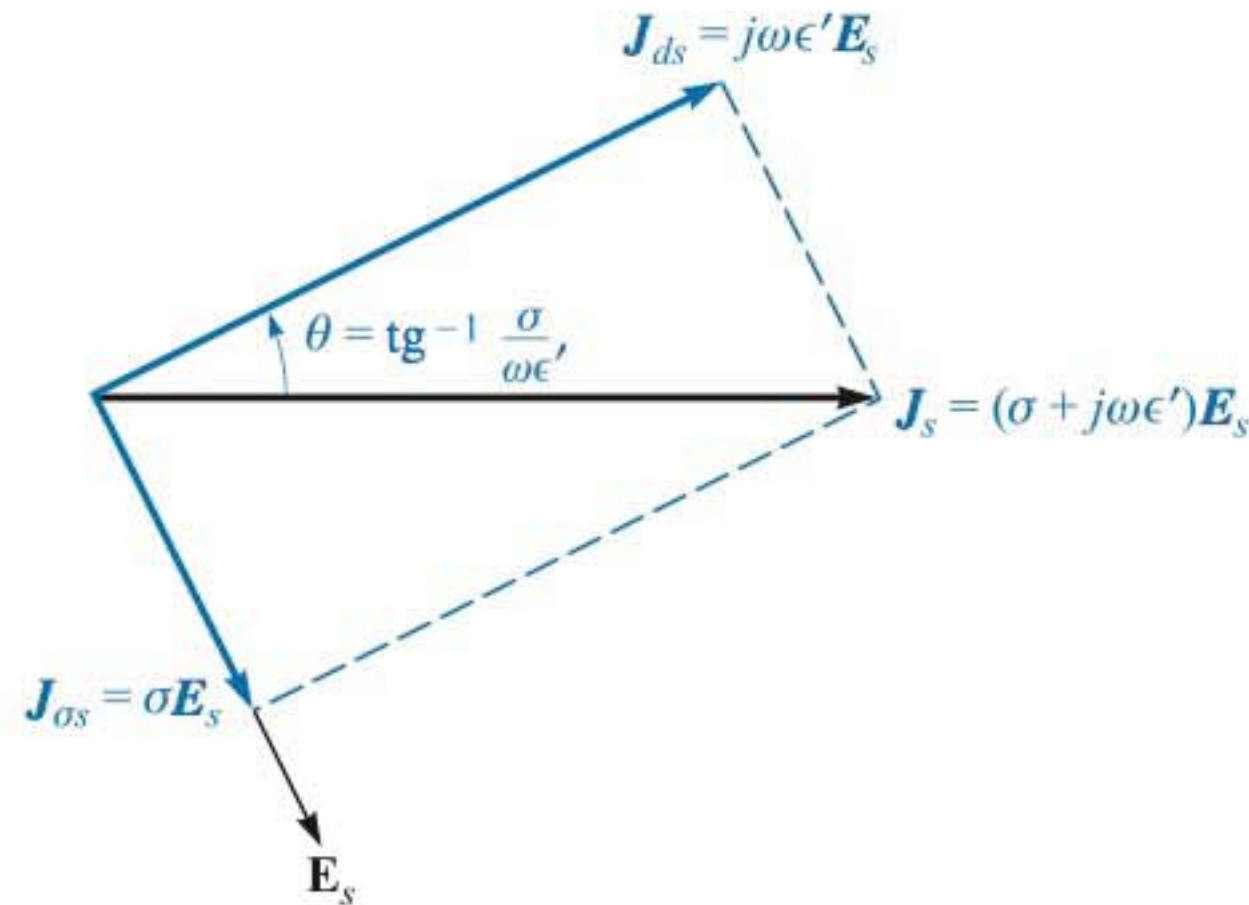



Figura 11.2 A relação tempo-fase entre $\mathbf{J}_{ds}$, $\mathbf{J}_{\sigma s}$, $\mathbf{J}_s$ e $\mathbf{E}_s$. A tangente de θ é igual a $\sigma/\omega\epsilon'$, e $90° - \theta$ é o ângulo do fator de potência comum, ou o ângulo pelo qual $\mathbf{J}_s$ está adiantado de $\mathbf{E}_s$.

Se a tangente de perdas é pequena, então conseguimos obter aproximações úteis para as constantes de atenuação e de defasamento, assim como para a impedância intrínseca. O critério para uma pequena tangente de perdas é $\epsilon''/\epsilon' \ll 1$, com o que se identifica o meio como um *bom dielétrico*.

Considerando um material condutivo, para o qual $\epsilon'' = \sigma/\omega$, a Equação (43) se torna

$$jk = j\omega\sqrt{\mu\epsilon'}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon'}} \tag{59}$$

Podemos expandir o segundo radical usando o teorema do binomial

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

onde $|x| \ll 1$. Identificamos x como $-j\sigma/\omega\epsilon'$ e n como $1/2$, e então

$$jk = j\omega\sqrt{\mu\epsilon'}\left[1 - j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon'} + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon'}\right)^2 + \cdots\right] = \alpha + j\beta$$

Neste caso, para um bom dielétrico,

$$\alpha = \mathrm{Re}(jk) \doteq j\omega\sqrt{\mu\epsilon'}\left(-j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon'}\right) = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \tag{60a}$$

e

$$\beta = \mathrm{Im}(jk) \doteq \omega\sqrt{\mu\epsilon'}\left[1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon'}\right)^2\right] \tag{60b}$$

As Equações (60*a*) e (60*b*) podem ser comparadas diretamente com as das linhas de transmissão, onde α e β sob condições de baixas perdas, são expressas pelas Equações (54*a*) e (54*b*) do Capítulo 10. Nessa comparação, associamos σ com G, μ com L e ϵ com C. Note que na propagação de ondas planas em meios sem fronteiras não pode haver grandeza que seja análoga ao parâmetro de resistência do condutor da

linha de transmissão, R. Em muitos casos, o segundo termo em (60b) é pequeno o bastante, de forma que

$$\beta \doteq \omega\sqrt{\mu\epsilon'} \tag{61}$$

Aplicando a expansão binomial à Equação (48), obtemos, para um bom dielétrico

$$\eta \doteq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}}\left[1 - \frac{3}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon'}\right)^2 + j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon'}\right] \tag{62a}$$

ou

$$\eta \doteq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}}\left(1 + j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon'}\right) \tag{62b}$$

As condições sob as quais essas aproximações podem ser feitas dependem da exatidão desejada, medida pelo tanto que os resultados desviam daqueles dados por fórmulas exatas, como as Equações (44) e (45). Desvios de não mais que alguns poucos pontos percentuais ocorrem se $\sigma/\omega\epsilon' < 0{,}1$.

EXEMPLO 11.5

Como comparação, repetimos os cálculos do Exemplo 11.4, utilizando as fórmulas aproximadas das Equações (60a), (61) e (62b).

Solução. Primeiramente, a tangente de perdas nesse caso vale $\epsilon''/\epsilon' = 7/78 = 0{,}09$. Utilizando a Equação (60), e considerando $\epsilon'' = \sigma/\omega$, temos

$$\alpha \doteq \frac{\omega\epsilon''}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} = \frac{1}{2}(7 \times 8{,}85 \times 10^{12})(2\pi \times 2{,}5 \times 10^{9})\frac{377}{\sqrt{78}} = 21 \text{ cm}^{-1}$$

Obtemos então, utilizando a Equação (61b),

$$\beta \doteq (2\pi \times 2{,}5 \times 10^{9})\sqrt{78}/(3 \times 10^{8}) = 464 \text{ rad/m}$$

Finalmente, com a Equação (62b)

$$\eta \doteq \frac{377}{\sqrt{78}}\left(1 + j\frac{7}{2 \times 78}\right) = 43 + j1{,}9$$

Esses resultados são idênticos (dentro das limitações de exatidão determinadas pelos números dados) aos do Exemplo 11.4. Pequenas variações serão encontradas, conforme o leitor poderá verificar ao repetir os cálculos de ambos os exemplos e expressando os resultados com quatro ou cinco números significativos. Como sabemos, esta última prática não teria significado porque os parâmetros dados não foram especificados com tal exatidão. Esse é frequentemente o caso, uma vez que os valores medidos não são sempre conhecidos com alta precisão. Dependendo da precisão desses valores, pode-se às vezes utilizar um julgamento mais flexível sobre quando as fórmulas aproximadas podem ser utilizadas, permitindo valores da tangente de perdas que podem ser maiores que 0,1 (mas ainda menores que 1).

EP11.4. Dado um material não magnético que possui $\epsilon'_r = 3{,}2$ e $\sigma = 1{,}5 \times 10^{-4}$ S/m, calcule valores numéricos a 3 MHz para: (*a*) a tangente de perdas; (*b*) a constante de atenuação; (*c*) a constante de defasamento; (*d*) a impedância intrínseca.

Resp. 0,28; 0,016 Np/m; 0,11 rad/m; $207\angle 7{,}8^\circ\ \Omega$

EP11.5. Considere um material para o qual $\mu_r = 1$, $\epsilon'_r = 2{,}5$ e a tangente de perdas seja 0,12. Se esses três valores são constantes com a frequência na faixa de 0,5 MHz $\leq f \leq$ 100 MHz, calcule: (*a*) σ em 1 e 75 MHz; (*b*) λ em 1 e 75 MHz; (*c*) v_p em 1 e 75 MHz.

Resp. $1{,}67 \times 10^{-5}$ e $1{,}25 \times 10^{-3}$ S/m; 190 e 2,53 m; $1{,}90 \times 10^8$ m/s e $1{,}90 \times 10^8$ m/s

11.3 TEOREMA DE POYNTING E POTÊNCIA DA ONDA

Ilustração

Para se encontrar o fluxo de potência associado à onda eletromagnética, é necessário desenvolver um teorema sobre potência para o campo eletromagnético, conhecido como teorema de Poynting. Ele foi originalmente postulado em 1884 pelo físico inglês John H. Poynting.

O desenvolvimento começa com uma das equações de rotacional de Maxwell, na qual consideramos o meio condutivo:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{63}$$

Em seguida, tomamos o produto escalar de cada um dos lados da Equação (63) com **E**,

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{64}$$

Introduzimos, então, a seguinte identidade vetorial, que pode ser provada por expansão em coordenadas cartesianas:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} + \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} \tag{65}$$

Utilizando a Equação (65) no lado esquerdo da Equação (64) obtemos

$$\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{66}$$

onde o rotacional do campo elétrico é dado pela outra equação de rotacional de Mawxell:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Logo,

$$-\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

ou

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{67}$$

As duas derivadas no tempo na Equação (67) podem ser rearranjadas da seguinte maneira:

$$\epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}\right) \tag{68a}$$

e

$$\mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}\right) \tag{68b}$$

Com elas, a Equação (67) se torna

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}\right) \tag{69}$$

Finalmente, integramos a Equação (69) por um volume:

$$-\int_{\text{vol}} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})\, dv = \int_{\text{vol}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}\, dv + \int_{\text{vol}} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}\right) dv + \int_{\text{vol}} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}\right) dv$$

O teorema da divergência é então aplicado ao lado esquerdo, convertendo assim a integral volumétrica em uma integral sobre a superfície que envolve o volume. No lado direito, as operações de integração espacial e diferenciação temporal são intercambiáveis. O resultado final é:

$$-\oint_{\text{área}} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{vol}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}\, dv + \frac{d}{dt}\int_{\text{vol}} \frac{1}{2}\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}\, dv + \frac{d}{dt}\int_{\text{vol}} \frac{1}{2}\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}\, dv \tag{70}$$

A Equação (70) é conhecida como teorema de Poynting. No lado direito, a primeira integral é a potência ôhmica total (mas instantânea) dissipada dentro do volume. A segunda integral é a energia total armazenada no campo elétrico, e a terceira integral é a energia total armazenada no campo magnético.[3] Uma vez que derivadas temporais são obtidas da segunda e da terceira integrais, esses resultados fornecem as taxas temporais de aumento da energia armazenada dentro do volume, ou a potência instantânea que irá aumentar a energia acumulada. A soma das expressões à direita deve então ser a potência total fluindo *para dentro* desse volume, e a potência total que flui *para fora* do volume será

$$\oint_{\text{área}} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} \quad \text{W} \tag{71}$$

onde a integral é sobre a superfície fechada que envolve o volume. O produto vetorial $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ é conhecido como vetor de Poynting, $\mathbf{S}$.

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad \text{W/m}^2 \tag{72}$$

[3] Essa é a expressão para a energia no campo magnético que antecipamos desde o Capítulo 8.

interpretado como uma densidade de potência instantânea, medida em watts por metro quadrado (W/m^2). A direção do vetor **S** indica a direção do fluxo de potência instantâneo em um ponto, e muitos de nós pensam no vetor de Poynting como um vetor que "aponta". Esse quase homônimo, apesar de incidental, é correto.[4]

Uma vez que **S** é dado pelo produto vetorial ente **E** e **H**, a direção do fluxo de potência em qualquer ponto é normal a ambos os vetores **E** e **H**. Isso certamente está de acordo com nossa experiência com a onda plana uniforme, pois a propagação no sentido $+z$ foi associada com os componentes E_x e H_y,

$$E_x \mathbf{a}_x \times H_y \mathbf{a}_y = S_z \mathbf{a}_z$$

Em um dielétrico perfeito, as amplitudes dos campos **E** e **H** são dadas por

$$E_x = E_{x0} \cos(\omega t - \beta z)$$

$$H_y = \frac{E_{x0}}{\eta} \cos(\omega t - \beta z)$$

onde η é real. A amplitude da densidade de potência é então

$$S_z = \frac{E_{x0}^2}{\eta} \cos^2(\omega t - \beta z) \tag{73}$$

No caso de um dielétrico com perdas, E_x e H_y não estão em fase no tempo. Temos

$$E_x = E_{x0} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$$

Se considerarmos

$$\eta = |\eta| \angle \theta_\eta$$

então podemos escrever a intensidade de campo magnético como

$$H_y = \frac{E_{x0}}{|\eta|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta)$$

Logo,

$$S_z = E_x H_y = \frac{E_{x0}^2}{|\eta|} e^{-2\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta) \tag{74}$$

Já que estamos lidando com um sinal senoidal, a densidade de potência média no tempo $\langle S_z \rangle$ é a grandeza que será naturalmente medida. Para encontrá-la, integramos a Equação (74) por um ciclo e dividimos pelo período $T = 1/f$. Além disso, a identidade $\cos A \cos B \equiv 1/2 \cos(A + B) + 1/2 \cos(A - B)$ é aplicada ao integrando, e obtemos:

$$\langle S_z \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \frac{E_{x0}^2}{|\eta|} e^{-2\alpha z} [\cos(2\omega t - 2\beta z - 2\theta_\eta) + \cos \theta_\eta] \, dt \tag{75}$$

O resultado da integração do componente de segundo harmônico do integrando da Equação (75) é zero, restando apenas a contribuição do componente c.c*. O resultado é

[4] Note que o símbolo vetorial **S** é usado para o vetor de Poynting, e não deve ser confundido com a área diferencial vetorial $d\mathbf{S}$. Esta última, como sabemos, é o produto do vetor normal à superfície (no sentido para fora) pela área diferencial.

* N. de T.: Neste ponto, c.c. significa *componente contínuo*.

$$\langle S_z \rangle = \frac{1}{2}\frac{E_{x0}^2}{|\eta|}e^{-2\alpha z}\cos\theta_\eta \tag{76}$$

Note que a densidade de potência se atenua por $e^{-2\alpha z}$, enquanto E_x e H_y decrescem com $e^{-\alpha z}$.

Devemos, finalmente, observar que a expressão anterior pode ser obtida muito facilmente utilizando-se as formas fasoriais dos campos elétrico e magnético. Na forma vetorial, tem-se

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2}\text{Re}(\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*) \quad \text{W/m}^2 \tag{77}$$

No caso presente

$$\mathbf{E}_s = E_{x0}e^{-j\beta z}\mathbf{a}_x$$

e

$$\mathbf{H}_s^* = \frac{E_{x0}}{\eta^*}e^{+j\beta z}\mathbf{a}_y = \frac{E_{x0}}{|\eta|}e^{j\theta}e^{+j\beta z}\mathbf{a}_y$$

onde E_{x0} foi considerado como real. A Equação (77) se aplica a qualquer onda eletromagnética senoidal e fornece a intensidade, a direção e o sentido da densidade de potência média temporal.

EP11.6. Em frequências de 1, 100 e 3.000 MHz, a constante dielétrica do gelo feito de água pura possui valores de 4,15, 3,45 e 3,20, respectivamente, enquanto a tangente de perdas é 0,12, 0,035 e 0,0009, também respectivamente. Se uma onda plana uniforme com amplitude de 100 V/m em $z = 0$ está se propagando por esse gelo, encontre a densidade de potência média no tempo em $z = 0$ e $z = 10$ m para cada frequência.

Resp. 27,1 e 25,7 W/m^2; 24,7 e 6,31 W/m^2; 23,7 e 8,63 W/m^2

11.4 PROPAGAÇÃO EM BONS CONDUTORES: EFEITO PELICULAR

Como um estudo adicional em propagação com perdas, vamos investigar o comportamento de um *bom condutor* quando uma onda plana uniforme é nele estabelecida. Esse material satisfaz o critério geral de altas perdas, no qual a tangente de perdas é considerada $\epsilon''/\epsilon' \gg 1$. Aplicando isso a um bom condutor, teremos o critério mais específico $\sigma/(\omega\epsilon') \gg 1$. Como antes, temos interesse em perdas que ocorrem na transmissão de ondas *para dentro* de um bom condutor, e encontraremos novas aproximações para a constante de defasamento, o coeficiente de atenuação e a impedância intrínseca. Entretanto, será introduzida uma modificação no problema básico, apropriada para bons condutores, a qual é relacionada a ondas associadas a campos eletromagnéticos existentes em um dielétrico externo junto à superfície do condutor. Neste caso, a onda se propaga *ao longo* da superfície. A porção do campo total que existe dentro do condutor

sofrerá perdas por dissipação devido às correntes de condução lá geradas. O campo total, dessa forma, se atenua com a distância viajada ao longo da superfície. Esse é o mecanismo para as perdas resistivas em linhas de transmissão que estudamos no Capítulo 10, e que é representado, pelo parâmetro resistência (R) da linha.

Um bom condutor implica uma alta condutividade e grandes correntes de condução. Assim, à medida que a onda se propaga, a energia representada pela onda que viaja por todo o material diminui, pois as perdas ôhmicas estão continuamente presentes. Quando discutimos a tangente de perdas, vimos que a razão entre a densidade da corrente de condução e a densidade da corrente de deslocamento em um material condutor era dada por $\sigma/\omega\epsilon'$. Escolhendo um material condutor pobre e uma frequência muito alta como um exemplo conservativo, essa razão[5] para o nicromo ($\sigma = 10^6$) em 100 MHz é de aproximadamente 2×10^8. Temos, então, uma situação na qual $\sigma/\omega\epsilon' \gg 1$, e devemos ser capazes de fazer boas aproximações para encontrar α, β e η para um bom condutor.

A expressão geral para a constante de propagação é, da Equação (59),

$$jk = j\omega\sqrt{\mu\epsilon'}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon'}}$$

a qual imediatamente simplificamos para obter

$$jk = j\omega\sqrt{\mu\epsilon'}\sqrt{-j\frac{\sigma}{\omega\epsilon'}}$$

ou

$$jk = j\sqrt{-j\omega\mu\sigma}$$

Mas

$$-j = 1\ \angle{-90^\circ}$$

e

$$\sqrt{1\ \angle{-90^\circ}} = 1\ \angle{-45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - j)$$

Logo,

$$jk = j(1 - j)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = (1 + j)\sqrt{\pi f\mu\sigma} = \alpha + j\beta \tag{78}$$

Dessa forma,

$$\boxed{\alpha = \beta = \sqrt{\pi f\mu\sigma}} \tag{79}$$

Independentemente dos parâmetros μ e σ do condutor ou da frequência do campo aplicado, α e β são iguais. Se novamente considerarmos apenas o componente E_x viajando na direção $+z$, então

$$E_x = E_{x0}e^{-z\sqrt{\pi f\mu\sigma}}\cos\left(\omega t - z\sqrt{\pi f\mu\sigma}\right) \tag{80}$$

[5] É normal considerar $\epsilon' = \epsilon_0$ para condutores metálicos.

Podemos amarrar esse campo a um campo externo na superfície do condutor, considerando a região $z > 0$ um bom condutor e a região $z < 0$ um dielétrico perfeito. Na superfície da fronteira $z = 0$, a Equação (80) se torna

$$E_x = E_{x0} \cos \omega t \qquad (z = 0)$$

Vamos considerar essa expressão como o campo fonte que estabelece os campos dentro do condutor. Uma vez que a corrente de deslocamento é desprezível,

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

Logo, a densidade de corrente de condução em qualquer ponto dentro do condutor está diretamente relacionada a **E**:

$$J_x = \sigma E_x = \sigma E_{x0} e^{-z\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \cos\left(\omega t - z\sqrt{\pi f \mu \sigma}\right) \tag{81}$$

As Equações (80) e (81) contêm muita informação. Considerando primeiramente o termo exponencial negativo, encontramos um decaimento exponencial na densidade de corrente de condução e na intensidade de campo elétrico com a penetração no condutor (afastando-se da fonte). O fator exponencial é unitário em $z = 0$ e decresce para $e^{-1} = 0{,}368$ quando

$$z = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$$

Essa distância é denotada por δ e é chamada de *profundidade de penetração*, ou *profundidade pelicular*,

$$\boxed{\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta}} \tag{82}$$

Esse é um parâmetro importante na descrição do comportamento do condutor frente a campos eletromagnéticos. Para se obter alguma ideia da magnitude da profundidade de penetração, vamos considerar o cobre, $\sigma = 5{,}8 \times 10^7$ S/m, em várias frequências diferentes. Temos

$$\delta_{\text{Co}} = \frac{0{,}066}{\sqrt{f}}$$

Na frequência industrial de 60 Hz, $\delta_{\text{Co}} = 8{,}53$ mm. Relembrando que a densidade de potência possui um termo exponencial $e^{-2\alpha z}$, vemos que a densidade de potência é multiplicada por um fator de $0{,}368^2 = 0{,}135$ para cada 8,53 mm de distância dentro do cobre.

Na frequência de micro-ondas de 10.000 MHz, δ vale $6{,}61 \times 10^{-4}$ mm. Dizendo de forma mais genérica, todos os campos dentro de um bom condutor tal como o cobre são essencialmente zero em uma distância de poucas profundidades de penetração a partir da superfície. Qualquer densidade de corrente ou intensidade de campo elétrico estabelecida na superfície de um bom condutor decai rapidamente à medida que avançamos para dentro do condutor. Cabe notar também que a energia eletromagnética não é transmitida no interior de um condutor. Viaja, sim, na região em volta do condutor, enquanto o condutor simplesmente guia a onda. Devemos considerar a propagação guiada em mais detalhes no Capítulo 13.

Suponha que tenhamos um barramento de cobre em uma subestação de uma companhia de energia elétrica, o qual desejamos que suporte altos valores de corrente. Para isso, determinamos dimensões de 5,08 e 10,16 cm para esse barramento. Assim, muito do cobre é desperdiçado, pois os campos são grandemente reduzidos em uma profundidade de propagação, que é aproximadamente 8,5 mm.[6] Um condutor oco com uma espessura da parede de aproximadamente 12 mm seria um projeto muito melhor. Apesar de estarmos aplicando os resultados de uma análise feita para um condutor plano infinito a um de dimensões finitas, os campos são atenuados no condutor de dimensões finitas de uma maneira similar (mas não idêntica).

A profundidade de penetração extremamente curta em frequências de micro-ondas mostra que apenas a superfície do condutor guia é importante. Um pedaço de vidro com uma deposição superficial de prata de 3 μm de espessura é um excelente condutor nessas frequências.

A seguir, vamos determinar expressões para a velocidade e para o comprimento de onda dentro de um bom condutor. Da Equação (82), já temos

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\delta} = \sqrt{\pi f \mu \sigma}$$

Dessa forma, uma vez que

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

encontramos o comprimento de onda como

$$\lambda = 2\pi\delta \tag{83}$$

Adicionalmente, lembrando que

$$v_p = \frac{\omega}{\beta}$$

temos

$$\boxed{v_p = \omega\delta} \tag{84}$$

Para o cobre a 60 Hz, $\lambda = 5{,}36$ cm e $v_p = 3{,}22$ m/s, ou aproximadamente 11,6 km/h; muitas pessoas conseguem correr mais rápido que isso. Mas é óbvio que, no espaço livre, uma onda de 60 Hz tem um comprimento de onda de 5.000 km e viaja à velocidade da luz.

EXEMPLO 11.6

Vamos novamente considerar a propagação de ondas na água, mas dessa vez vamos considerar a água do mar. A diferença principal entre a água do mar e a água doce é, evidentemente, o conteúdo de sal. O cloreto de sódio dissocia-se na água para formar íons de Na^+ e Cl^-, os quais, uma vez que estão carregados, vão se mover quando forçados por um campo elétrico. A água do mar é, dessa forma, condutiva, e assim atenuará as ondas eletromagnéticas por esse mecanismo. Em frequências nas

[6] Essa companhia elétrica opera em 60 Hz.

proximidades de 10^7 Hz e abaixo, os efeitos de cargas ligadas na água discutidos anteriormente são desprezíveis, e as perdas na água do mar se darão principalmente devido à condutividade associada ao sal. Consideremos uma onda incidente de frequência de 1 MHz. Desejamos encontrar a profundidade de penetração, o comprimento de onda e a velocidade de fase. Na água do mar, $\sigma = 4$ S/m e $\epsilon'_r = 81$.

Solução. Primeiramente calculamos a tangente de perdas, usando os dados fornecidos:

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon'} = \frac{4}{(2\pi \times 10^6)(81)(8{,}85 \times 10^{-12})} = 8{,}9 \times 10^2 \gg 1$$

A água do mar é então um bom condutor a 1 MHz (e a frequências mais baixas que essa). A profundidade de penetração é

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} = \frac{1}{\sqrt{(\pi \times 10^6)(4\pi \times 10^{-7})(4)}} = 0{,}25 \text{ m} = 25 \text{ cm}$$

Neste caso

$$\lambda = 2\pi\delta = 1{,}6 \text{ m}$$

e

$$\nu_p = \omega\delta = (2\pi \times 10^6)(0{,}25) = 1{,}6 \times 10^6 \text{ m/sec}$$

No espaço livre, esses valores teriam sido $\lambda = 300$ m e, é claro, $\nu = c$.

Com uma profundidade de penetração de 25 cm, é óbvio que a comunicação em frequência de rádio pela água do mar é quase impraticável. Entretanto, note que δ varia com $1/\sqrt{f}$, e que por isso as coisas melhoram em frequências mais baixas. Por exemplo, se utilizarmos uma frequência de 10 Hz (na faixa ELF*, ou frequências extremamente baixas), a profundidade de penetração é aumentada em relação àquela para 1 MHz por um fator de $\sqrt{10^6/10}$, de forma que

$$\delta(10 \text{ Hz}) \doteq 80 \text{ m}$$

O comprimento de onda correspondente é $\lambda = 2\pi\delta \doteq 500$ m. Frequências na faixa ELF foram utilizadas por muito anos na comunicação de submarinos. Os sinais eram transmitidos por antenas gigantes em terra (necessárias porque o comprimento de onda no espaço livre associado a 10 Hz é de 3×10^7 m), e depois eram recebidos pelos submarinos; para isso, uma antena feita de fio suspenso de comprimento menor que 500 m era o suficiente. A desvantagem é que as taxas de transmissão de dados no sinal em ELF são tão lentas que uma única palavra pode levar vários minutos para ser transmitida. Com isso, os sinais ELF eram usados para dizer ao submarino que iniciasse procedimentos de emergência, ou que fosse próximo à superfície para receber uma mensagem mais detalhada via satélite.

Em seguida, voltamos a nossa atenção para a tarefa de encontrar o campo magnético H_y associado com E_x. Para tal, precisamos de uma expansão para a impedância

* N. de T.: Do inglês, *Extremely low frequency*.

intrínseca para um bom condutor. Começamos com a Equação (48) da Seção 11.2, considerando $\epsilon'' = \sigma/\omega$,

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon'}}$$

Já que $\sigma \gg \omega\epsilon'$, temos

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}}$$

que pode ser escrito como

$$\eta = \frac{\sqrt{2}\angle 45^\circ}{\sigma\delta} = \frac{(1+j)}{\sigma\delta} \tag{85}$$

Logo, se escrevermos a Equação (80) utilizando a profundidade de penetração,

$$E_x = E_{x0} e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \tag{86}$$

então

$$H_y = \frac{\sigma\delta E_{x0}}{\sqrt{2}} e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{87}$$

e vemos que a amplitude máxima da intensidade do campo magnético ocorre um oitavo de ciclo mais tarde que a amplitude máxima da intensidade de campo elétrico em todos os pontos.

Das Equações (86) e (87) podemos obter o vetor de Poynting médio no tempo aplicando a Equação (77)

$$\langle S_z \rangle = \frac{1}{2} \frac{\sigma\delta E_{x0}^2}{\sqrt{2}} e^{-2z/\delta} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

ou

$$\langle S_z \rangle = \frac{1}{4}\sigma\delta E_{x0}^2 e^{-2z/\delta}$$

Notamos novamente que, a uma distância de uma profundidade de penetração, a densidade de potência é apenas $e^{-2} = 0{,}135$ de seu valor na superfície.

A potência total média, associada às perdas, em uma largura $0 < y < b$ e comprimento $0 < x < L$ na direção da corrente, conforme mostrado na Figura 11.3, é obtida encontrando-se a potência que atravessa a superfície do condutor dentro dessa área,

$$P_L = \int_{\text{área}} \langle S_z \rangle da = \int_0^b \int_0^L \frac{1}{4}\sigma\delta E_{x0}^2 e^{-2z/\delta}\Big|_{z=0} dx\, dy = \frac{1}{4}\sigma\delta b L E_{x0}^2$$

A densidade de corrente J_{x0} na superfície é definida como

$$J_{x0} = \sigma E_{x0}$$

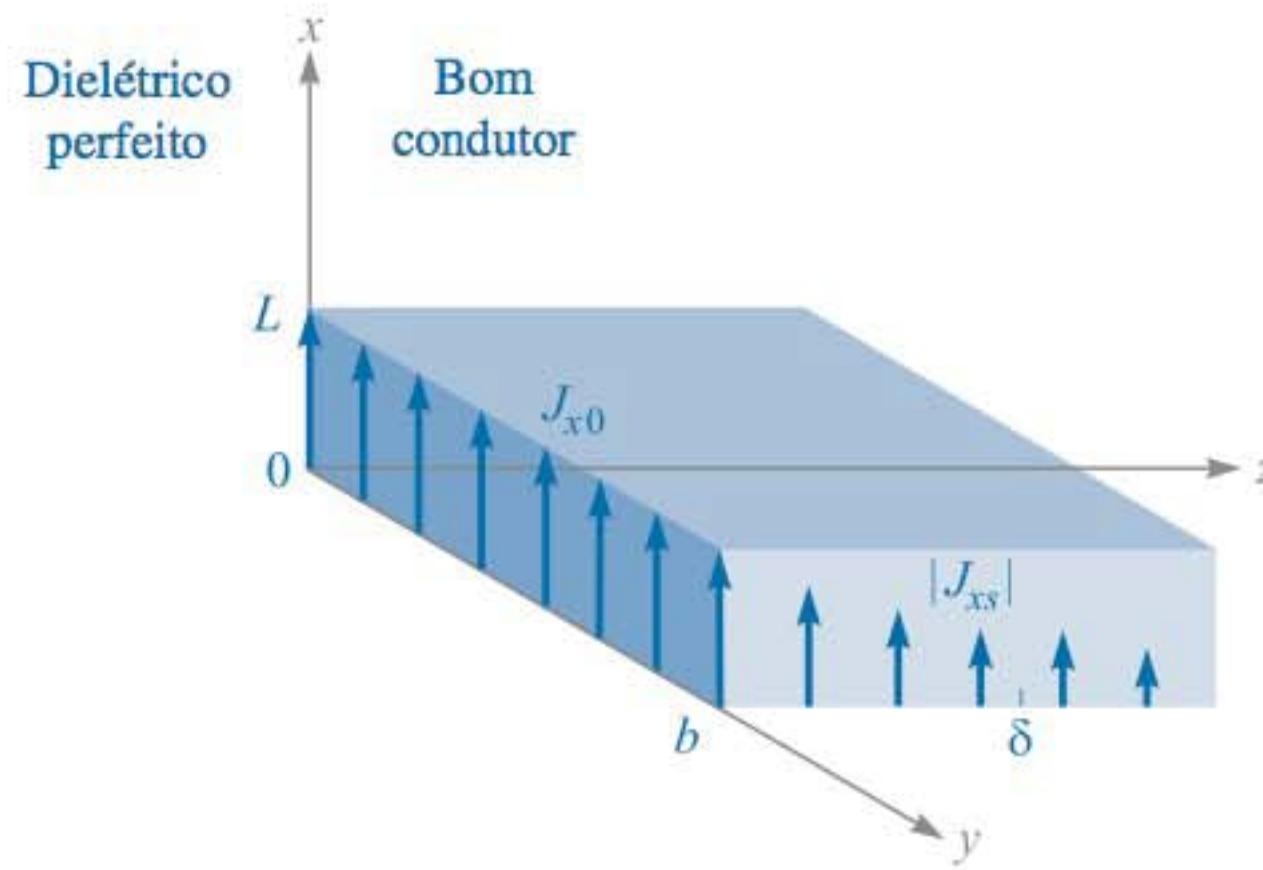



Figura 11.3 A densidade de corrente $J_x = J_{x0}e^{-z/\delta}e^{-jz/\delta}$ decai em magnitude à medida que a onda se propaga para dentro do condutor. A potência média, associada as perdas, na região $0 < x < L$, $0 < y < b$, $z < 0$, é $\delta bLJ_{x0}^2/4$ watts.

assim, temos

$$\boxed{P_L = \frac{1}{4\sigma}\delta bLJ_{x0}^2} \tag{88}$$

Agora, vamos ver qual potência de perdas teríamos se a corrente *total* em uma largura *b* estivesse distribuída *uniformemente* em uma profundidade de penetração. Para encontrar a corrente total, integramos a densidade de corrente pela profundidade infinita do condutor,

$$I = \int_0^\infty \int_0^b J_x\, dy\, dz$$

onde

$$J_x = J_{x0}e^{-z/\delta}\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$$

ou em notação exponencial complexa, para simplificar a integração:

$$\begin{aligned} J_{xs} &= J_{x0}e^{-z/\delta}e^{-jz/\delta} \\ &= J_{x0}e^{-(1+j)z/\delta} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} I_s &= \int_0^\infty \int_0^b J_{x0}e^{-(1+j)z/\delta}dy\, dz \\ &= J_{x0}be^{-(1+j)z/\delta}\frac{-\delta}{1+j}\Bigg|_0^\infty \\ &= \frac{J_{x0}b\delta}{1+j} \end{aligned}$$

e

$$I = \frac{J_{x0}b\delta}{\sqrt{2}}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Se essa corrente estiver distribuída com uma densidade uniforme J' pela seção reta $0 < y < b$, $0 < z < \delta$, então

$$J' = \frac{J_{x0}}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

A perda de potência ôhmica por unidade de volume é $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$, e assim a potência instantânea total dissipada no volume considerado é

$$P_{Li}(t) = \frac{1}{\sigma}(J')^2 bL\delta = \frac{J_{x0}^2}{2\sigma} bL\delta \cos^2\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

A potência média, associada às perdas, no tempo, é facilmente obtida, já que o valor médio do fator do cosseno ao quadrado vale metade,

$$P_L = \frac{1}{4\sigma} J_{x0}^2 bL\delta \tag{89}$$

Comparando as Equações (88) e (89), vemos que são idênticas. Logo, a potência média, associada às perdas, em um condutor com efeito pelicular pode ser calculada ao se considerar que a corrente total está distribuída uniformemente em uma profundidade de penetração. Considerando a resistência, podemos dizer que a resistência de uma largura b e comprimento L de uma barra infinitamente espessa com efeito pelicular é a mesma que a resistência de uma barra retangular de largura b, comprimento L e profundidade δ sem efeito pelicular, ou com distribuição uniforme de corrente.

Podemos aplicar isso a um condutor de seção reta circular com pouca margem de erro, desde que o raio a seja bem maior que a profundidade de penetração. A resistência em uma alta frequência onde haja um efeito pelicular bastante pronunciado é então encontrada, considerando uma barra de largura igual à circunferência $2\pi a$ e espessura δ. Logo

$$R = \frac{L}{\sigma S} = \frac{L}{2\pi a \sigma \delta} \tag{90}$$

Um fio de cobre circular de 1 mm de raio e 1 km de comprimento tem uma resistência à corrente contínua de

$$R_{\text{dc}} = \frac{10^3}{\pi 10^{-6}(5{,}8 \times 10^7)} = 5{,}48\ \Omega$$

Em 1 MHz, a profundidade de penetração é 0,066 mm. Logo, $\delta \ll a$, e a resistência em 1 MHz é encontrada pela Equação (90),

$$R = \frac{10^3}{2\pi 10^{-3}(5{,}8 \times 10^7)(0{,}066 \times 10^{-3})} = 41{,}5\ \Omega$$

EP11.7. Um cano de aço é construído a partir de um material para o qual $\mu_r = 180$ e $\sigma = 4 \times 10^6$ S/m. Os dois raios são 5 e 7 mm, e o comprimento é 75 m. Se a corrente total $I(t)$ que circula no cano é 8 cos ωt A, onde $\omega = 1.200\pi$ rad/s, encontre: (*a*) a profundidade de penetração; (*b*) a resistência efetiva ; (*c*) a resistência à corrente contínua; (*d*) a potência média, associada às perdas, no tempo.

Resp. 0,766 mm; 0,557 Ω, 0,249 Ω; 17,82 W

11.5 POLARIZAÇÃO DE ONDAS

Animação

Nas seções anteriores, tratamos das ondas planas uniformes nas quais se considerou que os campos vetoriais elétrico e magnético permaneciam em direções fixas. Especificamente, com a onda se propagando ao longo do eixo z, **E** foi considerado ao longo de x, o que então fez com que **H** estivesse ao longo de y. Essa relação ortogonal entre **E**, **H** e **S** é sempre verdadeira para uma onda plana uniforme. Entretanto, as direções de **E** e **H** dentro do plano perpendicular a $\mathbf{a}_z$ podem mudar como funções do tempo e da posição, dependendo de como a onda foi gerada ou em qual tipo de meio ela está se propagando. Com isso, uma descrição completa de uma onda eletromagnética não incluiria apenas parâmetros como comprimento de onda, velocidade de fase e potência, mas também uma definição da orientação instantânea de seus campos vetoriais. Definimos *polarização da onda* como a orientação do vetor campo elétrico em função do tempo, em um ponto fixo no espaço. Uma caracterização mais completa da polarização de uma onda incluiria na verdade a especificação da orientação do campo em *todos* os pontos, pois algumas ondas apresentam variações espaciais em sua polarização. A especificação apenas da direção do campo elétrico é suficiente, uma vez que o campo magnético é prontamente encontrado a partir de **E** utilizando-se as equações de Maxwell.

Nas ondas que estudamos anteriormente, **E** permanecia em uma orientação fixa para todos os tempos e todas as posições. Uma onda desse tipo é chamada de *linearmente polarizada*. Consideramos **E** orientado no eixo x, mas o campo poderia ser orientado em qualquer direção fixa no plano xy e ser linearmente polarizado. Para a propagação em z positivo, a onda teria geralmente seu fasor de campo elétrico expresso como

$$\mathbf{E}_s = (E_{x0}\mathbf{a}_x + E_{y0}\mathbf{a}_y)e^{-\alpha z}e^{-j\beta z} \tag{91}$$

onde E_{x0} e E_{y0} são amplitudes constantes e uniformes ao longo de x e y. O campo magnético é prontamente encontrado pela determinação de seus componentes em x e em y diretamente daquelas de $\mathbf{E}_s$. Especificamente, $\mathbf{H}_s$ para a onda da Equação (91) é

$$\mathbf{H}_s = [H_{x0}\mathbf{a}_x + H_{y0}\mathbf{a}_y]\, e^{-\alpha z}e^{-j\beta z} = \left[-\frac{E_{y0}}{\eta}\mathbf{a}_x + \frac{E_{x0}}{\eta}\mathbf{a}_y\right]e^{-\alpha z}e^{-j\beta z} \tag{92}$$

Os dois campos são esboçados na Figura 11.4. A figura demonstra a razão do sinal de menos no termo que envolve E_{y0} na Equação (92). A direção do fluxo de potência, dada por $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$, é no sentido positivo de z neste caso. Um componente de **E** na direção positiva de y necessitaria de um componente de **H** na direção negativa de x — por isso o sinal de menos. Usando as Equações (91) e (92), a densidade de potência na onda é encontrada utilizando a Equação (77):

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{S}_z \rangle &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{E_{x0}H_{y0}^*(\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y) + E_{y0}H_{x0}^*(\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_x)\}e^{-2\alpha z}\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{E_{x0}E_{x0}^*}{\eta^*} + \frac{E_{y0}E_{y0}^*}{\eta^*}\right\}e^{-2\alpha z}\mathbf{a}_z\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\eta^*}\right\}(|E_{x0}|^2 + |E_{y0}|^2)e^{-2\alpha z}\mathbf{a}_z \ \mathrm{W/m^2}
\end{aligned}$$

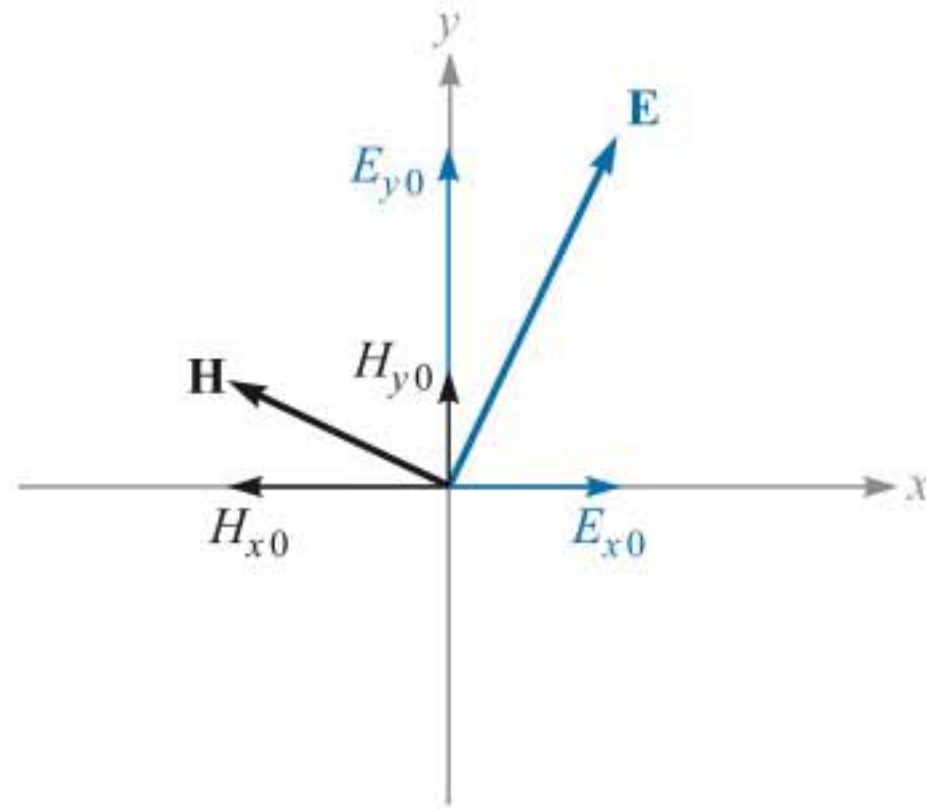



Figura 11.4 Configuração dos campos elétrico e magnético para uma onda plana linearmente polarizada genérica propagando-se na direção progressiva de z (para fora da página). Os componentes do campo correspondem àqueles nas Equações (91) e (92).

Esse resultado demonstra a ideia de que nossa onda linearmente polarizada pode ser considerada como duas ondas planas distintas que possuem polarizações em x e em y, cujos campos elétricos se combinam *em fase* para produzir o **E** total. O mesmo é verdadeiro para os componentes do campo magnético. Esse é um ponto crucial no entendimento da polarização de ondas, na medida em que *qualquer estado de polarização pode ser descrito por componentes mutuamente perpendiculares de campo elétrico e seus defasamentos relativos*.

Em seguida, consideramos o efeito de um defasamento ϕ entre E_{x0} e E_{y0}, onde $\phi < \pi/2$. Por simplicidade, consideraremos a propagação em um meio sem perdas. O campo total na forma fasorial é

$$\mathbf{E}_s = (E_{x0}\mathbf{a}_x + E_{y0}e^{j\phi}\mathbf{a}_y)e^{-j\beta z} \tag{93}$$

Novamente, para auxiliar na visualização, convertemos essa onda para a forma instantânea real multiplicando por $e^{j\omega t}$ e tomando a parte real:

$$\mathbf{E}(z,t) = E_{x0}\cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x + E_{y0}\cos(\omega t - \beta z + \phi)\mathbf{a}_y \tag{94}$$

onde consideramos E_{x0} e E_{y0} reais. Suponha que façamos $t = 0$, situação em que a Equação (94) se torna [usando $\cos(-x) = \cos(x)$]

$$\mathbf{E}(z,0) = E_{x0}\cos(\beta z)\mathbf{a}_x + E_{y0}\cos(\beta z - \phi)\mathbf{a}_y \tag{95}$$

Os gráficos das intensidades dos componentes de $\mathbf{E}(z,0)$ em função de z são mostrados na Figura 11.5. Uma vez que o tempo foi fixado em zero, a onda está congelada na posição. Um observador pode se mover ao longo do eixo z, medindo as intensidades dos componentes e, assim, a orientação do campo elétrico total em cada ponto. Vamos considerar uma crista de E_x, indicada como o ponto a na Figura 11.5. Se ϕ for zero, E_y teria uma crista na mesma posição. Uma vez que ϕ não é zero (e positivo), a crista de E_y que ocorreria no primeiro caso em a está agora deslocada para o ponto b mais à frente em z. Os dois pontos estão separados por uma distância ϕ/β. E_y, então, *está atrasado* em relação a E_x quando consideramos a dimensão *espacial*.

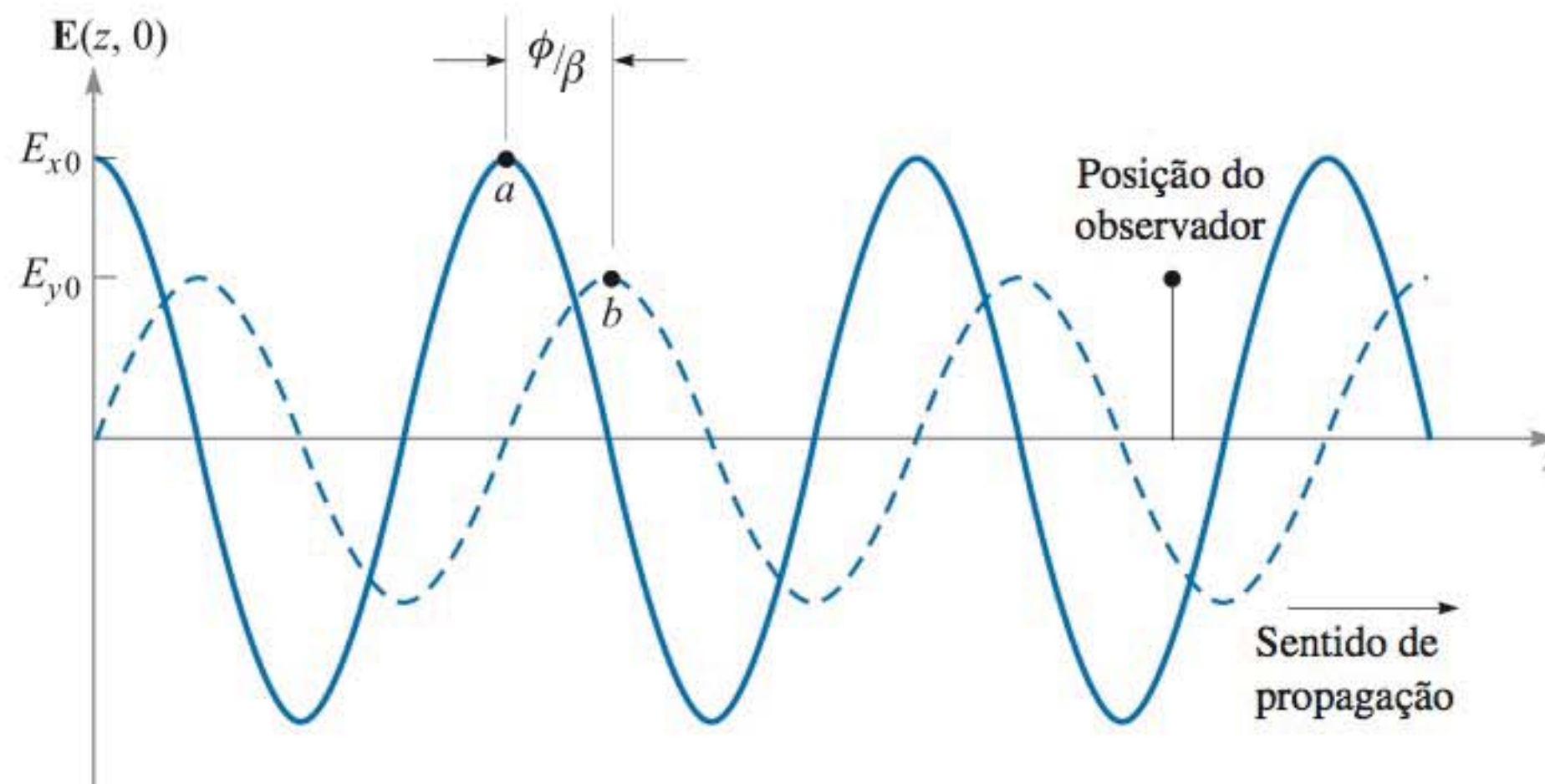



Figura 11.5 Gráfico das intensidades dos componentes do campo elétrico na Equação (95) como funções de *z*. Note que o componente em *y* está atrasado em relação ao componente em *x* no eixo *z*. À medida que o tempo avança do zero, ambas as ondas viajam para a direita, conforme a Equação (94). Com isso, para um observador em uma posição fixa, o componente em *y* está à frente no tempo.

Agora, suponha que o observador pare em algum ponto no eixo z e que o tempo volte a se mover para a frente. Ambos os campos nesse caso se movem na direção positiva de z, conforme a Equação (94) indica. Mas, o ponto b atinge o observador primeiro, seguido do ponto a. Dessa forma, vemos que E_y está à frente de E_x quando consideramos a dimensão *temporal*. Em ambos os casos (t fixo com z variando ou vice-versa) o observador nota que o campo equivalente gira em torno do eixo z enquanto sua intensidade varia. Considerando um ponto inicial em z e t, no qual o campo tem uma dada orientação e intensidade, a onda retornará à mesma orientação e intensidade em uma distância de um comprimento de onda em z (para t fixo) ou em um tempo $t = 2\pi/\omega$ mais tarde (para z fixo).

Para fins ilustrativos, se tomarmos o comprimento do campo vetorial como uma medida de sua intensidade, observaremos que, em uma posição fixa, a ponta do vetor traça o perfil de uma elipse em um tempo $t = 2\pi/\omega$. Diz-se que a onda é *polarizada elipticamente*. A polarização elíptica é na verdade o estado de polarização mais geral de uma onda, uma vez que inclui qualquer magnitude e defasamento entre E_x e E_y. A polarização linear é um caso especial da polarização elíptica no qual o defasamento é zero.

Outro caso especial de polarização elíptica ocorre quando $E_{x0} = E_{y0} = E_0$ e quando $\phi = \pm\pi/2$. Nesse caso, a onda exibe *polarização circular*. Para ver isso, incorporamos essas restrições na Equação (94) para obter

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(z, t) &= E_0[\cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x + \cos(\omega t - \beta z \pm \pi/2)\mathbf{a}_y] \\ &= E_0[\cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x \mp \text{sen}(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_y]\end{aligned} \tag{96}$$

Se considerarmos uma posição fixa ao longo de z (tal como $z = 0$) e permitirmos que o tempo varie, a Equação (96), com $\phi = +\pi/2$, se torna

$$\boxed{\mathbf{E}(0, t) = E_0[\cos(\omega t)\mathbf{a}_x - \text{sen}(\omega t)\mathbf{a}_y]} \tag{97}$$

Se escolhermos $-\pi/2$ na Equação (96), obtemos

$$\boxed{\mathbf{E}(0, t) = E_0[\cos(\omega t)\mathbf{a}_x + \text{sen}(\omega t)\mathbf{a}_y]} \tag{98}$$

O campo vetorial da Equação (98) gira no sentido anti-horário no plano xy, enquanto mantém amplitude constante E_0; assim, a ponta do vetor traça um círculo. A Figura 11.6 mostra esse comportamento.

Escolher $+\pi/2$ leva à Equação (97), cujo campo vetorial gira no sentido horário. A regra das mãos para a polarização circular está associada com as direções de rotação e de propagação da seguinte maneira: A onda exibe *polarização circular à esquerda* (l.c.p.*) se, quando orientamos a mão esquerda com o polegar na direção de propagação, os dedos se curvam no sentido de rotação do campo no tempo. A onda exibe polarização circular à direita (r.c.p.**) se, com o polegar da mão direita no sentido de propagação, os dedos se curvam no sentido de rotação do campo.[7] Logo, com a propagação progressiva em z, a Equação (97) descreve uma onda com polarização circular à esquerda, e a Equação (98) descreve uma onda com polarização circular à direita. A mesma convenção é aplicada à polarização elíptica, nas quais as descrições *polarização elíptica à esquerda* e *polarização elíptica à direita* são utilizadas.

Usando a Equação (96), o ângulo instantâneo do campo da direção x pode ser encontrado para qualquer posição ao longo de z por

$$\theta(z, t) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{E_y}{E_x}\right) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{\mp\text{sen}(\omega t - \beta z)}{\cos(\omega t - \beta z)}\right) = \mp(\omega t - \beta z) \tag{99}$$

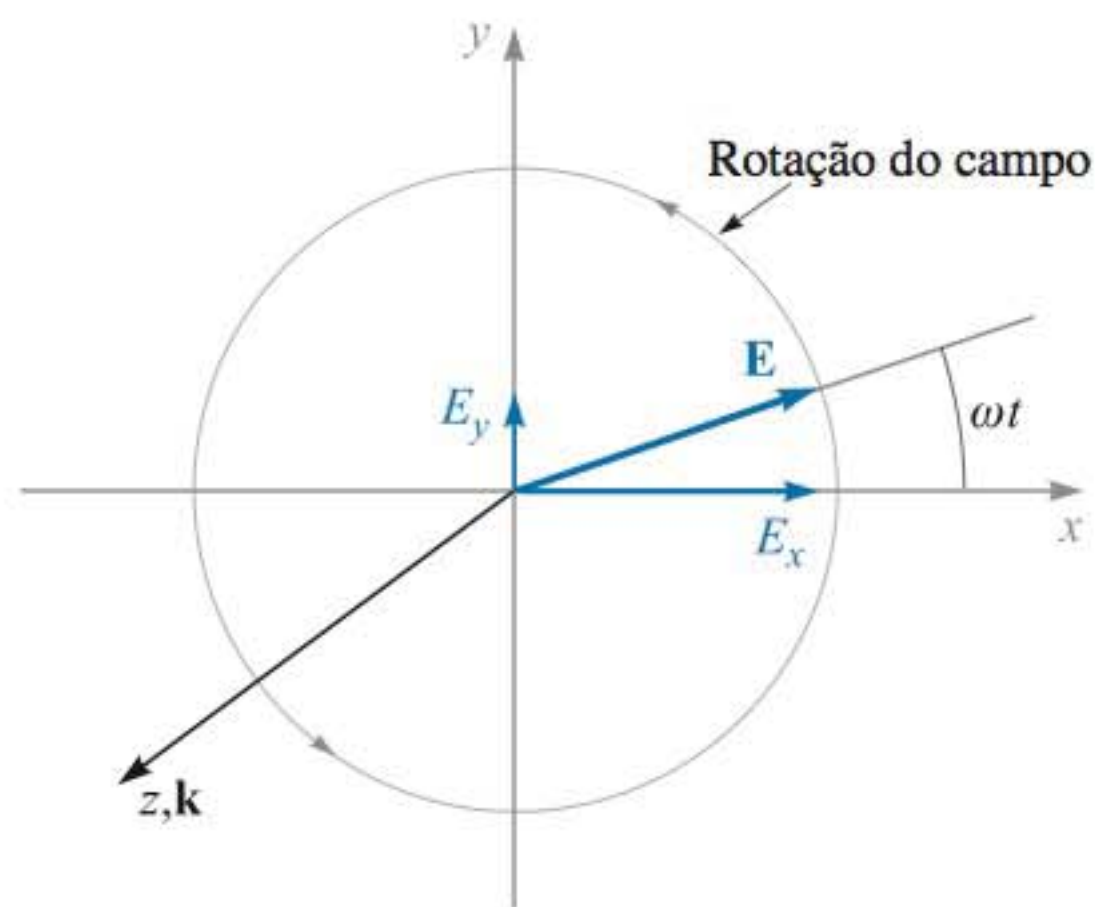



Figura 11.6 Campo elétrico no plano *xy* de uma onda plana com polarização circular à direita, conforme descrito pela Equação (98). À medida que a onda se propaga no sentido progressivo de *z*, o campo vetorial gira no sentido anti-horário no plano *xy*.

[7] Essa convenção é invertida por alguns profissionais (geralmente em ótica), que enfatizam a importância da configuração *espacial* do campo. Note que a r.c.p. pela nossa definição é formada pela propagação de um campo, que no espaço tem a forma *invertida em relação àquela de um parafuso dextrogiro*, e por essa razão é às vezes chamada de polarização circular à esquerda (ver Figura 11.7). A polarização circular à esquerda, conforme definimos, resulta da propagação de um campo que no espaço tem a forma de um parafuso dextrogiro, e é chamado de polarização circular à direita pelos entusiastas do espaço. Obviamente, é necessário um cuidado na interpretação da regra das mãos para a polarização quando determinada em um texto com o qual não se tenha familiaridade.

* N. de T.: Do inglês, *left circular polarization.*

** N. de T.: Do inglês, *right circular polarization.*

onde novamente o sinal de menos (que leva à l.c.p. para propagação positiva em z) se aplica para a escolha de $\phi = +\pi/2$ na Equação (96). O sinal de mais (que leva à r.c.p. para propagação positiva em z) é utilizado se $\phi = -\pi/2$. Se escolhermos $z = 0$, o ângulo se torna simplesmente ωt, que atinge 2π (um giro completo) no tempo $t = 2\pi/\omega$. Se escolhermos $t = 0$ e permitirmos que z varie, formaremos um padrão de campo com aspecto de um saca-rolhas. Uma maneira de visualizar isso é considerar uma escada em formato de espiral, na qual as linhas de campo (degraus da escada) são perpendiculares ao eixo z (ou eixo da escada). A relação entre esse padrão espacial de campo e o comportamento resultante no tempo em um z fixo, à medida que a onda se propaga, é mostrada em uma concepção artística na Figura 11.7.

A regra das mãos para a polarização é mudada invertendo-se o passo do saca-rolhas padrão. O modelo de escada em espiral serve apenas como um auxílio para visualização. Deve-se lembrar que a onda ainda é uma onda plana uniforme cujos campos em qualquer posição ao longo de z são infinitos em extensão, no plano transversal.

Existem muitos usos para a onda com polarização circular. Talvez sua vantagem mais óbvia seja a de que a recepção de uma onda que tenha polarização circular não depende da orientação da antena no plano normal à direção de propagação. Antenas do tipo dipolo, por exemplo, necessitam estar orientadas na direção do campo elétrico do sinal que elas recebem. Se sinais com polarização circular são transmitidos, a necessidade de orientação do receptor é consideravelmente flexibilizada. Em ótica, a luz com polarização circular consegue passar por um polarizador de qualquer

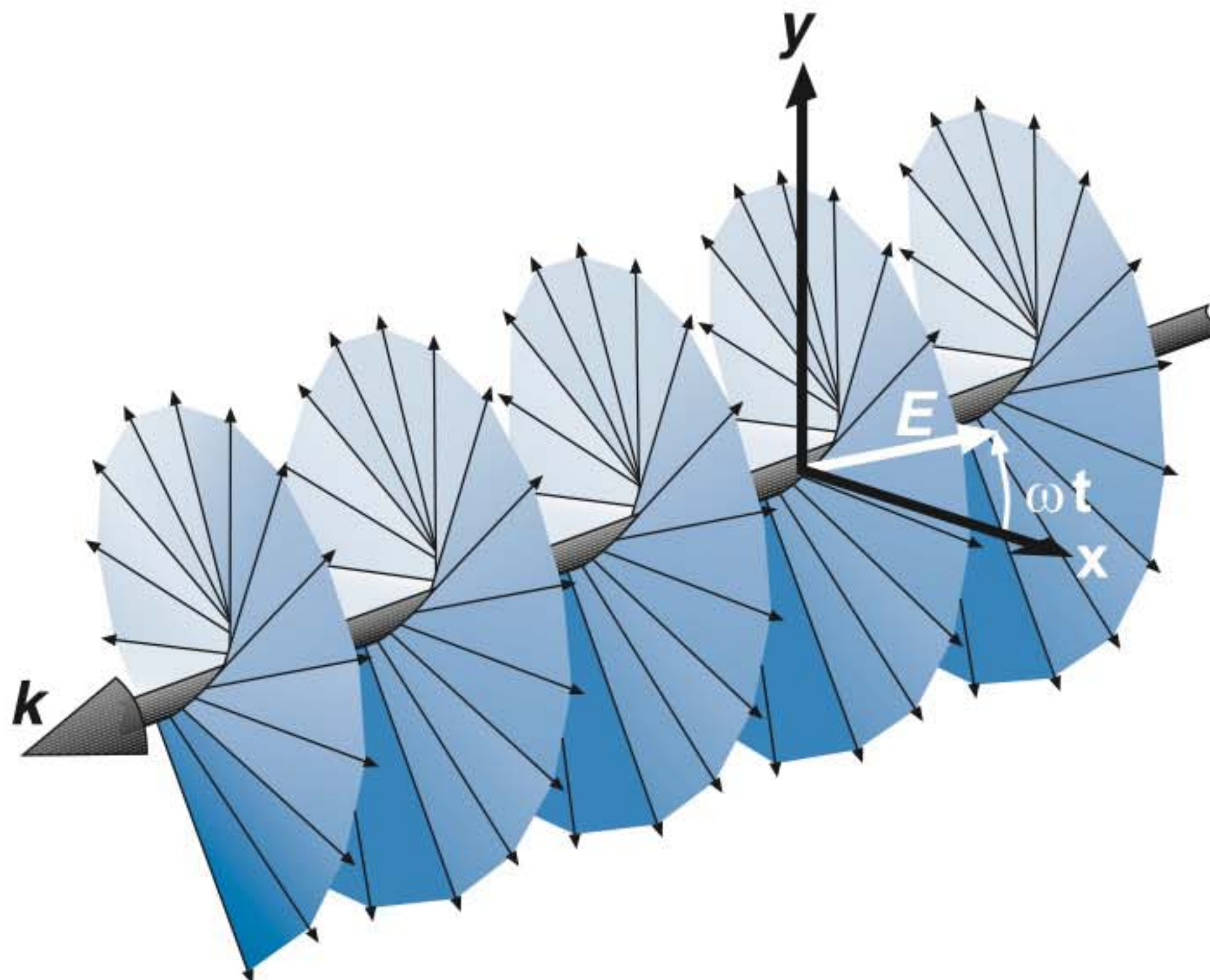



Figura 11.7 Representação de uma onda com polarização circular à direita. O vetor campo elétrico (em branco) vai girar em direção ao eixo y à medida que a onda inteira se move atravessando o plano xy na direção de $\boldsymbol{k}$. Essa rotação no sentido anti-horário (quando se olha em direção à fonte da onda) satisfaz a convenção da rotação temporal dada pela regra da mão direita, conforme descrito neste livro. A onda, entretanto, parece com um parafuso dextrogiro invertido, e por essa razão é tratada como tendo polarização circular à esquerda na outra notação.

orientação, resultando assim em uma luz linearmente polarizada em qualquer direção (apesar de se perder metade da potência original dessa maneira). Outros usos envolvem o tratamento da luz linearmente polarizada como uma superposição de ondas com polarização circular, que será descrito em seguida.

Luz com polarização circular pode ser gerada utilizando-se um meio *anisotrópico* – um material cuja permissividade é função da direção do campo elétrico. Muitos cristais possuem essa propriedade. Pode-se encontrar uma orientação de cristal na qual ao longo de uma direção (o eixo x, digamos), a permissividade seja a mais baixa, enquanto ao longo da direção ortogonal (eixo y), a permissividade é a mais alta. A estratégia é inserir uma onda linearmente polarizada com seu campo vetorial formando um ângulo de 45° com os eixos x e y do cristal. Assim, ela terá componentes com amplitudes iguais em x e em y no cristal, sendo que essas se propagarão na direção z com velocidades diferentes. Um defasamento (ou *retardo*) se acumula entre os componentes à medida que se propagam, o qual pode atingir $\pi/2$ se o cristal for comprido o suficiente. A onda na saída se torna então polarizada circularmente. Esse cristal, cortado no comprimento certo e utilizado desta maneira, é chamado de *placa de quarto de onda*, pois introduz um defasamento relativo de $\pi/2$ entre E_x e E_y, que é equivalente a $\lambda/4$.

É bastante útil expressar ondas com polarização circular na forma fasorial. Para fazer isso, notamos que a Equação (96) pode ser expressa como

$$\mathbf{E}(z,t) = \mathrm{Re}\left\{E_0 e^{j\omega t} e^{-j\beta z}\left[\mathbf{a}_x + e^{\pm j\pi/2}\mathbf{a}_y\right]\right\}$$

Considerando o fato de que $e^{\pm j\pi/2} = \pm j$, identificamos a forma fasorial como:

$$\boxed{\mathbf{E}_s = E_0(\mathbf{a}_x \pm j\mathbf{a}_y)e^{-j\beta z}} \tag{100}$$

onde o sinal de mais é utilizado para a polarização circular à esquerda e o sinal de menos para a polarização circular à direita. Se a onda se propaga no sentido negativo de z, temos

$$\boxed{\mathbf{E}_s = E_0(\mathbf{a}_x \pm j\mathbf{a}_y)e^{+j\beta z}} \tag{101}$$

onde neste caso o sinal positivo é utilizado para a polarização circular à direita e o sinal de menos para a polarização circular à esquerda. Sugerimos ao estudante que verifique isso.

EXEMPLO 11.7

Vamos considerar o resultado de se sobrepor campos com polarização à esquerda e à direita com a mesma amplitude, frequência e direção de propagação, mas supondo um defasamento de δ radianos entre os dois.

Solução. Considerando que as ondas se propagam na direção $+z$, e introduzindo uma fase relativa δ, o campo fasorial total é encontrado utilizando-se a Equação (100):

$$\mathbf{E}_{sT} = \mathbf{E}_{sR} + \mathbf{E}_{sL} = E_0[\mathbf{a}_x - j\mathbf{a}_y]e^{-j\beta z} + E_0[\mathbf{a}_x + j\mathbf{a}_y]e^{-j\beta z}e^{j\delta}$$

Agrupando os componentes, isso se torna

$$\mathbf{E}_{sT} = E_0[(1 + e^{j\delta})\mathbf{a}_x - j(1 - e^{j\delta})\mathbf{a}_y]e^{-j\beta z}$$

Colocando em evidência o termo $e^{j\delta/2}$, que contém o termo para a fase, obtemos

$$\mathbf{E}_{sT} = E_0 e^{j\delta/2}\left[(e^{-j\delta/2} + e^{j\delta/2})\mathbf{a}_x - j(e^{-j\delta/2} - e^{j\delta/2})\mathbf{a}_y\right]e^{-j\beta z}$$

Pela identidade de Euler, encontramos que $e^{j\delta/2} + e^{-j\delta/2} = 2\cos\delta/2$, e $e^{j\delta/2} - e^{-j\delta/2} = 2j \text{ sen } \delta/2$. Utilizando essas relações, obtemos

$$\mathbf{E}_{sT} = 2E_0[\cos(\delta/2)\mathbf{a}_x + \text{sen}(\delta/2)\mathbf{a}_y]e^{-j(\beta z - \delta/2)} \tag{102}$$

Reconhecemos a Equação (102) como o campo elétrico de uma *onda linearmente polarizada*, cujo campo vetorial está orientado com um ângulo $\delta/2$ em relação ao eixo x.

O Exemplo 11.7 mostra que qualquer onda linearmente polarizada pode ser expressa como a soma de duas ondas com polarização circular em sentidos opostos, e que a direção de polarização linear é determinada pelo defasamento relativo entre as duas ondas. Uma representação desse tipo é conveniente (e necessária) quando consideramos, por exemplo, a propagação de luz linearmente polarizada através de meios que contêm moléculas orgânicas. Essas frequentemente exibem estrutura em espiral que possuem passos associados à regra da mão direita ou esquerda, e elas então irão interagir diferentemente com a polarização circular à direita ou à esquerda. Como resultado, o componente circular à esquerda pode se propagar em uma velocidade diferente em relação ao componente de polarização circular à direita, e dessa forma as duas ondas acumularão um defasamento à medida que se propagam. Como resultado, a direção do campo vetorial linearmente polarizado na saída do material será diferente daquela que tinha na entrada do mesmo. A intensidade dessa rotação pode ser utilizada como uma ferramenta de medição para auxiliar estudos sobre o material.

Questões associadas à polarização se tornarão extremamente importantes quando considerarmos a reflexão de ondas no Capítulo 12.

REFERÊNCIAS

1. Balanis, C. A. *Advanced Engineering Electromagnetics*. New York: John Wiley & Sons, 1989.
2. International Telephone and Telegraph Co., Inc. *Reference Data for Radio Engineers*. 7. ed. Indianapolis, Ind.: Howard W. Sams & Co., 1985. Esse livro possui alguns dados excelentes sobre as propriedades de materiais dielétricos e isolantes.
3. Jackson, J. D. *Classical Electrodynamics*. New York: John Wiley & Sons, 1999.
4. Ramo, S., J. R. Whinnery, and T. Van Duzer. *Fields and Waves in Communication Electronics*. New York: John Wiley & Sons, 1994.

PROBLEMAS

WWW Quizzes

11.1 Mostre que $E_{xs} = A\,e^{j(k_0 z + \phi)}$ é uma solução da equação vetorial de Helmholtz, a Equação (30), para $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ e quaisquer ϕ e A.

11.2 Uma onda plana uniforme de 10 GHz se propaga em um meio sem perdas para o qual $\epsilon_r = 8$ e $\mu_r = 2$. Calcule: (*a*) v_p; (*b*) β; (*c*) λ; (*d*) $\mathbf{E}_s$; (*e*) $\mathbf{H}_s$; (*f*) $\langle\mathbf{S}\rangle$.

11.3 Um campo **H** no espaço livre é dado como $\mathcal{H}(x, t) = 10 \cos (10^8 t - \beta x)\mathbf{a}_y$ A/m. Calcule: (*a*) β; (*b*) λ; (*c*) $\mathcal{E}(x, t)$ em $P(0{,}1,\ 0{,}2,\ 0{,}3)$ em $t = 1$ ns.

11.4 Pequenas antenas possuem baixas eficiências (como será visto no Capítulo 14). A eficiência aumenta com o tamanho da antena até o ponto no qual uma dimensão crítica da mesma tem fração apreciável de um comprimento de onda, como $\lambda/8$. (*a*) Uma antena de 12 cm de comprimento opera no ar em 1 MHz. Qual é a fração de sua dimensão em função do comprimento de onda? (*b*) A mesma antena é imersa em um material de ferrite, com $\epsilon_r = 20$ e $\mu_r = 2.000$. Qual é a fração agora?

11.5 Uma onda plana uniforme de 150 MHz no espaço livre é descrita por $\mathbf{H}_s = (4 + j10)(2\mathbf{a}_x + j\mathbf{a}_y)e^{-j\beta z}$ A/m. (*a*) Encontre valores numéricos para ω, λ e β. (*b*) Encontre $\mathcal{H}(z,t)$ em $t = 1{,}5$ ns, $z = 20$ cm. (*c*) Quanto vale $|E|_{\max}$?

11.6 Uma onda plana tem campo elétrico dado por $\mathbf{E}_s = (Ey_0\, \mathbf{a}_y - E_{z0}\, \mathbf{a}_z)e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$ V/m. A impedância intrínseca do meio é: $\eta = |\eta|e^{j\phi}$, onde ϕ é uma fase constante. (*a*) Descreva a polarização da onda e sua direção de propagação. (*b*) Determine $\mathbf{H}_s$. (*c*) Calcule $\mathcal{E}(x, t)$ e $\mathcal{H}(x, t)$. (*d*) Determine $<\mathbf{S}>$ em W/m^2. (*e*) Encontre a potência média temporal, em watts, que é interceptada por uma antena de seção transversal retangular, com largura w e altura h, suspensa em paralelo ao plano yz e a uma distância d da fonte da onda.

11.7 A intensidade de campo magnético fasorial para uma onda plana uniforme de 400 MHz propagando em certo material sem perdas vale $(2\mathbf{a}_y - j5\mathbf{a}_z) e^{-j25x}$ A/m. Sabendo-se que a máxima amplitude de **E** vale 1.500 V/m, calcule β, η, λ, v_p, ϵ_r, μ_r e $\mathcal{H}(x, y, z, t)$.

11.8 Um campo elétrico no espaço livre é dado em coordenadas esféricas como $\mathbf{E}_s(r) = E_0(r)e^{-jkr}\, \mathbf{a}_\theta$ V/m. (*a*) Determine $\mathbf{H}_s(r)$ considerando um comportamento de onda plana uniforme. (*b*) Encontre $<\mathbf{S}>$. (*c*) Expresse a potência média de saída, em watts, através da uma casca esférica fechada de raio r, centrada na origem. (*d*) Estabeleça a forma funcional requerida para $E_0(r)$ que permitirá o fluxo de potência da parte *c* ser independente do raio. Com essa condição estabelecida, o campo dado torna-se aquele de um *radiador isotrópico* em um meio sem perdas (radiando a mesma potência em todas as direções).

11.9 Certo material sem perdas tem $\mu_r = 4$ e $\epsilon_r = 9$. Uma onda plana uniforme de 10 MHz está se propagando na direção $\mathbf{a}_y$ com $E_{x0} = 400$ V/m e $E_{y0} = E_{z0} = 0$ em $P(0{,}6,\ 0{,}6,\ 0{,}6)$ em $t = 60$ ns. (*a*) Calcule β, λ, v_p e η. (*b*) Encontre $\mathcal{E}(y, t)$. (*c*) Determine $\mathcal{H}(y, t)$.

11.10 Em um meio caracterizado por impedância intrínseca $\eta = |\eta|e^{j\phi}$, uma onda plana linearmente polarizada se propaga, com campo magnético dado por $\mathbf{H}_s = (H_{0y}\mathbf{a}_y + H_{0z}\mathbf{a}z)e^{-\alpha x}e^{-j\beta x}$. Calcule: (*a*) $\mathbf{E}_s$; (*b*) $\mathcal{E}(x, t)$; (*c*) $\mathcal{H}(x, t)$; (*d*) $\langle \mathbf{S} \rangle$.

11.11 Uma onda plana uniforme de 2 GHz tem uma amplitude $E_{y0} = 1{,}4$ kV/m em $(0, 0, 0, t = 0)$ e se propaga na direção $\mathbf{a}_z$ em um meio onde $\epsilon'' = 1{,}6 \times 10^{-11}$ F/m, $\epsilon' = 3{,}0 \times 10^{-11}$ F/m e $\mu = 2{,}5\ \mu$H/m. Calcule: (*a*) E_y em $P(0, 0{,}1{,}8$ cm) em 0,2 ns; (*b*) H_x em P em 0,2 ns.

11.12 Descreva como o coeficiente de atenuação de um meio líquido, considerado um bom condutor, pode ser determinado por meio da medição do comprimento de onda no líquido em uma frequência conhecida. Que restrições se aplicam? Esse método pode ser usado para encontrar a condutividade?

11.13 Seja $jk = 0{,}2 + j1{,}5 \text{ m}^{-1}$ e $\eta = 450 + j60\ \Omega$ para uma onda plana uniforme que se propaga na direção $\mathbf{a}_z$. Se $\omega = 300$ Mrad/m, calcule μ, ϵ' e ϵ'' para o meio.

11.14 Certo material não magnético tem constantes materiais $\epsilon_r' = 2$ e $\epsilon''/\epsilon' = 4 \times 10^{-4}$ em $\omega = 1{,}5$ Grad/s. Encontre a distância em que uma onda plana uniforme pode se propagar pelo material antes que: (*a*) seja atenuada de 1 Np; (*b*) o nível de potência seja reduzido pela metade; (*c*) haja um defasamento de 360°.

11.15 Um sinal de radar de 10 GHz pode ser representado como uma onda plana uniforme em uma região suficientemente pequena. Calcule o comprimento de onda em centímetros e a atenuação em nepers por metro se a onda está se propagando em um material não magnético para o qual: (*a*) $\epsilon_r' = 1$ e $\epsilon_r'' = 0$; (*b*) $\epsilon_r' = 1{,}04$ e $\epsilon_r'' = 9{,}00 \times 10^{-4}$; (*c*) $\epsilon_r' = 2{,}5$ e $\epsilon_r'' = 7{,}2$.

11.16 Considere o termo de dissipação de potência, $\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv$, no teorema de Poynting [Equação (70)]. Este termo fornece a potência perdida por aquecimento no interior do volume submetido a uma onda eletromagnética. O termo $p_d = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ é, assim, a potência dissipada por unidade de volume, W/m^3. Seguindo o mesmo raciocínio que resultou na Equação (77), a dissipação de potência média, por unidade de volume, será $< p_d > = (1/2)\, \mathcal{R}e\, \{\mathbf{E}_s \cdot \mathbf{J}_s^*\}$. (*a*) Mostre que em um meio condutor, no qual uma onda plana uniforme, de amplitude E_0, propaga na direção positiva de z, $< p_d > = (\sigma/2)|E_0|^2 e^{-2\alpha z}$. (*b*) Confirme este resultado para o caso especial de um bom condutor, mediante o uso do lado esquerdo da Equação (70), e considere um volume muito pequeno.

11.17 Seja $\eta = 250 + j30\ \Omega$ e $jk = 0{,}2 + j2 \text{ m}^{-1}$ para uma onda plana uniforme que se propaga na direção $\mathbf{a}_z$ em um dielétrico que tem alguma condutividade finita. Se $|E_s| = 400$ V/m em $z = 0$, calcule: (*a*) $\langle \mathbf{S} \rangle$ em $z = 0$ e $z = 60$ cm; (*b*) A dissipação média de potência ôhmica em watts por metro cúbico em $z = 60$ cm.

11.18 Uma onda plana uniforme de 100 MHz em um meio considerado um bom dielétrico possui um campo elétrico fasorial da forma: $\mathbf{E}_s = 4e^{-0{,}5z}e^{-j20z}\mathbf{a}_x$ V/m. Determine: (*a*) ϵ'; (*b*) ϵ''; (*c*) η; (*d*) $\mathbf{H}_s$; (*e*) $\langle \mathbf{S} \rangle$; (*f*) a potência em watts que incide na superfície retangular que mede 20×30 m em $z = 10$ m.

11.19 Cilindros perfeitamente condutores de raios de 8 mm e 20 mm são coaxiais. A região entre esses cilindros está preenchida com um dielétrico perfeito para o qual $\epsilon = 10^{-9}/4\pi$ F/m e $\mu_r = 1$. Se $\mathcal{E}$ nessa região vale $(500/\rho)\cos(\omega t - 4z)\mathbf{a}_\rho$ V/m, calcule: (*a*) ω, com o auxílio das equações de Maxwell em coordenadas cilíndricas; (*b*) $\mathcal{H}(\rho, z, t)$; (*c*) $\langle \mathbf{S}(\rho, z, t) \rangle$; (*d*) a potência média que passa por toda a seção reta $8 < \rho < 20$ mm, $0 < \phi < 2\pi$.

11.20 A tensão de ruptura no ar, em temperatura e pressão padronizados, ocorre em uma intensidade de campo elétrico de aproximadamente 3×10^6 V/m. Esta torna-se um critério em alguns experimentos óticos de alta potência, nos quais foco de luz pode ser necessário. Estime a potência da onda luminosa (em watts) em um feixe cilíndrico de 10 μm de raio antes que a ruptura ocorra. Considere um comportamento de onda plana uniforme (embora esta suposição produza uma resposta que é maior do que a real por um fator de 2, dependendo da forma do feixe).

11.21 Uma casca cilíndrica, 1 cm $< \rho <$ 1,2 cm, é composta de um material condutor para o qual $\sigma = 10^6$ S/m. As regiões interna e externa não são condutoras. Seja $H_\phi = 2.000$ A/m em $\rho = 1{,}2$ cm. (*a*) Calcule **H** em todos os pontos. (*b*) Calcule **E** em todos os pontos. (*c*) Calcule $\langle \mathbf{S} \rangle$ em todos os pontos.

11.22 As dimensões interna e externa de uma linha de transmissão coaxial de cobre são 2 e 7 mm, respectivamente. Ambos os condutores possuem espessuras muito maiores que δ. O dielétrico é sem perdas e a frequência de operação é de 400 MHz. Calcule a resistência por metro de comprimento: (*a*) do condutor interno; (*b*) do condutor externo; (*c*) da linha de transmissão.

11.23 Um condutor tubular oco é construído a partir de um tipo de latão que tem condutividade de $1{,}2 \times 10^7$ S/m. Os raios interno e externo são 9 e 10 mm, respectivamente. Calcule a resistência por metro de comprimento nas seguintes frequências: (*a*) corrente contínua; (*b*) 20 MHz; (*c*) 2 GHz.

11.24 (*a*) A maioria dos fornos de micro-ondas opera em 2,45 GHz. Considere $\sigma = 1{,}2 \times 10^6$ S/m e $\mu_r = 500$ para o interior de aço inoxidável e calcule a profundidade de penetração. (*b*) Sendo $E_s = 50\angle 0^\circ$ V/m na superfície do condutor, construa em um gráfico com a curva da amplitude de E_s *versus* o ângulo de E_s à medida que o campo se propaga para dentro do aço inoxidável.

11.25 Um bom condutor tem uma forma plana, e por ele se propaga uma onda plana uniforme que possui comprimento de onda de 0,3 mm e velocidade de 3×10^5 m/s. Considerando um condutor não magnético, determine a frequência e a condutividade.

11.26 As dimensões de certa linha de transmissão coaxial são $a = 0{,}8$ mm e $b =$ 4 mm. A espessura do condutor externo é de 0,6 mm e todos os condutores possuem $\sigma = 1{,}6 \times 10^7$ S/m. (*a*) Calcule R, a resistência por unidade de comprimento em uma frequência de operação de 2,4 GHz. (*b*) Use as informações das Seções 6.3 e 8.10 para encontrar C e L, a capacitância e a indutância por unidade de comprimento, respectivamente. O cabo coaxial é preenchido com ar. (*c*) Calcule α e β se $\alpha + j\beta = \sqrt{j\omega C(R + j\omega L)}$.

11.27 A superfície plana $z = 0$ é uma interface de latão-Teflon. Utilize os dados disponíveis no Apêndice C para calcular as seguintes razões para uma onda plana uniforme que tem $\omega = 4 \times 10^{10}$ rad/s: (*a*) $\alpha_{\text{Tef}}/\alpha_{\text{latão}}$; (*b*) $\lambda_{\text{Tef}}/\lambda_{\text{latão}}$; (*c*) $\nu_{\text{Tef}}/\nu_{\text{latão}}$.

11.28 Uma onda plana uniforme no espaço livre tem o vetor campo elétrico dado por $\mathbf{E}_s = 10e^{-j\beta x}\,\mathbf{a}_z + 15e^{-j\beta x}\,\mathbf{a}y$ V/m. (*a*) Descreva a polarização da onda; (*b*) Encontre $\mathbf{H}_s$; (*c*) Determine a densidade de potência média na onda em W/m^2.

11.29 Considere uma onda com polarização circular à esquerda no espaço livre que se propaga no sentido progressivo de z. O campo elétrico é dado pela forma apropriada da Equação (100). Determine: (*a*) o campo magnético fasorial, $\mathbf{H}_s$; (*b*) uma expressão para a densidade de potência média na onda em W/m^2 pela aplicação direta da Equação (77).

11.30 Em um meio *anisotrópico*, a permissividade varia com a *direção e sentido* do campo elétrico, e é uma propriedade verificada na maior parte dos cristais. Considere uma onda plana uniforme, propagando na direção z no meio em questão, a qual entra no material com componentes iguais de campo ao longo dos eixos x e y. O fasor campo elétrico possui a seguinte forma:

$$\mathbf{E}_s(z) = E_0(\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y\, e^{j\Delta\beta z})\, e^{-j\beta z}$$

onde $\Delta\beta = \beta_x - \beta_y$ é a diferença das constantes de fase para as ondas que são linearmente polarizadas nas direções x e y. Determine distâncias para dentro do material (utilizando $\Delta\beta$) para as quais o campo é: (*a*) linearmente polarizado e (*b*) circularmente polarizado. (*c*) Considere uma impedância intrínseca, que é aproximadamente constante com a orientação do campo, e calcule $\mathbf{H}_s$ e $<\mathbf{S}>$.

11.31 Uma onda plana uniforme linearmente polarizada, que se propaga no sentido progressivo de z, é injetada em um material *anisotrópico* sem perdas, no qual a constante dielétrica encontrada por ondas polarizadas ao longo de $y(\epsilon_{ry})$ difere daquela vista por ondas polarizadas ao longo de $x(\epsilon_{rx})$. Suponha que $\epsilon_{rx} = 2{,}15$, $\epsilon_{ry} = 2{,}10$ e o campo elétrico da onda na entrada está polarizado em 45° em relação aos eixos de x e y positivos. (*a*) Determine, expressando-o pelo comprimento de onda no espaço livre λ, o menor comprimento do material que fará a onda apresentar polarização circular ao emergir na saída. (*b*) A onda na saída terá polarização circular à direita ou à esquerda? O Problema 11.30 é uma boa base para a solução.

11.32 Suponha que o comprimento do meio do Problema 11.31 seja *dobrado* em relação àquele determinado pelo problema. Descreva a polarização da onda na saída para esse caso.

11.33 Dada uma onda para a qual $\mathbf{E}_s = 15e^{-j\beta z}\mathbf{a}_x + 18e^{-j\beta z}e^{j\phi}\mathbf{a}y$ V/m em um meio caracterizado pela impedância característica complexa η: (*a*) Encontre $\mathbf{H}_s$; (*b*) determine a densidade de potência média em W/m^2.

11.34 Considere uma onda com polarização elíptica genérica, conforme fornecido pela Equação (93):

$$\mathbf{E}_s = [E_{x0}\mathbf{a}_x + E_{y0}e^{j\phi}\mathbf{a}_y]e^{-j\beta z}$$

(*a*) Mostre, utilizando métodos similares àqueles do Exemplo 11.7, que uma onda linearmente polarizada resulta quando sobrepõe-se o campo dado a um campo com fase deslocada da forma:

$$\mathbf{E}_s = [E_{x0}\mathbf{a}_x + E_{y0}e^{-j\phi}\mathbf{a}_y]e^{-j\beta z}e^{j\delta}$$

onde δ é uma constante. (*b*) Calcule δ utilizando ϕ, de forma que a onda resultante seja linearmente polarizada ao longo de x.

12

Reflexão e Dispersão de Ondas Planas

No Capítulo 11 aprendemos a representar matematicamente ondas planas uniformes como funções da frequência, das propriedades do meio e da orientação do campo elétrico. Além disso, aprendemos a calcular a velocidade, a atenuação e a potência da onda. Neste capítulo abordaremos a reflexão e a transmissão de ondas em fronteiras planas entre dois meios diferentes. Nosso estudo permitirá qualquer orientação entre a onda e a fronteira e, também, incluirá os casos importantes de múltiplas fronteiras. Adicionalmente, estudaremos o caso prático de ondas que transmitem potência em uma banda finita de frequências, como ocorre, por exemplo, em uma portadora modulada. Consideraremos essas ondas em meios dispersivos, nos quais algum parâmetro que afeta a propagação (permissividade, por exemplo) varia com a frequência. O efeito de um meio dispersivo em um sinal é de grande importância porque a envoltória do sinal terá seu formato modificado à medida que se propaga. Como resultado, a detecção e a representação correta do sinal original no terminal receptor se tornam problemáticos. Consequentemente, a dispersão e a atenuação devem ser calculadas para se estabelecer as máximas distâncias de transmissão permitidas. ■

12.1 REFLEXÃO DE ONDAS PLANAS UNIFORMES EM INCIDÊNCIA NORMAL

Primeiramente, consideramos o fenômeno de reflexão que ocorre quando uma onda plana uniforme incide na fronteira entre regiões compostas de dois materiais diferentes. O tratamento é especializado para o caso de *incidência normal* – na qual a direção de propagação da onda é perpendicular à fronteira. Nas últimas seções, removemos essa restrição. Expressões serão encontradas para a onda que é refletida pela interface e para aquela que é transmitida de uma região para a outra. Esses resultados estão diretamente relacionados a problemas de casamento de impedâncias em linhas de transmissão comuns, conforme já encontramos no Capítulo 10. Elas são também aplicáveis a guias de onda, os quais estudaremos no Capítulo 13.

Novamente, consideramos que temos apenas um componente vetorial único para a intensidade de campo elétrico. Com relação à Figura 12.1, definimos a região 1 (ϵ_1, μ_1) como o meio-espaço no qual $z < 0$. A região 2 (ϵ_2, μ_2) é o meio espaço para o qual $z > 0$. Inicialmente, estabelecemos uma onda na região 1, viajando na direção $+z$, e linearmente polarizada ao longo de x.

$$\mathcal{E}_{x1}^{+}(z, t) = E_{x10}^{+} e^{-\alpha_1 z} \cos(\omega t - \beta_1 z)$$

Na forma fasorial, tem-se

$$E_{xs1}^{+}(z) = E_{x10}^{+} e^{-jkz} \tag{1}$$

onde tomamos E_{x10}^{+} como real. O subscrito 1 identifica a região, e o sobrescrito + indica uma onda viajante progressiva. Associado a $E_{xs1}^{+}(z)$ está o campo magnético na direção y,

$$H_{ys1}^{+}(z) = \frac{1}{\eta_1} E_{x10}^{+} e^{-jk_1 z} \tag{2}$$

onde k_1 e η_1 são complexos, a não ser que ϵ''_1 (ou σ_1) seja zero. Essa onda plana uniforme na região 1 que está viajando em direção à superfície da fronteira em $z = 0$ é chamada de onda *incidente*. Uma vez que a direção de propagação da onda incidente é perpendicular ao plano da fronteira, descrevemos a incidência como normal.

Reconhecemos, agora, que energia pode ser transmitida através da superfície da fronteira em $z = 0$ para a região 2, criando uma onda que viaja na direção $+z$ naquele meio. O campo elétrico e o campo magnético fasoriais para essa onda são

$$E_{xs2}^{+}(z) = E_{x20}^{+} e^{-jk_2 z} \tag{3}$$

$$H_{ys2}^{+}(z) = \frac{1}{\eta_2} E_{x20}^{+} e^{-jk_2 z} \tag{4}$$

Região 1 $\mu_1, \epsilon_1', \epsilon_1''$

Região 2 $\mu_2, \epsilon_2', \epsilon_2''$

x

$\mathbf{E}_1^+, \mathbf{H}_1^+$ Onda incidente

$\mathbf{E}_2^+, \mathbf{H}_2^+$ Onda transmitida

$\mathbf{E}_1^-, \mathbf{H}_1^-$ Onda refletida

z

$z = 0$

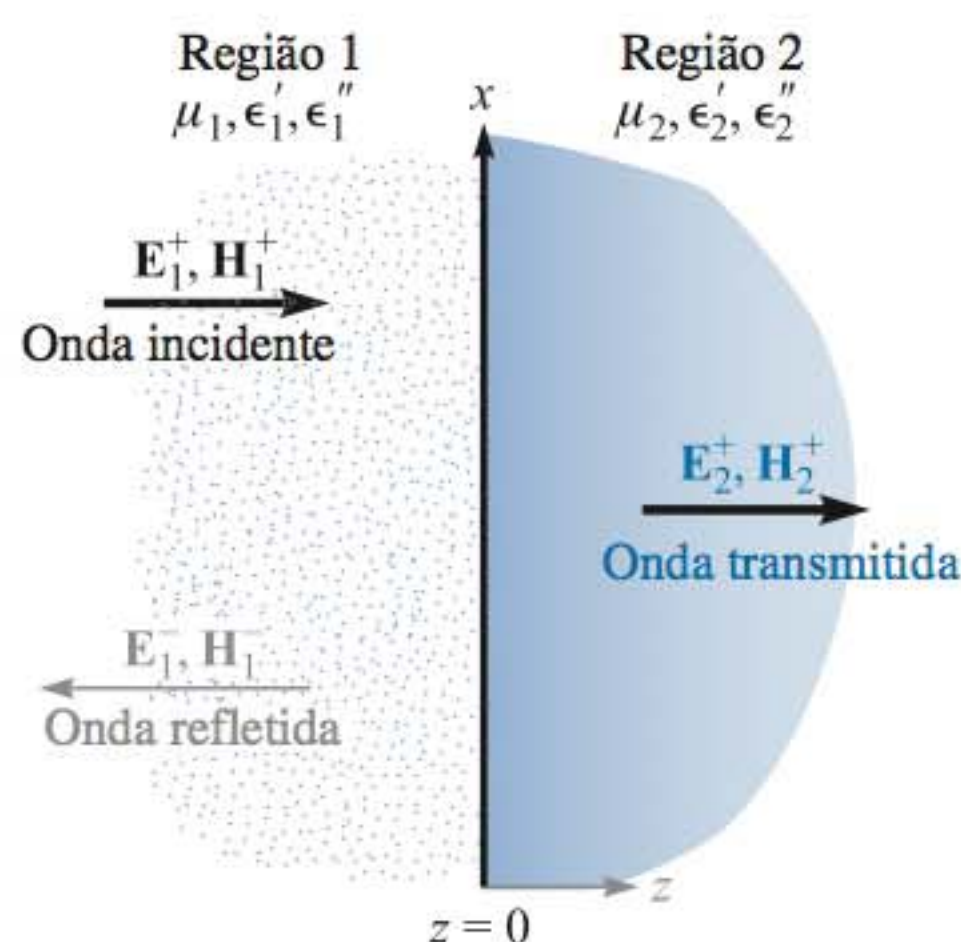



Figura 12.1 Uma onda plana incidente em uma fronteira estabelece uma onda refletida e outra transmitida, cujos sentidos de propagação são indicados. Todos os campos são paralelos à fronteira, e temos assim campos elétricos ao longo de *x* e campos magnéticos ao longo de *y*.

Essa onda que se afasta da superfície da fronteira pela região 2 é chamada de onda *transmitida*. Note a utilização de uma constante de propagação k_2 e uma impedância intrínseca η_2 diferentes.

Agora, temos que satisfazer as condições de fronteira em $z = 0$ com esses campos considerados. Com $\mathbf{E}$ polarizado ao longo de x, o campo é tangente à interface, e assim os campos $\mathbf{E}$ nas regiões 1 e 2 devem ser iguais em $z = 0$. Considerando $z = 0$ nas Equações (1) e (3), será necessário satisfazer também $E_{x10}^+ = E_{x20}^+$. $\mathbf{H}$, estando direcionado em y, é também um campo tangencial, e deve ser contínuo ao longo da fronteira (não há lâminas de corrente presentes em meios reais). Quando consideramos $z = 0$ nas Equações (2) e (4), teremos que admitir também $E_{x10}^+/\eta_1 = E_{x20}^+/\eta_2$. Uma vez que $E_{x10}^+ = E_{x20}^+$, então $\eta_1 = \eta_2$. Mas essa é uma condição muito especial que não se adequa aos fatos de uma forma geral, e por isso somos incapazes de satisfazer as condições de fronteira apenas com uma onda incidente e uma transmitida. Precisamos de uma onda que viaje afastando-se da fronteira, na região 1, conforme mostrado na Figura 12.1. Essa é a onda *refletida*,

$$E_{xs1}^-(z) = E_{x10}^- e^{jk_1 z} \tag{5}$$

$$H_{xs1}^-(z) = -\frac{E_{x10}^-}{\eta_1} e^{jk_1 z} \tag{6}$$

onde E_{x10}^- pode ser uma grandeza complexa. Uma vez que esse campo está viajando na direção $-z$, $E_{xs1}^- = -\eta_1 H_{ys1}^-$, pois o vetor de Poynting mostra que $\mathbf{E}_1^- \times \mathbf{H}_1^-$ deve ser na direção $-\mathbf{a}_z$.

As condições de fronteira são agora facilmente satisfeitas, e no processo as amplitudes das ondas transmitida e refletida podem ser encontradas expressando-as por E_{x10}^+. A intensidade de campo elétrico total é contínua em $z = 0$,

$$E_{xs1} = E_{xs2} \qquad (z = 0)$$

ou

$$E_{xs1}^+ + E_{xs1}^- = E_{xs2}^+ \qquad (z = 0)$$

Logo

$$\boxed{E_{x10}^+ + E_{x10}^- = E_{x20}^+} \tag{7}$$

Além disso,

$$H_{ys1} = H_{ys2} \qquad (z = 0)$$

ou

$$H_{ys1}^+ + H_{ys1}^- = H_{ys2}^+ \qquad (z = 0)$$

e assim

$$\boxed{\frac{E_{x10}^+}{\eta_1} - \frac{E_{x10}^-}{\eta_1} = \frac{E_{x20}^+}{\eta_2}} \tag{8}$$

Resolvendo a Equação (8) para E_{x20}^{+} e substituindo na Equação (7), encontramos

$$E_{x10}^{+} + E_{x10}^{-} = \frac{\eta_2}{\eta_1} E_{x10}^{+} - \frac{\eta_2}{\eta_1} E_{x10}^{-}$$

ou

$$E_{x10}^{-} = E_{x10}^{+} \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

A razão entre as amplitudes do campo elétrico refletido e do campo elétrico incidente define o *coeficiente de reflexão*, designado por Γ,

$$\Gamma = \frac{E_{x10}^{-}}{E_{x10}^{+}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = |\Gamma| e^{j\phi} \tag{9}$$

É evidente que, assim como η_1 ou η_2 podem ser complexos, Γ também será complexo; por isso, incluímos um deslocamento de fase ϕ para a reflexão. A interpretação da Equação (9) é idêntica àquela utilizada nas linhas de transmissão [Equação (73), Capítulo 10].

A amplitude relativa da intensidade de campo elétrico transmitido é encontrada combinando as Equações (9) e (7); assim, obteremos o *coeficiente de transmissão*, τ,

$$\tau = \frac{E_{x20}^{+}}{E_{x10}^{+}} = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} = 1 + \Gamma = |\tau| e^{j\phi_t} \tag{10}$$

cuja forma e interpretação são consistentes com o utilizado em linhas de transmissão [Equação (75), Capítulo 10].

Vamos ver como esses resultados podem ser aplicados a vários casos especiais. Primeiramente, consideramos a região 1 como um dielétrico perfeito, e a região 2 como um condutor perfeito. Então, aplicamos a Equação (48) do Capítulo 11, considerando $\epsilon''_2 = \sigma_2/\omega$, obtendo

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{\sigma_2 + j\omega\epsilon'_2}} = 0$$

na qual temos zero, já que $\sigma_2 \to \infty$. Logo, a partir da Equação (10),

$$E_{x20}^{+} = 0$$

Em um condutor perfeito não podem existir campos variáveis no tempo. Uma maneira alternativa de ver isso é notando que a profundidade de penetração vale zero.

Visto que $\eta_2 = 0$, a Equação (9) mostra que

$$\Gamma = -1$$

e

$$E_{x10}^{+} = -E_{x10}^{-}$$

Tanto o campo incidente quanto o campo refletido possuem amplitudes iguais, e assim toda a energia incidente é refletida pelo condutor perfeito. O fato de os dois

campos possuírem sinais opostos indica que na fronteira (ou no momento da reflexão), o campo refletido é defasado de 180° em relação ao incidente. O **E** total na região 1 é

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= E_{xs1}^{+} + E_{xs1}^{-} \\ &= E_{x10}^{+}\, e^{-j\beta_1 z} - E_{x10}^{+}\, e^{j\beta_1 z} \end{aligned}$$

onde fizemos $jk_1 = 0 + j\beta_1$ no dielétrico perfeito. Esses termos podem ser combinados e simplificados,

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= (e^{-j\beta_1 z} - e^{j\beta_1 z})\, E_{x10}^{+} \\ &= -j2 \text{ sen}\,(\beta_1 z)\, E_{x10}^{+} \end{aligned} \tag{11}$$

Multiplicando a Equação (11) por $e^{j\omega t}$ e tomando a parte real, obtemos a forma instantânea real:

$$\mathcal{E}_{x1}(z,t) = 2E_{x10}^{+} \text{ sen}\,(\beta_1 z) \text{ sen}\,(\omega t) \tag{12}$$

Reconhecemos esse campo total na região 1 como uma onda estacionária, obtida pela combinação de duas ondas de igual amplitude que viajam em sentidos opostos. Primeiramente, encontramos ondas estacionárias em linhas de transmissão, mas na forma de ondas de tensão que se propagavam em sentidos opostos (ver Exemplo 10.1).

Novamente, comparamos a forma da Equação (12) com aquela da onda incidente,

$$\mathcal{E}_{x1}(z,t) = E_{x10}^{+} \cos\,(\omega t - \beta_1 z) \tag{13}$$

Neste caso vemos o termo $\omega t - \beta_1 z$ ou $\omega(t - z/v_{p1})$, o qual caracteriza uma onda viajante na direção +z na velocidade $v_{p1} = \omega/\beta_1$. Na Equação (12), entretanto, os fatores que envolvem tempo e distância são termos trigonométricos separados. Sempre que $\omega t = m\pi$, $\mathcal{E}_{x1}$ é zero em todas as posições. Por outro lado, nulos espaciais no contorno da onda estacionária ocorrem para todos os tempos sempre que $\beta_1 z = m\pi$, que por sua vez ocorre quando $m = (0, \pm 1, \pm 2, ...)$. Nesses casos,

$$\frac{2\pi}{\lambda_1} z = m\pi$$

e as localizações dos nulos ocorrem em

$$z = m\frac{\lambda_1}{2}$$

Logo, $E_{x1} = 0$ na fronteira $z = 0$ e em todo meio comprimento de onda a partir da fronteira, na região 1, $z < 0$, conforme ilustrado na Figura 12.2.

Uma vez que $E_{xs1}^{+} = \eta_1 H_{ys1}^{+}$ e $E_{xs1}^{-} = -\eta_1 H_{ys1}^{-}$, o campo magnético é

$$H_{ys1} = \frac{E_{x10}^{+}}{\eta_1}(e^{-j\beta_1 z} + e^{j\beta_1 z})$$

ou

$$H_{y1}(z,t) = 2\,\frac{E_{x10}^{+}}{\eta_1} \cos\,(\beta_1 z) \cos\,(\omega t) \tag{14}$$

Essa também é uma onda estacionária, mas que mostra uma amplitude máxima nas posições onde $E_{x1} = 0$. Está, em todos os pontos, 90° fora de fase temporal com

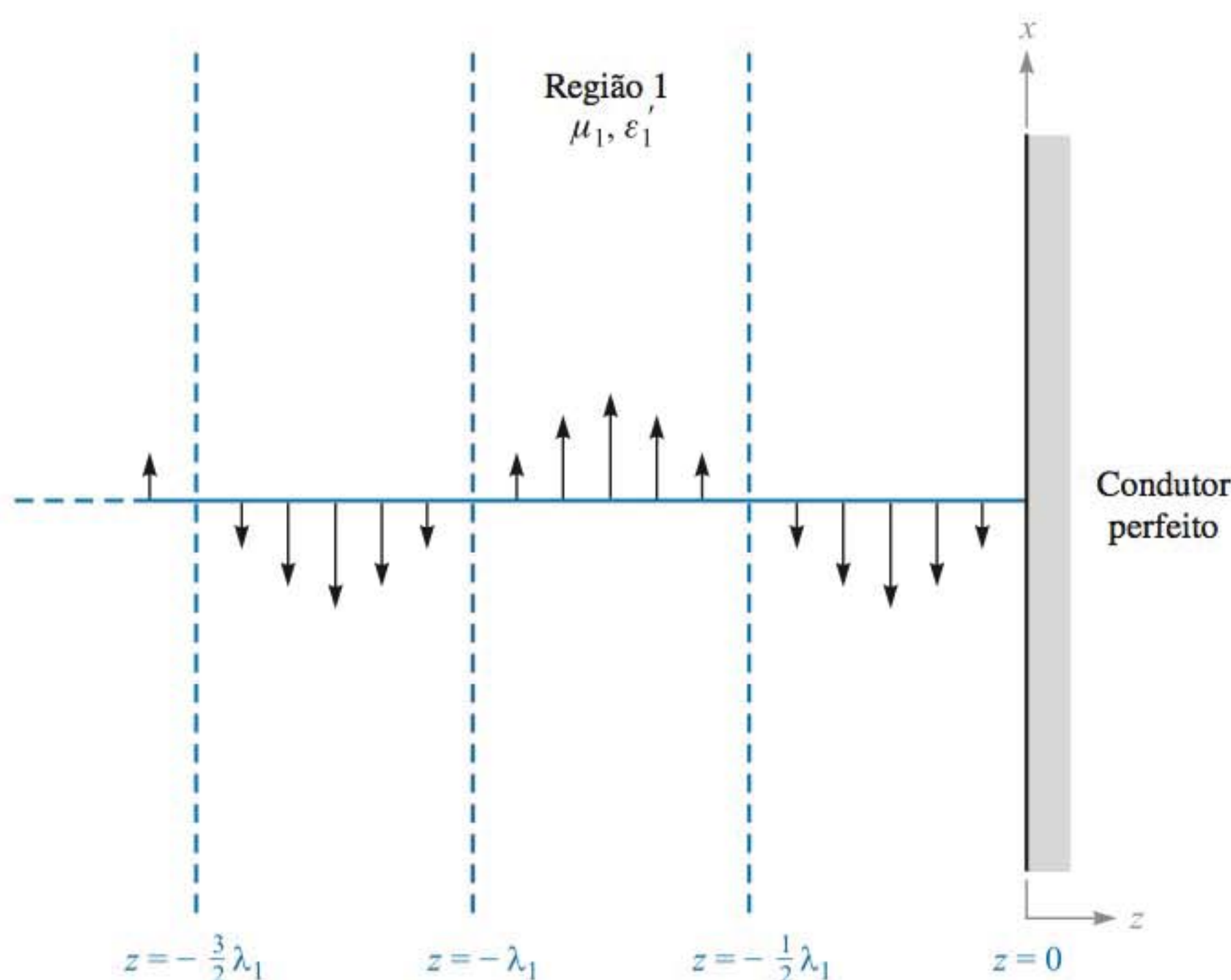



Figura 12.2 Os valores instantâneos do campo E_{x1} total são mostrados em $t = \pi/2$. $E_{x1} = 0$ em tempo todo nos múltiplos de meio comprimento de onda a partir da superfície condutora.

E_{x1}. Como resultado, a potência média conforme determinada pelo vetor de Poynting [Equação (77), Capítulo 11] é zero no sentido progressivo e no sentido regressivo.

Vamos agora considerar dielétricos perfeitos em ambas as regiões 1 e 2. Os termos η_1 e η_2 são grandezas positivas reais e $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. A Equação (9) nos permite calcular o coeficiente de reflexão e encontrar E_{x1}^- em termos do campo incidente E_{x1}^+. Conhecendo-se E_{x1}^+ e E_{x1}^-, encontramos H_{y1}^+ e H_{y1}^-. Na região 2, E_{x2}^+ é encontrado a partir da Equação (10), e com isso determina-se H_{y2}^+.

EXEMPLO 12.1

Como exemplo numérico selecionamos

$$\eta_1 = 100\ \Omega$$

$$\eta_2 = 300\ \Omega$$

$$E_{x10}^+ = 100 \text{ V/m}$$

e calculamos os valores para as ondas incidente, refletida e transmitida.

Solução. O coeficiente de reflexão é

$$\Gamma = \frac{300 - 100}{300 + 100} = 0{,}5$$

e assim

$$E_{x10}^- = 50 \text{ V/m}$$

As intensidades de campo magnético são

$$H_{y10}^{+} = \frac{100}{100} = 1{,}00 \text{ A/m}$$

$$H_{y10}^{-} = -\frac{50}{100} = -0{,}50 \text{ A/m}$$

Utilizando a Equação (77) do Capítulo 11, verificamos que a intensidade da densidade de potência incidente média é

$$\langle S_{1i} \rangle = \left| \frac{1}{2}\text{Re}\{\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*\} \right| = \frac{1}{2} E_{x10}^{+} H_{y10}^{+} = 50 \text{ W/m}^2$$

A densidade de potência média refletida é

$$\langle S_{1r} \rangle = -\frac{1}{2} E_{x10}^{-} H_{y10}^{-} = 12{,}5 \text{ W/m}^2$$

Na região 2, utilizando a Equação (10),

$$E_{x20}^{+} = \tau E_{x10}^{+} = 150 \text{ V/m}$$

e

$$H_{y20}^{+} = \frac{150}{300} = 0{,}500 \text{ A/m}$$

Logo, a densidade de potência média transmitida para a região 2 pela fronteira é

$$\langle S_2 \rangle = \frac{1}{2} E_{x20}^{+} H_{y20}^{+} = 37{,}5 \text{ W/m}^2$$

Podemos checar e confirmar a lei da conservação da potência:

$$\langle S_{1i} \rangle = \langle S_{1r} \rangle + \langle S_2 \rangle$$

Uma regra geral relativa à transferência de potência por reflexão e transmissão pode ser formulada. Consideremos o mesmo campo vetorial e orientação das interfaces como antes, mas permitamos a existência de impedâncias complexas. Para a densidade de potência incidente, temos

$$\langle S_{1i} \rangle = \frac{1}{2}\text{Re}\left\{E_{xs1}^{+} H_{ys1}^{+*}\right\} = \frac{1}{2}\text{Re}\left\{E_{x10}^{+} \frac{1}{\eta_1^*} E_{x10}^{+*}\right\} = \frac{1}{2}\text{Re}\left\{\frac{1}{\eta_1^*}\right\} \left|E_{x10}^{+}\right|^2$$

A densidade de potência refletida é então

$$\langle S_{1r} \rangle = -\frac{1}{2}\text{Re}\left\{E_{xs1}^{-} H_{ys1}^{-*}\right\} = \frac{1}{2}\text{Re}\left\{\Gamma E_{x10}^{+} \frac{1}{\eta_1^*} \Gamma^* E_{x10}^{+*}\right\} = \frac{1}{2}\text{Re}\left\{\frac{1}{\eta_1^*}\right\} \left|E_{x10}^{+}\right|^2 |\Gamma|^2$$

Assim, encontramos a relação genérica entre a potência refletida e a potência incidente:

$$\boxed{\langle S_{1r} \rangle = |\Gamma|^2 \langle S_{1i} \rangle} \tag{15}$$

De forma similar, encontramos a densidade de potência transmitida:

$$\langle S_2 \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{E_{xs2}^{+} H_{ys2}^{+*}\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\tau E_{x10}^{+} \frac{1}{\eta_2^*} \tau^* E_{x10}^{+*}\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\eta_2^*}\right\} \left|E_{x10}^{+}\right|^2 |\tau|^2$$

e, assim, vemos que a densidade de potência incidente e a densidade de potência transmitida estão relacionadas por

$$\langle S_2 \rangle = \frac{\mathrm{Re}\left\{1/\eta_2^*\right\}}{\mathrm{Re}\left\{1/\eta_1^*\right\}} |\tau|^2 \langle S_{1i} \rangle = \left|\frac{\eta_1}{\eta_2}\right|^2 \left(\frac{\eta_2 + \eta_2^*}{\eta_1 + \eta_1^*}\right) |\tau|^2 \langle S_{1i} \rangle \tag{16}$$

A Equação (16) representa um caminho relativamente complicado para se calcular a potência transmitida, a não ser que as impedâncias sejam reais. É mais fácil tirar vantagem da conservação da energia notando que qualquer potência que não é refletida deve ser transmitida. A Equação (15) pode ser utilizada para se encontrar

$$\boxed{\langle S_2 \rangle = (1 - |\Gamma|^2) \langle S_{1i} \rangle} \tag{17}$$

Como já era de se esperar (e deve ser verdade), a Equação (17) pode também ser derivada da Equação (16).

EP12.1. Uma onda plana uniforme de 1 MHz incide normalmente em um lago de água doce ($\epsilon_r' = 78$, $\epsilon_r'' = 0$, $\mu_r = 1$). Determine a fração da potência incidente que é (*a*) refletida e (*b*) transmitida. (*c*) Determine a amplitude do campo elétrico que é transmitido para dentro do lago.

Resp. 0,63; 0,37; 0,20 V/m

12.2 TAXA DE ONDA ESTACIONÁRIA

Nos casos em que $|\Gamma| < 1$, parte da energia é transmitida para a segunda região e parte é refletida. A região 1, com isso, abriga um campo que é composto tanto por uma onda viajante quanto por uma onda estacionária. Encontramos essa situação anteriormente em linhas de transmissão, quando uma reflexão parcial ocorria na carga. Medições da taxa de onda estacionária para tensão e a localização dos máximos e mínimos de tensão permitiram a determinação da impedância de carga desconhecida ou estabeleceram o grau de casamento da carga com a linha (Seção 10.10). Medições similares podem ser realizadas nas amplitudes dos campos na reflexão de ondas planas.

Utilizando os mesmos campos investigados na seção anterior, combinamos as intensidades dos campos elétricos incidente e refletido. O meio 1 é considerado como um dielétrico perfeito ($\alpha_1 = 0$), mas a região 2 pode ser de qualquer material. O campo elétrico fasorial total na região 1 será

$$E_{x1T} = E_{x1}^{+} + E_{x1}^{-} = E_{x10}^{+} e^{-j\beta_1 z} + \Gamma E_{x10}^{+} e^{j\beta_1 z} \tag{18}$$

onde o coeficiente de reflexão é expresso como na Equação (9):

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = |\Gamma| e^{j\phi}$$

Permitimos a possibilidade de coeficiente de reflexão complexo pela inclusão de sua fase ϕ. Isso é necessário porque apesar de η_1 ser real e positivo para um meio sem perdas, geralmente η_2 será complexo. Adicionalmente, se a região 2 for um condutor perfeito, η_2 é zero, e então ϕ é igual a π. Se η_2 é real e menor que η_1, ϕ é também igual a π. E se η_2 é real e maior que η_1, ϕ é zero.

Incorporando a fase de Γ na Equação (18), o campo total na região 1 se torna

$$E_{x1T} = \left(e^{-j\beta_1 z} + |\Gamma| e^{j(\beta_1 z + \phi)}\right) E^+_{x10} \tag{19}$$

As amplitudes máxima e mínima do campo na Equação (19) são dependentes de z, e estão sujeitas à medição. A razão entre elas, conforme encontrado para as amplitudes de tensão em linhas de transmissão (Seção 10.10), é a *taxa de onda estacionária*, denotada por s. Temos um máximo quando cada termo entre os parênteses maiores na Equação (19) tem o mesmo ângulo de fase. Dessa forma, para E^+_{x10} positivo e real,

$$|E_{x1T}|_{\text{max}} = (1 + |\Gamma|) E^+_{x10} \tag{20}$$

e isso ocorre onde

$$-\beta_1 z = \beta_1 z + \phi + 2m\pi \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{21}$$

Logo

$$z_{\text{max}} = -\frac{1}{2\beta_1}(\phi + 2m\pi) \tag{22}$$

Note que um máximo de campo elétrico está posicionado no plano da fronteira ($z = 0$) caso $\phi = 0$. Além disso, $\phi = 0$ quando Γ é real e positivo. Isso ocorre para η_1 e η_2 reais quando $\eta_2 > \eta_1$. Logo, existe um máximo de campo na superfície da fronteira quando a impedância intrínseca da região 2 é maior que aquela da região 1 e ambas as impedâncias são reais. Com $\phi = 0$, máximos também ocorrem em $z_{\text{max}} = -m\pi/\beta_1 = -m\lambda_1/2$.

Para o condutor perfeito, $\phi = \pi$, e esses máximos serão encontrados em $z_{\text{max}} = -\pi/(2\beta_1)$, $-3\pi/(2\beta_1)$, ou $z_{\text{max}} = -\lambda_1/4$, $-3\lambda_1/4$ e assim por diante.

Os mínimos devem ocorrer onde os ângulos de fase dos dois termos entre os parênteses maiores na Equação (19) estão defasados por 180°, logo

$$|E_{x1T}|_{\text{min}} = (1 - |\Gamma|) E^+_{x10} \tag{23}$$

e isso ocorre onde

$$-\beta_1 z = \beta_1 z + \phi + \pi + 2m\pi \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{24}$$

ou

$$z_{\text{min}} = -\frac{1}{2\beta_1}(\phi + (2m + 1)\pi) \tag{25}$$

Os mínimos estão separados por múltiplos de meio comprimento de onda (assim como os máximos), e para o condutor perfeito o primeiro mínimo ocorre quando $-\beta_1 z = 0$, ou na superfície do condutor. Em geral, um mínimo de campo elétrico é encontrado em

$z = 0$ sempre que $\phi = \pi$. Isso ocorre se $\eta_2 < \eta_1$ e ambos forem reais. Os resultados são matematicamente idênticos àqueles encontrados para o estudo de linhas de transmissão na Seção 10.10, na qual a Figura 10.6 permite uma visualização desses resultados.

Informações adicionais podem ser obtidas trabalhando-se com a Equação (19) e reescrevendo-a na forma instantânea real. Os passos são idênticos àqueles tomados no Capítulo 10, da Equação (81) até a Equação (84). Encontramos o campo total na região 1 assim:

$$\mathcal{E}_{x1T}(z,t) = \underbrace{(1 - |\Gamma|)E_{x10}^{+}\cos(\omega t - \beta_1 z)}_{\text{onda viajante}} + \underbrace{2|\Gamma|E_{x10}^{+}\cos(\beta_1 z + \phi/2)\cos(\omega t + \phi/2)}_{\text{onda estacionária}} \tag{26}$$

O campo expresso na Equação (26) é a soma de uma onda viajante de amplitude $(1 - |\Gamma|)E_{x10}^{+}$ com uma onda estacionária que tem amplitude $2|\Gamma|E_{x10}^{+}$. A porção da onda incidente que reflete e propaga de volta pela região 1 interfere com uma porção equivalente da onda incidente para formar uma onda estacionária. O resto da onda incidente (que não interfere) é a parte da onda viajante da Equação (26). A amplitude máxima observada na região 1 é encontrada onde as amplitudes dos dois termos na Equação (26) se somam diretamente, resultando em $(1 + |\Gamma|)E_{x10}{}^{+}$. A amplitude mínima é encontrada onde a onda estacionária atinge um nulo, deixando apenas a onda viajante de amplitude de $(1 - |\Gamma|)E_{x10}^{+}$. O fato de os dois termos na Equação (26) se combinarem dessa maneira, com o defasamento apropriado, pode ser confirmado pela substituição de z_{max} e z_{min}, conforme dados pelas Equações (22) e (25).

EXEMPLO 12.2

Para ilustrar alguns desses resultados, vamos considerar uma onda de 100 V/m e 3 GHz que está se propagando em um material que possui $\epsilon'_{r1} = 4$, $\mu_{r1} = 1$ e $\epsilon''_r = 0$. A onda incide normalmente em outro dielétrico perfeito na região 2, $z > 0$, onde $\epsilon'_{r2} = 9$ e $\mu_{r2} = 1$ (Figura 12.3). Procuramos as localizações dos máximos e mínimos de **E**.

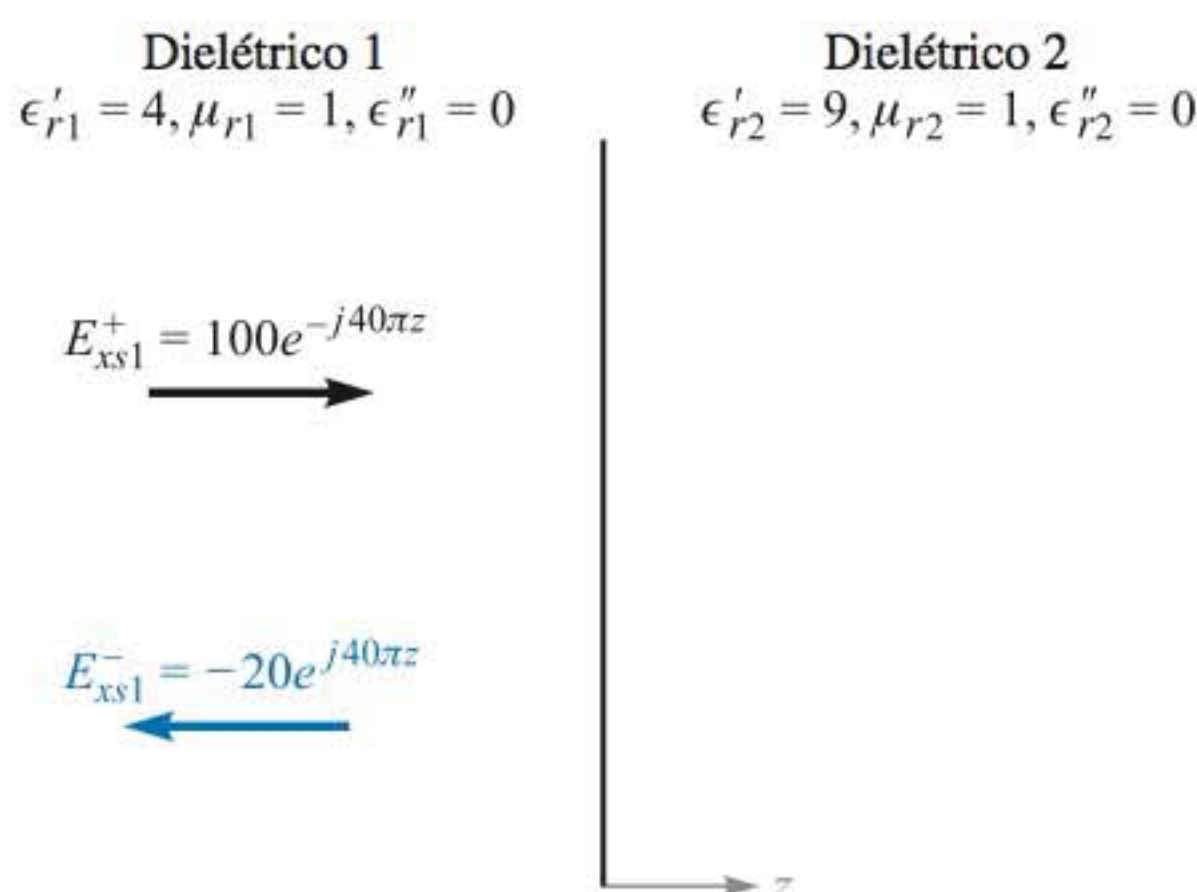



Figura 12.3 Uma onda incidente, $E_{xs1}^{+} = 100e^{-j40\pi z}$ V/m, é refletida com um coeficiente de reflexão $\Gamma = -0{,}2$. O dielétrico 2 é infinitamente espesso.

Solução. Calculamos $\omega = 6\pi \times 10^9$ rad/s, $\beta_1 = \omega\sqrt{\mu_1\epsilon_1} = 40\pi$ rad/m, e $\beta_2 = \omega\sqrt{\mu_2\epsilon_2} = 60\pi$ rad/m. Embora o comprimento de onda fosse 10 cm no ar, neste caso $\lambda_1 = 2\pi/\beta_1 = 5$ cm, $\lambda_2 = 2\pi/\beta_2 = 3{,}33$ cm, $\eta_1 = 60\pi\ \Omega$, $\eta_2 = 40\pi\ \Omega$, e $\Gamma = (\eta_2 - \eta_1)/(\eta_2 + \eta_1) = -0{,}2$. Como Γ é real e negativo ($\eta_2 < \eta_1$), haverá um mínimo de campo elétrico na fronteira, o qual será repetido em intervalos de meio comprimento de onda (2,5 cm) no dielétrico 1. Da Equação (23) vemos que $|E_{x1T}|_{\min} = 80$ V/m.

Os máximos de **E** são encontrados nas distâncias de 1,25, 3,75, 6,25, ... cm de $z = 0$. Todos esses máximos possuem amplitudes de 120 V/m, conforme previsto pela Equação (20).

Não existem máximos ou mínimos na região 2 porque não há onda refletida lá.

A razão entre as amplitudes máxima e mínima é a taxa de onda estacionária:

$$s = \frac{|E_{x1T}|_{\max}}{|E_{x1T}|_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \tag{27}$$

Uma vez que $|\Gamma| < 1$, s é sempre positivo e maior ou igual à unidade. Para o exemplo anterior,

$$s = \frac{1 + |-0{,}2|}{1 - |-0{,}2|} = \frac{1{,}2}{0{,}8} = 1{,}5$$

Se $|\Gamma| = 1$, a amplitude incidente e a amplitude refletida são iguais, toda a energia incidente é refletida e s é infinito. Planos separados por múltiplos de $\lambda_1/2$ podem ser encontrados, e neles E_{x1} é zero por todo o tempo. A meia distância entre os planos, E_{x1} tem uma amplitude máxima duas vezes maior que a da onda incidente.

Se $\eta_2 = \eta_1$, então $\Gamma = 0$, nenhuma energia é refletida e $s = 1$. As amplitudes máxima e mínima são iguais.

Se metade da potência incidente é refletida, $|\Gamma|^2 = 0{,}5$, $|\Gamma| = 0{,}707$ e $s = 5{,}83$.

EP12.2. Qual valor de s temos quando $\Gamma = \pm 1/2$?

Resp. 3

A taxa de onda estacionária é uma razão de amplitudes: as amplitudes relativas. Estas podem ser medidas por uma ponta de prova e, assim, utilizadas para determinar s experimentalmente.

EXEMPLO 12.3

Uma onda plana uniforme no ar se reflete parcialmente na superfície de um material cujas propriedades são desconhecidas. Medições do campo elétrico na região na frente da interface mostram um espaçamento de 1,5 m entre os máximos, com o primeiro máximo ocorrendo a 0,75 m da interface. Uma taxa de onda estacionária de 5 é medida. Determine a impedância intrínseca η_u* do material desconhecido.

---

* N. de T.: *u* do termo inglês *unknown*.

Solução. O espaçamento de 1,5 m entre os máximos é $\lambda/2$, o que implica um comprimento de onda de 3,0 m, ou $f = 100$ MHz. O primeiro máximo a 0,75 m é, então, a distância de $\lambda/4$ em relação à interface, o que significa que um mínimo de campo ocorre na fronteira. Logo, Γ será real e negativo. Usamos a Equação (27) para escrever

$$|\Gamma| = \frac{s-1}{s+1} = \frac{5-1}{5+1} = \frac{2}{3}$$

Assim,

$$\Gamma = -\frac{2}{3} = \frac{\eta_u - \eta_0}{\eta_u + \eta_0}$$

que resolvemos para η_u a fim de obter

$$\eta_u = \frac{1}{5}\eta_0 = \frac{377}{5} = 75{,}4\,\Omega$$

12.3 REFLEXÃO DE ONDAS EM INTERFACES MÚLTIPLAS

Até o momento tratamos da reflexão de ondas em fronteiras únicas que ocorrem entre meios semi-infinitos. Nesta seção, consideramos a reflexão de ondas em materiais que são finitos em comprimento, de forma que devemos considerar o efeito das superfícies da frente e de trás. Um problema de duas interfaces desse tipo ocorreria, por exemplo, na incidência de luz em um pedaço plano de vidro. Interfaces adicionais estarão presentes se o vidro for revestido com uma ou mais camadas de material dielétrico com o propósito (conforme veremos) de reduzir as reflexões. Tais problemas são frequentemente encontrados e aqueles que envolvem uma única interface são, na verdade, mais uma exceção que uma regra.

Considere a situação genérica mostrada na Figura 12.4, na qual uma onda plana uniforme que se propaga no sentido progressivo de z incide normalmente, vindo da

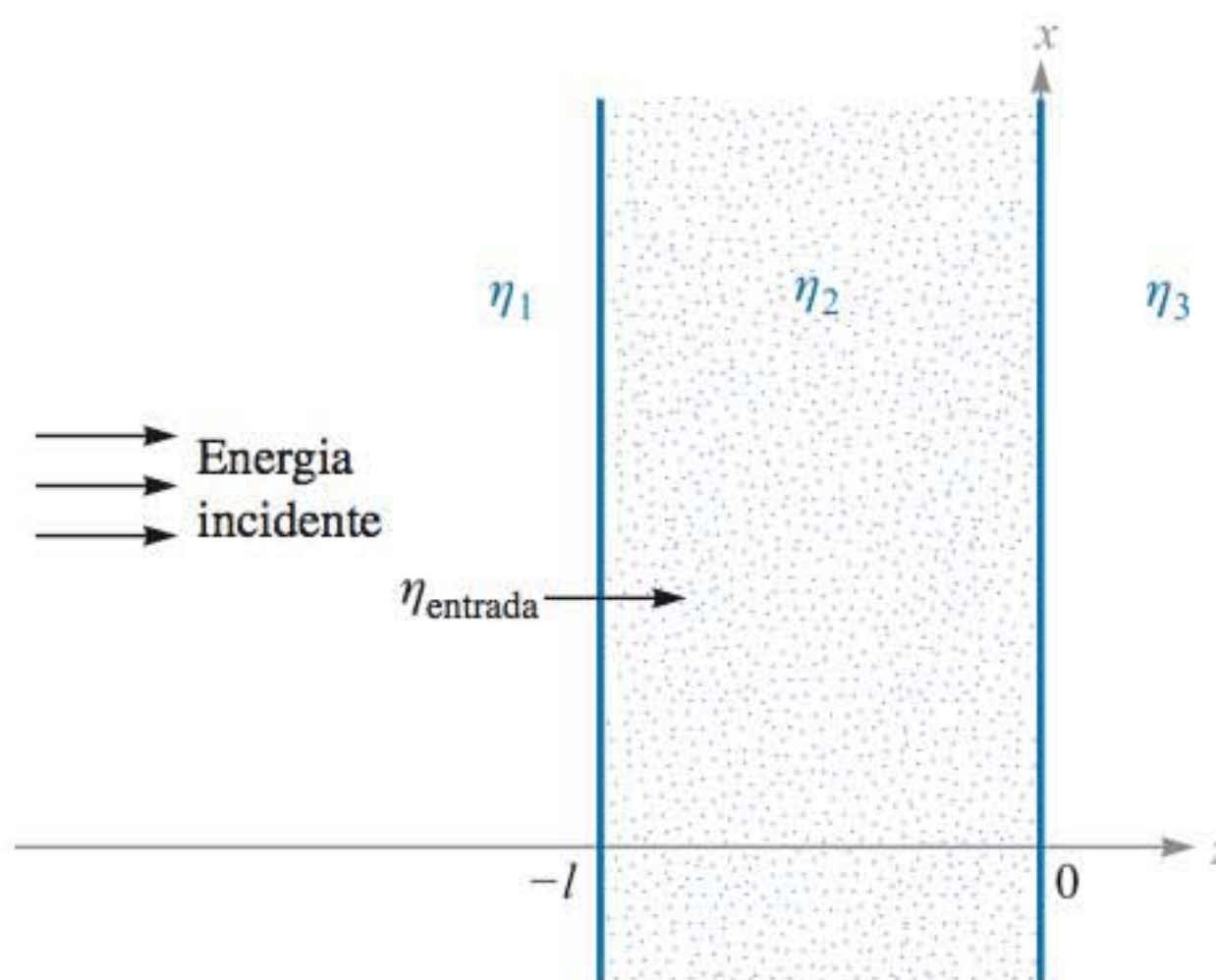



Figura 12.4 Problema básico de duas interfaces, no qual as impedâncias das regiões 2 e 3, juntamente com a espessura finita da região 2, são utilizadas na determinação da impedância de entrada na superfície da frente, $\eta_{entrada}$.

esquerda, na interface entre as regiões 1 e 2. Elas possuem impedâncias intrínsecas η_1 e η_2. Uma terceira região de impedância η_3 localiza-se além da região 2, de forma que uma segunda interface exista entre as regiões 2 e 3. Fazemos com que a localização da segunda interface seja em $z = 0$ e, então, todas as posições à esquerda serão descritas por valores de z negativos. A espessura da segunda região é l, de forma que a primeira interface ocorre na posição $z = -l$.

Quando a onda incidente atinge a primeira interface, os eventos ocorrem da seguinte maneira: uma porção da onda reflete, enquanto o restante é transmitido, propagando-se em direção à segunda interface. Lá, uma porção é transmitida para a região 3, enquanto o resto reflete e retorna para a primeira interface, de onde ela é novamente parcialmente refletida. Essa onda refletida então se combina com a energia adicional transmitida da região 1, e o processo se repete. Temos, então, uma sequência complicada de múltiplas reflexões que ocorrem dentro da região 2, com transmissão parcial em cada encontro com uma interface. Para analisar a situação dessa maneira, teríamos que seguir um número muito grande de reflexões. Isso seria necessário no estudo da fase *transiente* do processo, onde a onda incidente primeiramente encontra as interfaces.

Se a onda incidente existe por todo o tempo, entretanto, uma situação de *regime estacionário* acaba sendo alcançada, na qual: (1) uma fração resultante da onda incidente é refletida na configuração de interface dupla e se propaga regressivamente pela região 1 com amplitude e fase definidas; (2) uma fração resultante da onda incidente é transmitida pelas duas interfaces e se propaga progressivamente pela terceira região; (3) uma onda regressiva resultante existe na região 2, consistindo em todas as ondas refletidas na segunda interface; e (4) uma onda progressiva resultante existe na região 2, que é a superposição da onda transmitida através da primeira interface com todas as ondas na região 2 que refletiram na primeira interface e agora se propagam progressivamente. O efeito de se combinar muitas ondas que se propagam conjuntamente dessa maneira é o estabelecimento de uma onda única que tem amplitude e fase definidas, determinadas pelas somas das amplitudes e fases de todas as ondas componentes. Em regime permanente, temos então um total de cinco ondas a serem consideradas. Elas são as ondas incidente e refletida resultantes na região 1, a onda transmitida resultante na região 3 e as duas ondas que se propagam em sentidos opostos na região 2.

A situação é analisada da mesma maneira em que foram interpretadas as linhas de transmissão de comprimento finito (Seção 10.11). Vamos considerar todas as regiões compostas de meios sem perdas, e também considerar as duas ondas na região 2. Se considerarmos que elas estão polarizadas em x, seus campos elétricos se somam levando a

$$E_{xs2} = E_{x20}^{+} e^{-j\beta_2 z} + E_{x20}^{-} e^{j\beta_2 z} \tag{28a}$$

onde $\beta_2 = \omega \sqrt{\epsilon_{r2}}/c$, e onde as amplitudes E_{x20}^{+} e E_{x20}^{-} são complexas. O campo magnético polarizado em y é escrito de forma similar, usando amplitudes complexas:

$$H_{ys2} = H_{y20}^{+} e^{-j\beta_2 z} + H_{y20}^{-} e^{j\beta_2 z} \tag{28b}$$

Agora podemos notar, que as amplitudes dos campos elétricos progressivo e regressivo na região 2 se relacionam pelo coeficiente de reflexão na segunda interface, Γ_{23}, onde

$$\Gamma_{23} = \frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_3 + \eta_2} \tag{29}$$

Temos, então

$$E_{x20}^{-} = \Gamma_{23} E_{x20}^{+} \tag{30}$$

Escrevemos as amplitudes do campo magnético expressando-as pelas amplitudes do campo elétrico por meio de

$$H_{y20}^{+} = \frac{1}{\eta_2} E_{x20}^{+} \tag{31a}$$

e

$$H_{y20}^{-} = -\frac{1}{\eta_2} E_{x20}^{-} = -\frac{1}{\eta_2} \Gamma_{23} E_{x20}^{+} \tag{31b}$$

Definimos agora a *impedância de onda*, η_w*, como a razão dependente de z entre o campo elétrico total e o campo magnético total. Na região 2, utilizando as Equações (28*a*) e (28*b*), isso se torna

$$\eta_w(z) = \frac{E_{xs2}}{H_{ys2}} = \frac{E_{x20}^{+} e^{-j\beta_2 z} + E_{x20}^{-} e^{j\beta_2 z}}{H_{y20}^{+} e^{-j\beta_2 z} + H_{y20}^{-} e^{j\beta_2 z}}$$

Então, utilizando as Equações (30), (31*a*) e (31*b*), obtemos

$$\eta_w(z) = \eta_2 \left[\frac{e^{-j\beta_2 z} + \Gamma_{23} e^{j\beta_2 z}}{e^{-j\beta_2 z} - \Gamma_{23} e^{j\beta_2 z}} \right]$$

Agora, utilizando a Equação (29) e a identidade de Euler, temos

$$\eta_w(z) = \eta_2 \times \frac{(\eta_3 + \eta_2)(\cos \beta_2 z - j \operatorname{sen} \beta_2 z) + (\eta_3 - \eta_2)(\cos \beta_2 z + j \operatorname{sen} \beta_2 z)}{(\eta_3 + \eta_2)(\cos \beta_2 z - j \operatorname{sen} \beta_2 z) - (\eta_3 - \eta_2)(\cos \beta_2 z + j \operatorname{sen} \beta_2 z)}$$

Isso é facilmente simplificado, resultando em

$$\eta_w(z) = \eta_2 \frac{\eta_3 \cos \beta_2 z - j\eta_2 \operatorname{sen} \beta_2 z}{\eta_2 \cos \beta_2 z - j\eta_3 \operatorname{sen} \beta_2 z} \tag{32}$$

Usamos agora a impedância de onda da região 2 para resolver nosso problema de reflexão. É interessante para nós a amplitude da onda refletida resultante na primeira interface. Uma vez que **E** e **H** tangenciais são contínuos através da fronteira, temos

$$E_{xs1}^{+} + E_{xs1}^{-} = E_{xs2} \qquad (z = -l) \tag{33a}$$

e

$$H_{ys1}^{+} + H_{ys1}^{-} = H_{ys2} \qquad (z = -l) \tag{33b}$$

Então, analogamente às Equações (7) e (8), podemos escrever

$$E_{x10}^{+} + E_{x10}^{-} = E_{xs2}(z = -l) \tag{34a}$$

e

$$\frac{E_{x10}^{+}}{\eta_1} - \frac{E_{x10}^{-}}{\eta_1} = \frac{E_{xs2}(z = -l)}{\eta_w(-l)} \tag{34b}$$

* N. de T.: *w* do termo inglês *wave*.

onde E^+_{x10} e E^-_{x10} são as amplitudes dos campos incidente e refletido. Chamamos $\eta_w(-l)$ de *impedância de entrada*, η_{entrada}, da combinação das duas interfaces. Resolvemos agora as Equações (34*a*) e (34*b*) conjuntamente, eliminando E_{xs2}, para obter

$$\frac{E^-_{x10}}{E^+_{x10}} = \Gamma = \frac{\eta_{\text{entrada}} - \eta_1}{\eta_{\text{entrada}} + \eta_1} \tag{35}$$

Para encontrar a impedância de entrada, calculamos a Equação (32) para $z = -l$, o que resultará em

$$\eta_{\text{entrada}} = \eta_2 \frac{\eta_3 \cos \beta_2 l + j\eta_2 \operatorname{sen} \beta_2 l}{\eta_2 \cos \beta_2 l + j\eta_3 \operatorname{sen} \beta_2 l} \tag{36}$$

As Equações (35) e (36) são resultados gerais que nos permitem calcular a amplitude e a fase da onda refletida resultante nas duas interfaces paralelas entre meios sem perdas.[1] Note a dependência em relação ao espaçamento entre as interfaces, l, e no comprimento de onda medido na região 2, caracterizada por β_2. De importância imediata para nós é a fração da potência incidente que reflete na interface dupla e se propaga de volta na região 1. Conforme encontramos anteriormente, essa fração será $|\Gamma|^2$. É importante também a potência transmitida, que se propaga afastando-se da segunda interface na região 3. É simplesmente a fração restante da potência, que vale $1 - |\Gamma|^2$. A potência na região 2 permanece constante em regime permanente. Alguma potência deixa essa região para formar as ondas refletida e transmitida, mas é imediatamente reposta pela onda incidente. Já encontramos uma situação análoga envolvendo linhas de transmissão em cascata, a qual resultou na Equação (101) do Capítulo 10.

Um resultado importante de situações que envolvem duas interfaces é a possibilidade de se atingir uma transmissão total em certos casos. A partir da Equação (35) vemos que transmissão total ocorre quando $\Gamma = 0$, ou quando $\eta_{\text{entrada}} = \eta_1$. Nesse caso, como no caso das linhas de transmissão, dizemos que a impedância de entrada está *casada* com a do meio incidente. Existem alguns métodos para chegar a isso.

Para começar, suponha que $\eta_3 = \eta_1$ e que a região 2 possui uma espessura tal que $\beta_2 l = m\pi$, onde m é um inteiro. Agora $\beta_2 = 2\pi/\lambda_2$, onde λ_2 é o comprimento de onda *medido na região 2*. Logo

$$\frac{2\pi}{\lambda_2} l = m\pi$$

ou

$$l = m\frac{\lambda_2}{2} \tag{37}$$

Com $\beta_2 l = m\pi$, a espessura da segunda região é um inteiro múltiplo de meio comprimento de onda medido naquele meio. A Equação (36) agora se reduz a $\eta_{\text{entrada}} = \eta_3$. Assim, o efeito geral de uma espessura múltipla de meio comprimento de onda é tornar

[1] Por conveniência, as Equações (34*a*) e (34*b*) foram escritas para um tempo específico no qual a amplitude da onda incidente, E^+_{x10}, ocorre em $z = -l$. Isso estabelece uma referência de fase zero para a onda incidente na interface da frente, e assim será dessa referência que se determinará a fase da onda refletida. De forma equivalente, reposicionamos o ponto $z = 0$ na interface da frente. A Equação (36) permite isso porque é apenas função do espaçamento l entre as interfaces.

a segunda região sem influência nos resultados de reflexão e transmissão. De forma equivalente, temos um problema de interface única envolvendo η_1 e η_3. Agora, com $\eta_3 = \eta_1$, temos uma impedância de entrada casada, e não há onda refletida resultante. Esse método de escolha da espessura da região 2 é conhecido como *casamento de meia-onda*. Sua aplicação inclui, por exemplo, o invólucro de antenas em aviões conhecidos como *radomes*, que forma uma parte da fuselagem. A antena, dentro do avião, pode transmitir e receber através dessa camada, que pode ser desenhada de forma a permitir uma boa característica aerodinâmica. Note que a condição de casamento de meia-onda não mais se aplica à medida que nos desviamos do comprimento de onda que a satisfaz. Quando isso acontece, a refletividade do dispositivo aumenta (com um maior desvio no comprimento de onda), de forma a agir como um filtro passa-banda.

Muitas vezes, é conveniente expressar a constante dielétrica do meio mediante o *índice de refração* (ou apenas índice), representado por n, definido como

$$n = \sqrt{\epsilon_r} \tag{38}$$

A caracterização de materiais pelos seus índices de refração é feita principalmente em frequências óticas (da ordem de 10^{14} Hz), enquanto em frequências muito mais baixas, uma constante dielétrica é normalmente especificada. Uma vez que ϵ_r é complexo em meios com perdas, o índice também será complexo. Porém, em vez de complicar a situação dessa maneira, iremos restringir nosso uso do índice de refração a casos que envolvem meios sem perdas, com $\epsilon_r'' = 0$ e $\mu_r = 1$. Sob condições sem perdas, podemos escrever a constante de defasamento da onda plana e a impedância intrínseca do material expressando-as pelo índice, por meio de

$$\beta = k = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}\sqrt{\epsilon_r} = \frac{n\omega}{c} \tag{39}$$

e

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \frac{\eta_0}{n} \tag{40}$$

Finalmente, a velocidade de fase* e o comprimento de onda em um material de índice n são

$$v_p = \frac{c}{n} \tag{41}$$

e

$$\lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{\lambda_0}{n} \tag{42}$$

onde λ_0 é o comprimento de onda no espaço livre. Obviamente, é importante não confundir o índice n com a letra grega η (impedância intrínseca) que lhe é parecida, mas que possui um significado completamente diferente.

* N. de T.: p do termo inglês *phase*.

Outra aplicação tipicamente vista em ótica é o *interferômetro de Fabry-Perot*. Ele, em sua forma mais simples, consiste em um bloco único de vidro ou outro material transparente de índice n, cuja espessura l é projetada para transmitir comprimentos de onda que satisfaçam a condição $\lambda = \lambda_0/n = 2l/m$. Na maior parte das vezes, queremos transmitir apenas um comprimento de onda, e não vários, conforme a Equação (37) permitiria. Gostaríamos, portanto, de assegurar que os comprimentos de onda adjacentes que passassem pelo dispositivo fossem separados para o mais longe possível, até que apenas um restasse no espectro de frequência de entrada. Considerando o comprimento de onda medido no material, essa separação geralmente é dada por

$$\lambda_{m-1} - \lambda_m = \Delta\lambda_f = \frac{2l}{m-1} - \frac{2l}{m} = \frac{2l}{m(m-1)} \doteq \frac{2l}{m^2}$$

Note que m é o número de meios comprimentos de onda na região 2, ou $m = 2l/\lambda = 2nl/\lambda_0$, onde λ_0 é o comprimento de onda no espaço livre ideal para transmissão. Com isso

$$\Delta\lambda_f \doteq \frac{\lambda_2^2}{2l} \tag{43a}$$

Considerando o comprimento de onda medido no espaço livre, isso se torna

$$\Delta\lambda_{f0} = n\Delta\lambda_f \doteq \frac{\lambda_0^2}{2nl} \tag{43b}$$

$\Delta\lambda_{f0}$ é conhecido como a *faixa espectral livre* do interferômetro de Fabry-Perot, expressa pela separação entre comprimentos de onda no espaço livre. O interferômetro pode ser utilizado como um filtro de banda estreita (transmitindo um comprimento de onda desejado e um espectro estreito em volta desse comprimento de onda) se o espectro a ser filtrado for mais estreito que a faixa espectral livre.

EXEMPLO 12.4

Suponha que desejamos filtrar um espectro ótico de largura total $\Delta\lambda_{s0} = 50$ nm (medido no espaço livre), cujo comprimento de onda central, λ_0, está na parte vermelha do espectro visível em 600 nm, onde um nm (nanômetro) vale 10^{-9} m. Um filtro de Fabry-Perot deve ser utilizado, consistindo em uma placa de vidro sem perdas no ar com índice de refração $n = 1{,}45$. Precisamos encontrar a faixa necessária de espessuras do vidro para que ordens múltiplas do comprimento de onda não sejam transmitidas.

Solução. Precisamos que a faixa espectral livre seja maior que a largura espectral ótica, ou $\Delta\lambda_{f0} > \Delta\lambda_s$. Usando a Equação (43*b*)

$$l < \frac{\lambda_0^2}{2n\Delta\lambda_{s0}}$$

Desta forma,

$$l < \frac{600^2}{2(1{,}45)(50)} = 2{,}5 \times 10^3 \text{nm} = 2{,}5\ \mu\text{m}$$

onde 1 μm (micrômetro) $= 10^{-6}$ m. A fabricação de uma placa de vidro com essa espessura ou menor é impossível de se conceber. Em vez disso, é normalmente uti-

lizado um espaçamento de ar com espessura dessa ordem entre duas placas grossas, cujas superfícies nos lados opostos ao espaçamento de ar são revestidas com material antirrefletivo. Essa é na verdade uma configuração mais versátil, pois o comprimento de onda a ser transmitido (e a faixa espectral livre) pode ser ajustado pela variação da separação entre as placas.

Em seguida, removemos a restrição $\eta_1 = \eta_3$ e procuramos por uma maneira de não produzir reflexão. Retornando à Equação (36), suponha que façamos $\beta_2 l = (2m - 1)\pi/2$, ou um múltiplo ímpar de $\pi/2$. Isso significa que

$$\frac{2\pi}{\lambda_2} l = (2m - 1)\frac{\pi}{2} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

ou

$$\boxed{l = (2m - 1)\frac{\lambda_2}{4}} \tag{44}$$

A espessura é um múltiplo ímpar de um quarto de comprimento de onda medido na região 2. Sob essa condição, a Equação (36) se reduz a

$$\eta_{\text{entrada}} = \frac{\eta_2^2}{\eta_3} \tag{45}$$

Tipicamente, escolhemos a impedância da segunda região para permitir o casamento entre as impedâncias η_1 e η_3 dadas. Para se atingir transmissão total, precisamos que $\eta_{\text{entrada}} = \eta_1$, de forma que a impedância necessária para a segunda região seja

$$\boxed{\eta_2 = \sqrt{\eta_1 \eta_3}} \tag{46}$$

Depois de satisfeitas as condições dadas pelas Equações (44) e (46), realizamos um *casamento de quarto de onda*. O projeto de revestimentos antirrefletivos para dispositivos óticos, por exemplo, é baseado nesse princípio.

EXEMPLO 12.5

Desejamos revestir uma superfície de vidro com uma camada de dielétrico apropriado para proporcionar transmissão total do ar para o vidro em um comprimento de onda no espaço livre de 570 nm. O vidro tem índice de refração $n_3 = 1{,}45$. Determine o índice necessário para o revestimento e sua espessura mínima.

Solução. As impedâncias conhecidas são $\eta_1 = 377\ \Omega$ e $\eta_3 = 377/1{,}45 = 260\ \Omega$. Utilizando a Equação (46), temos

$$\eta_2 = \sqrt{(377)(260)} = 313\,\Omega$$

O índice da região 2 será então

$$n_2 = \left(\frac{377}{313}\right) = 1{,}20$$

O comprimento de onda na região 2 será

$$\lambda_2 = \frac{570}{1{,}20} = 475 \text{ nm}$$

A espessura mínima da camada de dielétrico é, então

$$l = \frac{\lambda_2}{4} = 119 \text{ nm} = 0{,}119\ \mu\text{m}$$

O procedimento mostrado nesta seção para calcular a reflexão de onda envolveu o cálculo de uma impedância efetiva na primeira interface, η_{entrada}, que é expressa pelas impedâncias que se posicionam além da interface da frente. Esse processo de *transformação de impedância* fica mais aparente quando consideramos problemas que envolvem mais que duas interfaces.

Como exemplo, considere a situação de três interfaces mostrada na Figura 12.5, onde uma onda é incidente vindo da esquerda pela região 1. Desejamos calcular a fração da potência incidente que é refletida e se propaga de volta pela região 1, e também a fração da potência incidente que é transmitida para a região 4. Para fazer isso, precisamos encontrar a impedância de entrada na superfície da frente (a interface entre as regiões 1 e 2). Começamos transformando a impedância da região 4 para formar a impedância de entrada na fronteira entre as regiões 2 e 3. Isso é mostrado como $\eta_{\text{entrada},\,b}$ na Figura 12.5. Utilizando a Equação (36), temos

$$\eta_{\text{entrada},\,b} = \eta_3 \frac{\eta_4 \cos \beta_3 l_b + j\eta_3 \,\text{sen}\, \beta_3 l_b}{\eta_3 \cos \beta_3 l_b + j\eta_4 \,\text{sen}\, \beta_3 l_b} \tag{47}$$

Com isso, reduzimos efetivamente a situação para um problema de duas interfaces no qual $\eta_{\text{entrada},\,b}$ é a impedância de tudo que está atrás da segunda interface, enquanto a

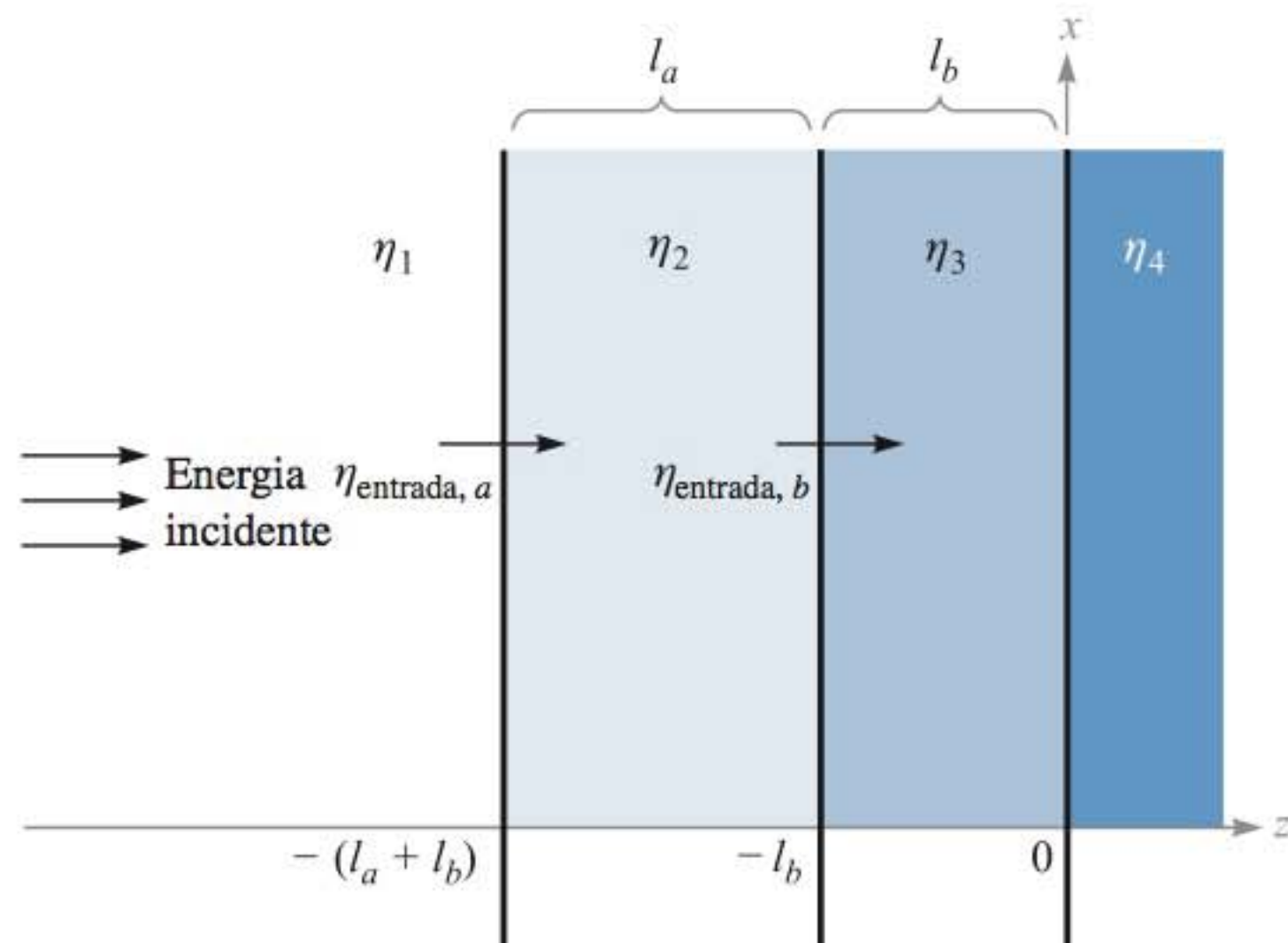



Figura 12.5 Um problema de três interfaces no qual a impedância de entrada $\eta_{\text{entrada},\,a}$ sofre uma transformação formando a impedância de entrada $\eta_{\text{entrada},\,b}$ na interface da frente.

impedância de entrada na interface da frente, $\eta_{\text{entrada},\,a}$ é agora encontrada transformando $\eta_{\text{entrada},\,b}$ da seguinte maneira:

$$\eta_{\text{entrada},\,a} = \eta_2 \frac{\eta_{\text{entrada},\,b} \cos \beta_2 l_a + j\eta_2 \operatorname{sen} \beta_2 l_a}{\eta_2 \cos \beta_2 l_a + j\eta_{\text{entrada},\,b} \operatorname{sen} \beta_2 l_a} \tag{48}$$

A fração da potência refletida é agora $|\Gamma|^2$, onde

$$\Gamma = \frac{\eta_{\text{entrada},\,a} - \eta_1}{\eta_{\text{entrada},\,a} + \eta_1}$$

A fração da potência transmitida para dentro da região 4 é, como antes, $1 - |\Gamma|^2$. O método da transformação de impedância pode ser aplicado dessa maneira a qualquer número de interfaces. O processo, apesar de entediante, é facilmente executado por um computador.

Utilizamos múltiplas camadas para reduzir a reflexão, porque assim a estrutura resultante será menos sensível a desvios do comprimento de onda de projeto se as impedâncias (ou índices de refração) forem arranjadas de forma a aumentar ou diminuir progressivamente de camada a camada. Para camadas múltiplas de revestimento antirrefletivo de lentes de câmeras, por exemplo, a camada na superfície da lente seria de impedância muito próxima daquela do vidro. Às camadas subsequentes são dadas impedâncias progressivamente mais altas. Com uma grande quantidade de camadas produzidas dessa maneira, a situação começa a se aproximar (mas nunca alcança) do caso ideal, no qual a camada de cima é casada com o ar, enquanto as impedâncias das camadas mais profundas decrescem continuamente até atingir o valor da superfície do vidro. Com essa impedância que varia continuamente, não há superfície na qual refletir, e com isso a luz de qualquer comprimento de onda seria totalmente transmitida. Revestimentos de múltiplas camadas projetados dessa maneira produzem excelentes condições de transmissão em banda larga.

EP12.3. Uma onda plana uniforme no ar incide normalmente em uma lâmina de dielétrico de espessura $\lambda_2/4$, e impedância intrínseca $\eta_2 = 260\ \Omega$. Determine a amplitude e o ângulo do coeficiente de reflexão.

Resp. 0,356; 180°

12.4 PROPAGAÇÃO DE ONDAS PLANAS EM DIREÇÕES GENÉRICAS

Nesta seção, aprenderemos como descrever matematicamente ondas planas uniformes que se propagam em qualquer direção. Fazemos isso para satisfazer a necessidade de enfrentar o problema de ondas incidentes em fronteiras que não são perpendiculares à direção de propagação. Tais problemas de *incidência oblíqua* ocorrem mais frequentemente, tanto que a incidência normal é um caso especial. O enfrentamento de tais problemas requer (como sempre) que estabeleçamos um sistema de coordenadas apropriado. Com a fronteira posicionada no plano xy, por exemplo, a onda incidente se propagará em uma direção que pode envolver todos os três eixos coordenados, enquanto no caso da incidência normal a preocupação era apenas com

a propagação ao longo de z. Precisamos de um formalismo matemático que permita o tratamento do caso com direção genérica.

Vamos considerar uma onda que se propaga em um meio sem perdas, com constante de propagação $\beta = k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$. Por simplicidade, consideramos o caso bidimensional, no qual a onda viaja em uma direção entre os eixos x e z. O primeiro passo é considerar a constante de propagação como um *vetor*, **k**, indicado na Figura 12.6. A direção e o sentido de **k** são aqueles da propagação, que são os mesmos do vetor de Poynting no nosso caso.[2] A intensidade de **k** é o defasamento por unidade de distância *ao longo dessa direção*. Parte do processo para se caracterizar uma onda envolve especificar sua fase em qualquer localização espacial. Para as ondas que consideramos, as quais se propagavam ao longo do eixo z, isso era obtido pelo fator $e^{\pm jkz}$ na forma fasorial. Para especificar a fase no nosso problema bidimensional, fazemos uso da natureza vetorial de **k** e consideramos a fase em uma posição genérica (x, z) descrita pelo vetor posição **r**. A fase naquela posição, em relação à origem, é dada pela projeção de **k** em **r** multiplicada pela intensidade de **r**, ou simplesmente $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$. Se o campo elétrico tem intensidade E_0, podemos então escrever a forma fasorial da onda na Figura 12.6 como

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tag{49}$$

O sinal de menos no expoente indica que a fase ao longo de **r** se desloca no tempo na direção crescente de **r**. Novamente, o fluxo de potência da onda em um meio isotrópico

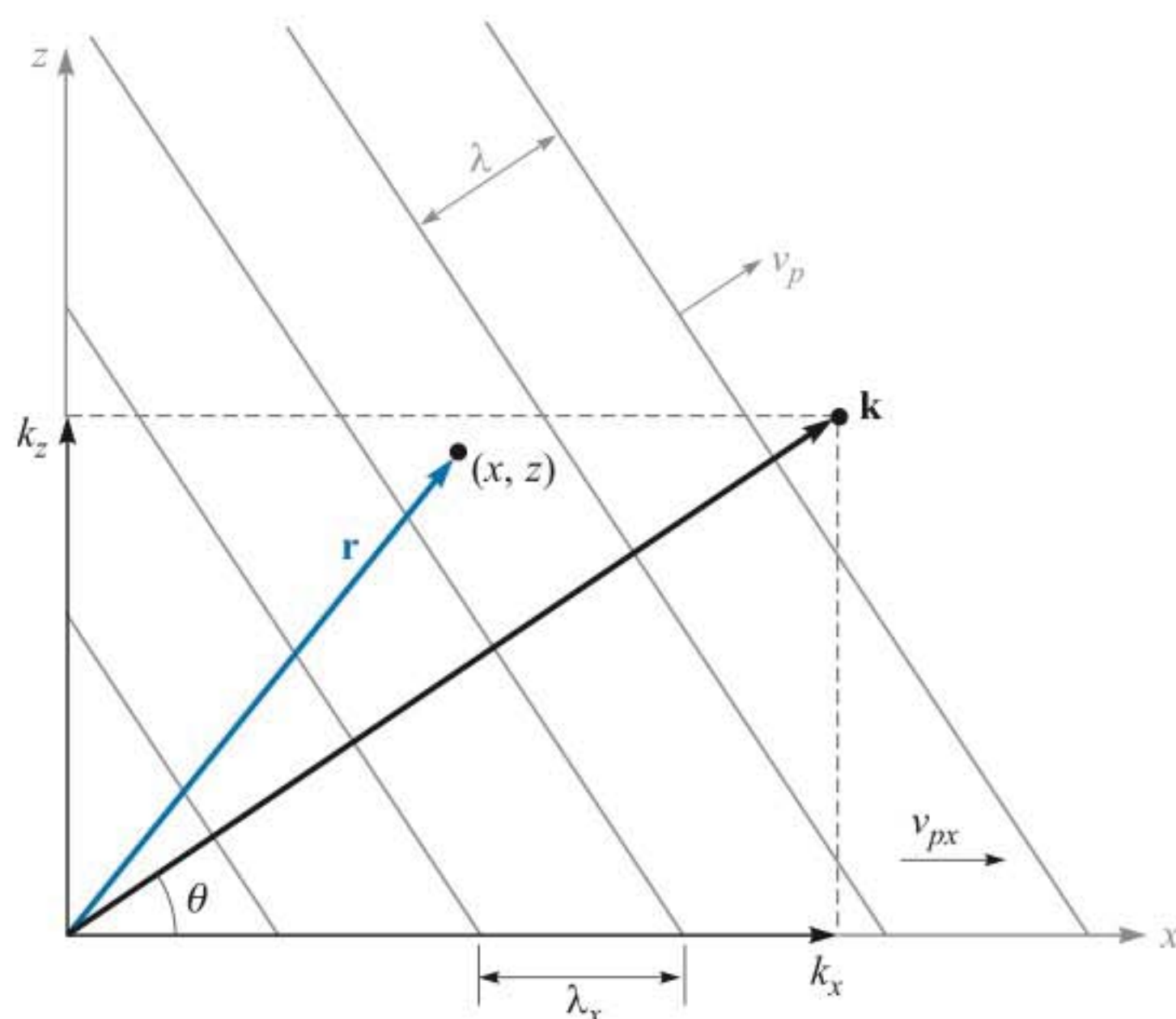



Figura 12.6 Representação de uma onda plana uniforme com vetor de onda **k** em um ângulo θ em relação ao eixo x. A fase no ponto (x, z) é dada por $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$. Planos de fase constantes (mostrados como linhas perpendiculares a **k**) estão espaçadas de um comprimento de onda λ, mas possuem maior espaçamento quando medidos ao longo dos eixos x ou z.

[2] Consideramos aqui que a onda está em um meio isotrópico, onde a permissividade e a permeabilidade não mudam com a orientação do campo. Em meios anisotrópicos (onde ϵ e/ou μ dependem da orientação do campo), as direções do vetor de Poynting e de **k** podem ser diferentes.

ocorre na direção ao longo da qual o defasamento por unidade de distância é máximo — ou ao longo de **k**. O vetor **r** serve como uma maneira de medir a fase em qualquer ponto utilizando-se **k**. Essa construção é facilmente estendida a três dimensões, permitindo-se que **k** e **r** tenham três componentes cada um.

No nosso caso bidimensional da Figura 12.6, podemos expressar **k** por seus componentes x e z:

$$\mathbf{k} = k_x \mathbf{a}_x + k_z \mathbf{a}_z$$

O vetor posição, **r**, pode ser expresso de maneira similar:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + z\mathbf{a}_z$$

de forma que

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_z z$$

A Equação (49) se torna então

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_0 e^{-j(k_x x + k_z z)} \tag{50}$$

Enquanto a Equação (49) forneceu a forma geral da onda, a Equação (50) é a forma específica para a situação. Dada uma onda expressa pela Equação (50), o ângulo de propagação em relação ao eixo x é prontamente encontrado por

$$\theta = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{k_z}{k_x}\right)$$

O comprimento de onda e a velocidade de fase dependem da direção que se considera. Na direção de **k**, eles serão

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\left(k_x^2 + k_z^2\right)^{1/2}}$$

e

$$\nu_p = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\left(k_x^2 + k_z^2\right)^{1/2}}$$

Se considerarmos a direção x, por exemplo, essas grandezas serão

$$\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x}$$

e

$$\nu_{px} = \frac{\omega}{k_x}$$

Note que ambos λ_x e ν_{px} são maiores que suas contrapartes ao longo da direção **k**. Esse resultado, que em princípio surpreende, pode ser entendido pela geometria da Figura 12.6. O diagrama mostra uma série de frentes de fase (planos de fase constante), os quais interceptam **k** em ângulos retos. O defasamento entre frentes adjacentes é determinado como 2π na figura. Isso corresponde a uma separação espacial ao

longo da direção **k** de um comprimento de onda, conforme mostrado. As frentes de fase interceptam o eixo x, e vemos que *ao longo* de x a separação entre as frentes é maior do que era ao longo de **k**. O espaçamento entre frentes ao longo de x é λ_x, indicado na figura. A velocidade de fase ao longo de x é a velocidade dos pontos de interseção entre as frentes de fase e o eixo x. Novamente, pela geometria, vemos que essa velocidade tem que ser maior que a velocidade ao longo de **k** e irá, é claro, exceder a velocidade da luz no meio. Contudo, isso não constitui uma violação da relatividade especial, já que a energia na onda flui na direção de **k** e não ao longo de x ou z. A frequência da onda é $f = \omega/2\pi$ e não varia com a direção. Note, por exemplo, que na direção que consideramos,

$$f = \frac{v_p}{\lambda} = \frac{v_{px}}{\lambda_x} = \frac{\omega}{2\pi}$$

EXEMPLO 12.6

Considere uma onda plana uniforme de 50 MHz que possui amplitude do campo elétrico de 10 V/m. O meio é sem perdas, com $\epsilon_r = \epsilon_r' = 9{,}0$ e $\mu_r = 1{,}0$. A onda se propaga no plano xy em um ângulo de 30° em relação ao eixo x e é linearmente polarizado ao longo de z. Escreva a expressão fasorial para o campo elétrico.

Solução. A intensidade da constante de propagação é

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \frac{\omega\sqrt{\epsilon_r}}{c} = \frac{2\pi \times 50 \times 10^6(3)}{3 \times 10^8} = 3{,}2 \text{ m}^{-1}$$

O vetor **k** vale então

$$\mathbf{k} = 3{,}2(\cos 30\mathbf{a}_x + \text{sen}\, 30\,\mathbf{a}_y) = 2{,}8\mathbf{a}_x + 1{,}6\mathbf{a}_y \text{ m}^{-1}$$

Então

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{a}_x + y\,\mathbf{a}_y$$

Com o campo elétrico direcionado ao longo de z, a forma fasorial se torna

$$\mathbf{E}_s = E_0 e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,\mathbf{a}_z = 10e^{-j(2{,}8x+1{,}6y)}\,\mathbf{a}_z$$

EP12.4. Para o Exemplo 12.6, calcule λ_x, λ_y, v_{px} e v_{py}.

Resp. 2,2 m; 3,9 m; $1{,}1 \times 10^8$ m/s; $2{,}0 \times 10^8$ m/s

12.5 REFLEXÃO DE ONDAS PLANAS COM ÂNGULOS DE INCIDÊNCIA OBLÍQUOS

Consideremos agora o problema da reflexão de ondas em interfaces planas, no qual a onda incidente se propaga com algum ângulo em relação à interface. Nossos objetivos são: (1) determinar a relação entre os ângulos de incidência, de reflexão e de transmissão, e (2) derivar coeficientes de reflexão e de transmissão como funções do ângulo de incidência e da polarização da onda. Também vamos mostrar que existem casos nos quais reflexão total ou transmissão total podem ocorrer na interface entre

dois dielétricos se o ângulo de incidência e a polarização forem apropriadamente escolhidos.

A situação é ilustrada na Figura 12.7, na qual a direção da onda incidente e sua fase dependente da posição são caracterizadas pelo vetor de onda $\mathbf{k}_1^+$. O ângulo de incidência é o ângulo entre $\mathbf{k}_1^+$ e uma reta que é normal à superfície (o eixo x, neste caso). O ângulo de incidência é mostrado como θ_1. A onda refletida, caracterizada pelo vetor de onda $\mathbf{k}_1^-$ se propagará afastando-se da interface em um ângulo θ_1'. Finalmente, a onda transmitida, caracterizada por $\mathbf{k}_2$, se propagará para dentro da segunda região em um ângulo θ_2, conforme mostrado. Pode-se suspeitar (pela experiência anterior) que os ângulos de incidência e de reflexão são iguais ($\theta_1 = \theta_1'$), o que é correto. Contudo, é necessário demonstrar isso.

Os dois meios são dielétricos sem perdas, caracterizados por impedâncias intrínsecas η_1 e η_2. Consideraremos, como antes, que os materiais não são magnéticos e, por isso, possuem permeabilidade μ_0. Consequentemente, os materiais são adequadamente descritos pela especificação de suas constantes dielétricas, ϵ_{r1} e ϵ_{r2}, ou seus índices de refração, $n_1 = \sqrt{\epsilon_{r1}}$ e $n_2 = \sqrt{\epsilon_{r2}}$.

Na Figura 12.7, dois casos são mostrados, os quais se diferem pela escolha da orientação do campo elétrico. Na Figura 12.7*a*, o campo **E** está polarizado no plano da página, com **H** então perpendicular à página e apontando para fora. Nessa ilustração, o plano da página é também o *plano de incidência*, que é mais precisamente definido como o plano formado pelo vetor **k** incidente e a normal à superfície. Com **E** pertencendo ao plano de incidência, diz-se que a onda tem *polarização paralela* ou está com polarização p (**E** é paralelo ao plano de incidência). Note que enquanto **H** é perpendicular ao plano de incidência, ele permanece paralelo (ou transversal) à interface. Consequentemente, outro tipo de nome para esse tipo de polarização é *transverso magnético*, ou polarização TM.

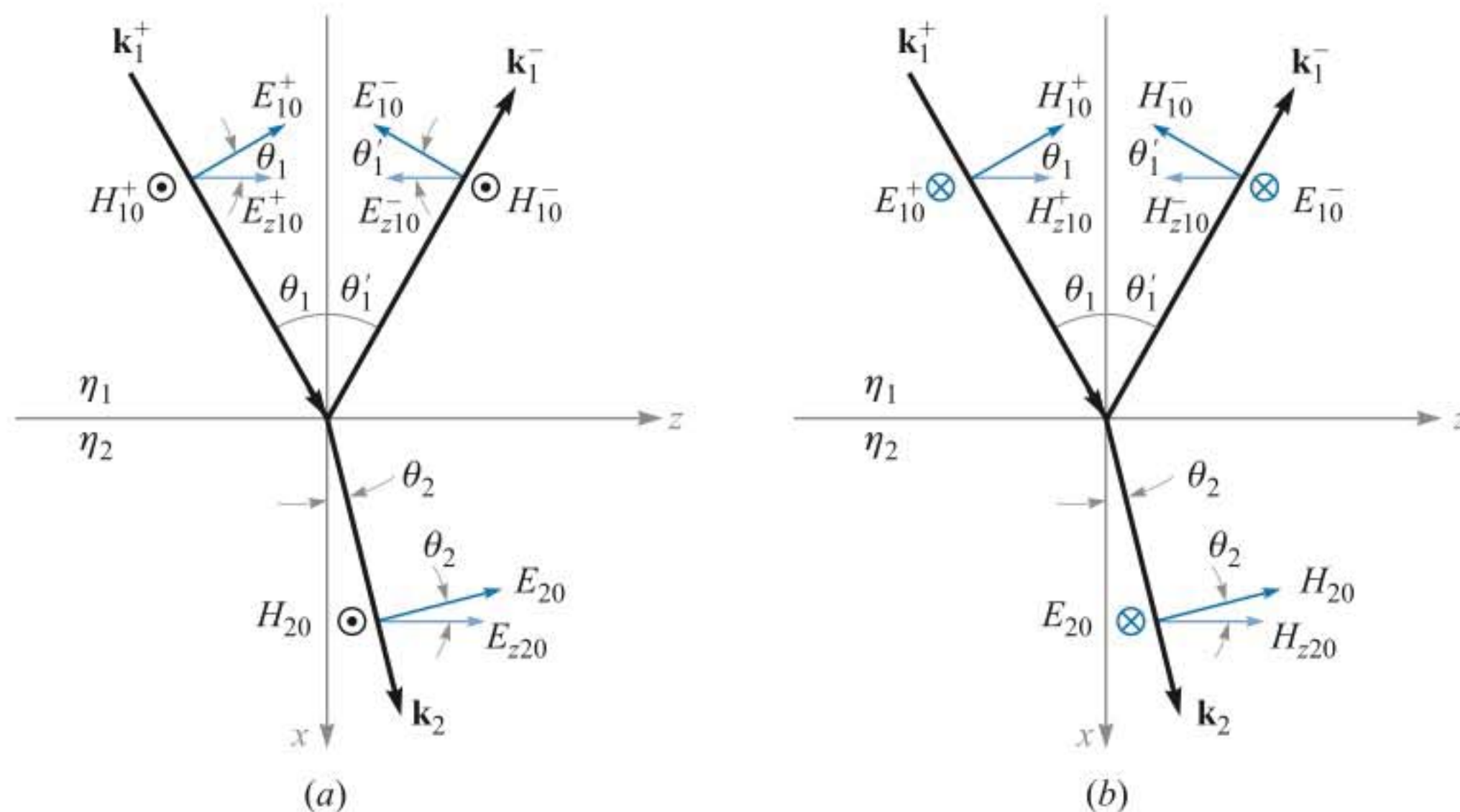



Figura 12.7 Geometrias para incidência de onda plana com ângulo θ_1 na interface entre dielétricos que possuem impedâncias intrínsecas η_1 e η_2. Os dois casos de polarização são mostrados: (*a*) polarização p (ou TM), com **E** no plano de incidência; (*b*) polarização s (ou TE), com **E** perpendicular ao plano de incidência.

A Figura 12.7*b* mostra a situação na qual as direções do campo foram giradas 90°. Agora **H** está no plano de incidência, enquanto **E** é perpendicular ao plano. Uma vez que **E** é utilizado para definir a polarização, a configuração é chamada de *polarização perpendicular*, ou polarização *s*.[3] **E** também é paralelo à interface, e com isso o caso é também chamado de *transverso elétrico*, ou polarização TE. Veremos que os coeficientes de reflexão e de transmissão serão diferentes para os dois tipos de polarização, mas que os ângulos de reflexão e de transmissão não dependerão da polarização. Apenas precisamos considerar as polarizações *s* e *p* porque qualquer outra direção de campo pode ser construída como uma combinação de ondas *s* e *p*.

Desejamos obter os coeficientes de reflexão e transmissão, assim como observar a maneira como os ângulos se inter-relacionam; esse conhecimento pode ser obtido pelas condições de fronteira dos campos na interface. Especificamente, precisamos que os componentes transversais de **E** e **H** sejam contínuos através da interface. Essas foram as condições que usamos para encontrar Γ e τ para a incidência normal ($\theta_1 = 0$), que na verdade é um caso especial do nosso caso atual. Consideraremos o caso da polarização *p* (Figura 12.7*a*) primeiramente. Para começar, escrevemos os campos incidente, refletido e transmitido na forma fasorial, utilizando a notação desenvolvida na Seção 12.4:

$$\mathbf{E}_{s1}^{+} = \mathbf{E}_{10}^{+} e^{-j\mathbf{k}_1^{+} \cdot \mathbf{r}} \tag{51}$$

$$\mathbf{E}_{s1}^{-} = \mathbf{E}_{10}^{-} e^{-j\mathbf{k}_1^{-} \cdot \mathbf{r}} \tag{52}$$

$$\mathbf{E}_{s2} = \mathbf{E}_{20} e^{-j\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} \tag{53}$$

onde

$$\mathbf{k}_1^{+} = k_1(\cos\theta_1\, \mathbf{a}_x + \operatorname{sen}\theta_1\, \mathbf{a}_z) \tag{54}$$

$$\mathbf{k}_1^{-} = k_1(-\cos\theta_1'\, \mathbf{a}_x + \operatorname{sen}\theta_1'\, \mathbf{a}_z) \tag{55}$$

$$\mathbf{k}_2 = k_2(\cos\theta_2\, \mathbf{a}_x + \operatorname{sen}\theta_2\, \mathbf{a}_z) \tag{56}$$

e onde

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{a}_x + z\,\mathbf{a}_z \tag{57}$$

As intensidades dos vetores de onda são $k_1 = \omega\sqrt{\epsilon_{r1}}/c = n_1\omega/c$ e $k_2 = \omega\sqrt{\epsilon_{r2}}/c = n_2\omega/c$.

Agora, para avaliar as condições de fronteira que requerem campo elétrico tangencial contínuo, precisamos encontrar os componentes dos campos elétricos (componentes em z) que são paralelos à interface. Tomando a projeção de todos os campos **E** na direção z, e usando as Equações (51) a (57), encontramos

$$E_{zs1}^{+} = E_{z10}^{+} e^{-j\mathbf{k}_1^{+} \cdot \mathbf{r}} = E_{10}^{+} \cos\theta_1 e^{-jk_1(x\cos\theta_1 + z\operatorname{sen}\theta_1)} \tag{58}$$

$$E_{zs1}^{-} = E_{z10}^{-} e^{-j\mathbf{k}_1^{-} \cdot \mathbf{r}} = E_{10}^{-} \cos\theta_1' e^{jk_1(x\cos\theta_1' - z\operatorname{sen}\theta_1')} \tag{59}$$

$$E_{zs2} = E_{z20} e^{-j\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} = E_{20} \cos\theta_2 e^{-jk_2(x\cos\theta_2 + z\operatorname{sen}\theta_2)} \tag{60}$$

[3] A designação *s* é uma abreviação para a palavra alemã *senkrecht*, que significa *perpendicular*. O *p* em *polarização p* é uma abreviação para a palavra alemã *parallel* (paralelo).

A condição de fronteira para o campo elétrico tangencial contínuo fica agora:

$$E^{+}_{zs1} + E^{-}_{zs1} = E_{zs2} \quad (\text{em } x = 0)$$

Agora substituímos as Equações (58) a (60) na Equação (61) e avaliamos o resultado em $x = 0$ para obter

$$E^{+}_{10} \cos\theta_1 \, e^{-jk_1 z \operatorname{sen}\theta_1} + E^{-}_{10} \cos\theta'_1 \, e^{-jk_1 z \operatorname{sen}\theta'_1} = E_{20} \cos\theta_2 \, e^{-jk_2 z \operatorname{sen}\theta_2} \tag{61}$$

Note que E^{+}_{10}, E^{-}_{10} e E_{20} são todos uniformes (independentes de z). Além disso, precisamos que a Equação (61) seja válida para todos os valores de z (em todos os pontos da superfície). Para que isso ocorra, todos os termos de fase que aparecem na Equação (61) devem ser iguais. Especificamente

$$k_1 z \operatorname{sen}\theta_1 = k_1 z \operatorname{sen}\theta'_1 = k_2 z \operatorname{sen}\theta_2$$

A partir disso, vemos imediatamente que $\theta'_1 = \theta_1$, ou o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência. Também encontramos que

$$\boxed{k_1 \operatorname{sen}\theta_1 = k_2 \operatorname{sen}\theta_2} \tag{62}$$

A Equação (62) é conhecida como *lei de Snell da refração*. Uma vez que, em geral, $k = n\omega/c$, podemos reescrever a Equação (62) utilizando os índices de refração:

$$\boxed{n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2} \tag{63}$$

A Equação (63) é a forma da lei de Snell mais prontamente utilizável para nosso caso atual de dielétricos não magnéticos. A Equação (62) é uma forma mais geral que se aplicaria, por exemplo, a casos que envolvessem materiais com diferentes permeabilidades, assim como com diferentes permissividades. Assim, teríamos $k_1 = (\omega/c)\sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}$ e $k_2 = (\omega/c)\sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}$.

Encontradas as relações entre os ângulos, voltemos agora para nosso segundo objetivo, que é o de determinar as relações entre as amplitudes E^{+}_{10}, E^{-}_{10} e E_{20}. Para conseguir isso, temos que considerar a outra condição de fronteira, a qual requer continuidade tangencial de $\mathbf{H}$ em $x = 0$. Os vetores de campo magnético para a onda com polarização p estão todos orientados em y negativo. Na fronteira, as amplitudes dos campos estão relacionadas por

$$H^{+}_{10} + H^{-}_{10} = H_{20} \tag{64}$$

Então, quando consideramos que $\theta'_1 = \theta_1$ e invocamos a lei de Snell, a Equação (61) se torna

$$E^{+}_{10} \cos\theta_1 + E^{-}_{10} \cos\theta_1 = E_{20} \cos\theta_2 \tag{65}$$

Utilizando as impedâncias intrínsecas dos meios, sabemos, por exemplo, que $E^{+}_{10}/H^{+}_{10} = \eta_1$ e $E^{+}_{20}/H^{+}_{20} = \eta_2$. A Equação (64) pode ser escrita como

$$\frac{E^{+}_{10}\cos\theta_1}{\eta_{1p}} - \frac{E^{-}_{10}\cos\theta_1}{\eta_{1p}} = \frac{E^{+}_{20}\cos\theta_2}{\eta_{2p}} \tag{66}$$

Note o sinal de menos na frente do segundo termo da Equação (66), que resulta do fato de $E^{-}_{10}\cos\theta_1$ ser negativo, enquanto H^{-}_{10} é positivo (da Figura 12.7*a*). Quando

escrevemos a Equação (66), as *impedâncias efetivas*, válidas para a polarização p, são definidas por

$$\eta_{1p} = \eta_1 \cos \theta_1 \tag{67}$$

e

$$\eta_{2p} = \eta_2 \cos \theta_2 \tag{68}$$

Com essa representação, as formas assumidas pelas Equações (65) e (66) permitem que ambas sejam resolvidas para as razões E_{10}^-/E_{10}^+ e E_{20}/E_{10}^+. Realizando procedimentos análogos àqueles utilizados para resolver as Equações (7) e (8), encontramos os coeficientes de reflexão e de transmissão:

$$\Gamma_p = \frac{E_{10}^-}{E_{10}^+} = \frac{\eta_{2p} - \eta_{1p}}{\eta_{2p} + \eta_{1p}} \tag{69}$$

$$\tau_p = \frac{E_{20}}{E_{10}^+} = \frac{2\eta_{2p}}{\eta_{2p} + \eta_{1p}} \left(\frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} \right) \tag{70}$$

Um procedimento similar pode ser realizado para a polarização s, considerando a Figura 12.7*b*. Os detalhes são deixados como exercício. Os resultados são

$$\Gamma_s = \frac{E_{y10}^-}{E_{y10}^+} = \frac{\eta_{2s} - \eta_{1s}}{\eta_{2s} + \eta_{1s}} \tag{71}$$

$$\tau_s = \frac{E_{y20}}{E_{y10}^+} = \frac{2\eta_{2s}}{\eta_{2s} + \eta_{1s}} \tag{72}$$

onde as impedâncias efetivas para a polarização s são

$$\eta_{1s} = \eta_1 \sec \theta_1 \tag{73}$$

e

$$\eta_{2s} = \eta_2 \sec \theta_2 \tag{74}$$

As Equações (67) a (74) são o que precisamos para calcular a reflexão e a transmissão de ondas para qualquer uma das duas polarizações e em qualquer ângulo de incidência.

EXEMPLO 12.7

Uma onda plana uniforme no ar incide em um vidro fazendo um ângulo em relação à normal de 30°. Determine as frações da potência incidente refletida e transmitida para (*a*) polarização p e (*b*) polarização s. O vidro tem índice de refração $n_2 = 1{,}45$.

Solução. Primeiramente, aplicamos a lei de Snell para encontrar o ângulo de transmissão. Usando $n_1 = 1$ para o ar, usamos a Equação (63) para encontrar

$$\theta_2 = \text{sen}^{-1}\left(\frac{\text{sen}\,30}{1{,}45}\right) = 20{,}2^\circ$$

Agora, para a polarização p:

$$\eta_{1p} = \eta_1 \cos 30 = (377)(0,866) = 326\,\Omega$$

$$\eta_{2p} = \eta_2 \cos 20{,}2 = \frac{377}{1{,}45}(0{,}938) = 244\,\Omega$$

Assim, utilizando a Equação (69), encontramos

$$\Gamma_p = \frac{244 - 326}{244 + 326} = -0{,}144$$

A fração da potência incidente que é refletida é

$$\frac{P_r}{P_{inc}} = |\Gamma_p|^2 = 0{,}021$$

A fração transmitida é então

$$\frac{P_t}{P_{inc}} = 1 - |\Gamma_p|^2 = 0{,}979$$

Para a polarização s, temos

$$\eta_{1s} = \eta_1 \sec 30 = 377/0{,}866 = 435\,\Omega$$

$$\eta_{2s} = \eta_2 \sec 20{,}2 = \frac{377}{1{,}45(0{,}938)} = 277\,\Omega$$

E utilizando a Equação (71):

$$\Gamma_s = \frac{277 - 435}{277 + 435} = -0{,}222$$

Por fim, a fração de potência refletida é

$$|\Gamma_s|^2 = 0{,}049$$

E fração da potência incidente transmitida é

$$1 - |\Gamma_s|^2 = 0{,}951$$

No Exemplo 12.7, os valores dos coeficientes de reflexão encontrados para as duas polarizações foram negativos. O significado de um coeficiente de reflexão negativo é que o componente do campo elétrico refletido paralelo à interface terá sentido oposto ao do componente do campo incidente quando ambos forem avaliados na fronteira.

Esse efeito é observado também quando o segundo meio é um condutor perfeito. Neste caso, sabemos que o campo elétrico dentro do condutor deve ser zero.

Consequentemente, $\eta_2 = E_{20}/H_{20} = 0$, e os coeficientes de reflexão serão $\Gamma_p = \Gamma_s = -1$. A reflexão total ocorre independentemente do ângulo de incidência ou da polarização.

12.6 REFLEXÃO TOTAL E TRANSMISSÃO TOTAL DE ONDAS INCIDENTES OBLÍQUAS

Agora que temos métodos disponíveis para resolver problemas que envolvem reflexão e transmissão de incidência oblíqua, podemos explorar casos especiais de *reflexão total* e de *transmissão total*. Procuramos por combinações especiais de meios, ângulos de incidência e polarizações que produzam essas propriedades. Para começar, identificaremos a condição necessária para a reflexão total. Queremos a reflexão total da *potência*, de forma que $|\Gamma|^2 = \Gamma\Gamma^* = 1$, onde Γ é Γ_p ou Γ_s. O fato de essa condição envolver a possibilidade de um Γ complexo permite alguma flexibilidade. Para o meio incidente, notamos que η_{1p} e η_{1s} sempre serão reais e positivos. Por outro lado, quando consideramos o segundo meio, η_{2p} e η_{2s} envolvem fatores de $\cos\theta_2$ ou $1/\cos\theta_2$, onde

$$\cos\theta_2 = \left[1 - \operatorname{sen}^2\theta_2\right]^{1/2} = \left[1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta_1\right]^{1/2} \tag{75}$$

onde a lei de Snell foi utilizada. Observamos que $\cos\theta_2$ e, com isso, η_{2p} e η_{2s}, se tornam imaginários sempre que $\operatorname{sen}\theta_1 > n_2/n_1$. Vamos considerar a polarização paralela, por exemplo. Sob as condições para η_{2p} imaginário, a Equação (69) se torna

$$\Gamma_p = \frac{j|\eta_{2p}| - \eta_{1p}}{j|\eta_{2p}| + \eta_{1p}} = -\frac{\eta_{1p} - j|\eta_{2p}|}{\eta_{1p} + j|\eta_{2p}|} = -\frac{Z}{Z^*}$$

onde $Z = \eta_{1p} - j|\eta_{2p}|$. *Podemos ver então que* $\Gamma_p\Gamma_p^* = 1$, *significando reflexão total da potência, sempre que* η_{2p} *for imaginário*. O mesmo será verdadeiro sempre que η_{2p} for zero, o que ocorrerá quando $\operatorname{sen}\theta_1 = n_2/n_1$. Temos então nossa condição para reflexão total, que é

$$\operatorname{sen}\theta_1 \geq \frac{n_2}{n_1} \tag{76}$$

Dessa condição surge o *ângulo crítico* de reflexão total, θ_c, definido por

$$\operatorname{sen}\theta_c = \frac{n_2}{n_1} \tag{77}$$

A condição para reflexão total pode então ser mais sucintamente escrita como

$$\theta_1 \geq \theta_c \qquad \text{para reflexão total} \tag{78}$$

Note que para que as Equações (76) e (77) façam sentido, deve ser verdade que $n_2 < n_1$, ou que a onda deve ser incidente vinda de um meio de maior índice de refração se comparado ao do meio que está após a fronteira. Por essa razão, a condição para reflexão total é às vezes chamada de reflexão *interna* total. Ela é frequentemente vista

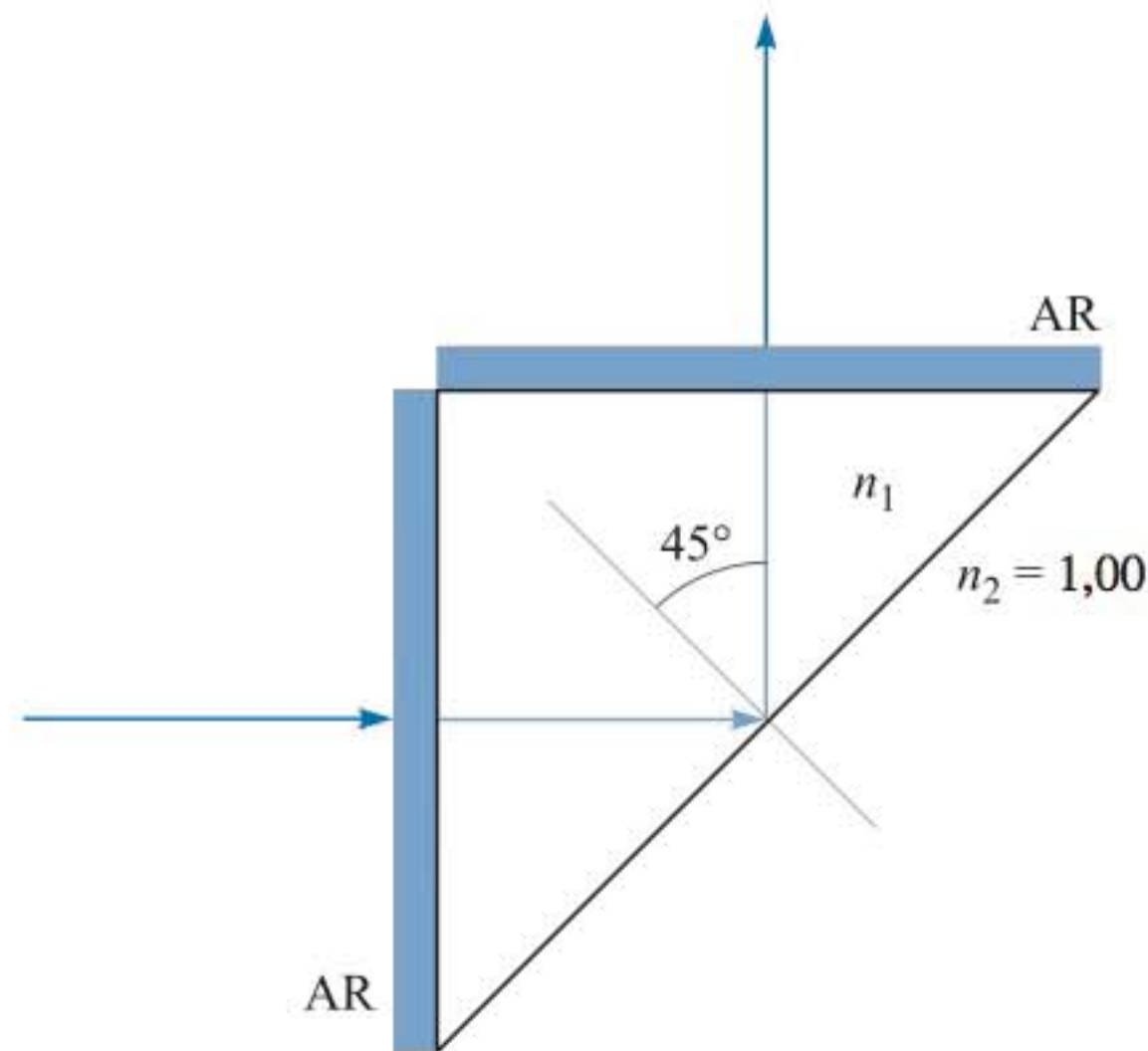



Figura 12.8 Prisma direcionador de raios de luz para o Exemplo 12.8.

(e aplicada) em dispositivos óticos tais como os prismas direcionadores de raios de luz, onde a luz dentro da estrutura de vidro reflete totalmente nas interfaces vidro-ar.

EXEMPLO 12.8

Um prisma deve ser utilizado para girar um feixe de luz de 90°, conforme mostrado na Figura 12.8. A luz entra e sai do prisma por duas superfícies antirrefletivas (revestimento AR). Deve ocorrer reflexão total na superfície de trás, onde o ângulo de incidência é de 45° em relação à normal. Determine o índice de refração mínimo necessário do material do prisma se a região em volta é o ar.

Solução. Considerando a superfície de trás, o meio além da interface é o ar, com $n_2 = 1{,}00$. Uma vez que $\theta_1 = 45°$, a Equação (76) é utilizada para se obter

$$n_1 \geq \frac{n_2}{\text{sen}\, 45} = \sqrt{2} = 1{,}41$$

Já que o vidro de sílica fundida tem índice de refração $n_g = 1{,}45^*$, é um material apropriado para essa aplicação, e é mesmo amplamente utilizado.

Os guias de onda óticos representam outro importante campo de aplicação da reflexão total. Em suas formas mais simples, esses guias são construídos com três camadas de vidro, deixando-se a camada do meio com um índice de refração ligeiramente maior que as outras duas. A Figura 12.9 mostra a estrutura básica. A luz, propagando-se da esquerda para a direita, fica confinada na camada do meio pela reflexão total nas duas interfaces, conforme mostrado. Guias de onda de fibra ótica são construídos com base nesse princípio, no qual uma região cilíndrica de vidro formando um núcleo de pequeno raio é envolvida coaxialmente por um revestimento de material de vidro de baixo índice e de maior raio. Os princípios básicos dos guias de ondas quando aplicados a estruturas metálicas e dielétricas serão apresentados no Capítulo 13.

* N. de T.: *g* do termo inglês *glass*.

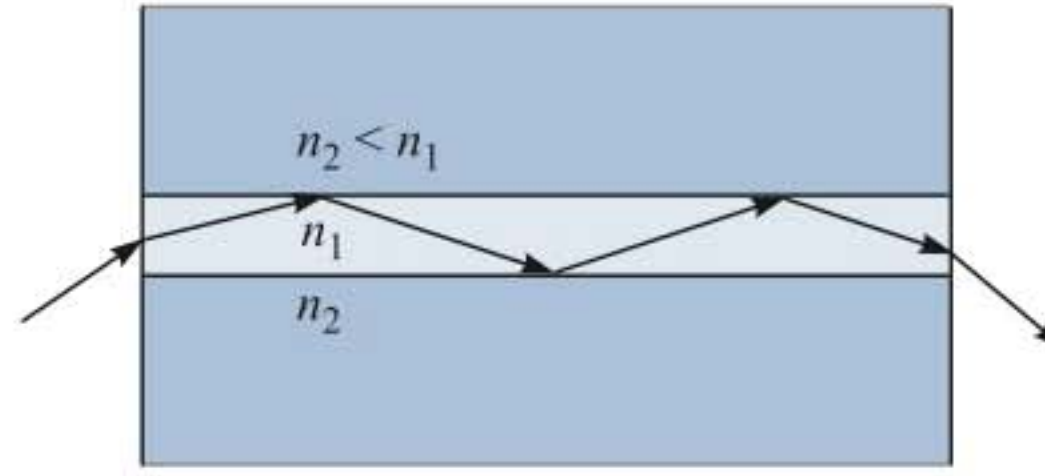



Figura 12.9 Uma tira de guia de onda dielétrico (caso simétrico), mostrando o confinamento da luz no material central pela reflexão total.

Em seguida, consideramos a possibilidade de *transmissão total*. Neste caso, é necessário apenas que $\Gamma = 0$. Investigamos essa possibilidade para as duas polarizações. Primeiro consideramos a polarização s. Se $\Gamma_s = 0$, então a partir da Equação (71) temos que ter $\eta_{2s} = \eta_{1s}$, ou

$$\eta_2 \sec\theta_2 = \eta_1 \sec\theta_1$$

Utilizando a lei de Snell para escrever θ_2 em termos de θ_1, a equação anterior se torna

$$\eta_2 \left[1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta_1\right]^{-1/2} = \eta_1 \left[1 - \operatorname{sen}^2\theta_1\right]^{-1/2}$$

Não existe valor de θ_1 que satisfaça essa condição, então nos voltaremos para a polarização p. Utilizando as Equações (67), (68) e (69), com a lei de Snell, encontramos que a condição para $\Gamma_p = 0$ é

$$\eta_2 \left[1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta_1\right]^{1/2} = \eta_1 \left[1 - \operatorname{sen}^2\theta_1\right]^{1/2}$$

Essa equação com certeza tem uma solução, que é

$$\boxed{\operatorname{sen}\theta_1 = \operatorname{sen}\theta_B = \frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}} \tag{79}$$

onde usamos $\eta_1 = \eta_0/n_1$ e $\eta_2 = \eta_0/n_2$. Esse ângulo especial θ_B, onde ocorre a transmissão total, é chamado de *ângulo de Brewster* ou *ângulo de polarização*. O último nome vem do fato de que se uma luz que possui ambos os componentes de polarização s e p incide com um ângulo $\theta_1 = \theta_B$, o componente p será totalmente transmitido, deixando a luz parcialmente refletida inteiramente com polarização s. Para ângulos que são ligeiramente diferentes do ângulo de Brewster, a luz refletida ainda apresenta predominantemente polarização s. A maior parte da luz refletida que vemos se origina de superfícies horizontais (tais como a superfície do oceano), e assim a luz na maior parte das vezes possui polarização horizontal. Óculos de sol do tipo polaroide tiram proveito desse fato para reduzir a claridade, pois são feitos para bloquear a transmissão de luz polarizada horizontalmente enquanto deixam passar a luz que está polarizada verticalmente.

EXEMPLO 12.9

Luz incide no vidro, vinda do ar, no ângulo de Brewster. Determine os ângulos de incidência e de transmissão.

Solução. Uma vez que o vidro possui índice de refração $n_2 = 1{,}45$, o ângulo de incidência será

$$\theta_1 = \theta_B = \text{sen}^{-1}\left(\frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}\right) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1{,}45}{\sqrt{1{,}45^2 + 1}}\right) = 55{,}4^\circ$$

O ângulo de transmissão é encontrado pela lei de Snell, pela Equação

$$\theta_2 = \text{sen}^{-1}\left(\frac{n_1}{n_2}\,\text{sen}\,\theta_B\right) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}\right) = 34{,}6^\circ$$

Note que esse exercício implica que $\text{sen}\,\theta_2 = \cos\theta_B$, o que significa que a soma dos ângulos de incidência e de refração na condição de Brewster é sempre 90°.

Muitos dos resultados que vimos nesta seção são resumidos na Figura 12.10, na qual Γ_p e Γ_s, das Equações (69) e (71), são representados em um gráfico em função do ângulo de incidência θ_1. São mostradas curvas para valores selecionados de n_1/n_2, que é a razão entre os índices de refração. Para todas as curvas nas quais $n_1/n_2 > 1$, Γ_s e Γ_p atingem valores de ± 1 no ângulo crítico. Para ângulos maiores, os coeficientes de reflexão se tornam imaginários (e não são mostrados), mas apesar disso continuam apresentando amplitudes unitárias. A ocorrência do ângulo de Brewster é evidente nas curvas para Γ_p (Figura 12.10*a*) porque todas as curvas cruzam o eixo θ_1. Esse comportamento não é visto nas funções de Γ_s, pois Γ_s é positivo para todos os valores de θ_1 quando $n_1/n_2 > 1$.

EP12.5. No Exemplo 12.9, calcule o coeficiente de reflexão para luz com polarização s.

Resp. $-0{,}355$

12.7 PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM MEIOS DISPERSIVOS

No Capítulo 11, encontramos situações nas quais a permissividade complexa do meio dependia da frequência. Isso é verdadeiro em todos os materiais devido a uma variedade de mecanismos possíveis. Um destes, mencionado anteriormente, é responsável pela oscilação das cargas ligadas em um material: são os osciladores harmônicos, os quais possuem frequências de ressonância a eles associadas (ver Apêndice E). Quando a frequência de uma onda eletromagnética que os atinge está na ressonância das cargas ligadas, ou perto dessa, a onda induzirá fortes oscilações. Estas, por sua vez, possuem o efeito de esgotar a energia da onda na sua forma original. A onda, então,

(*a*)

(*b*)

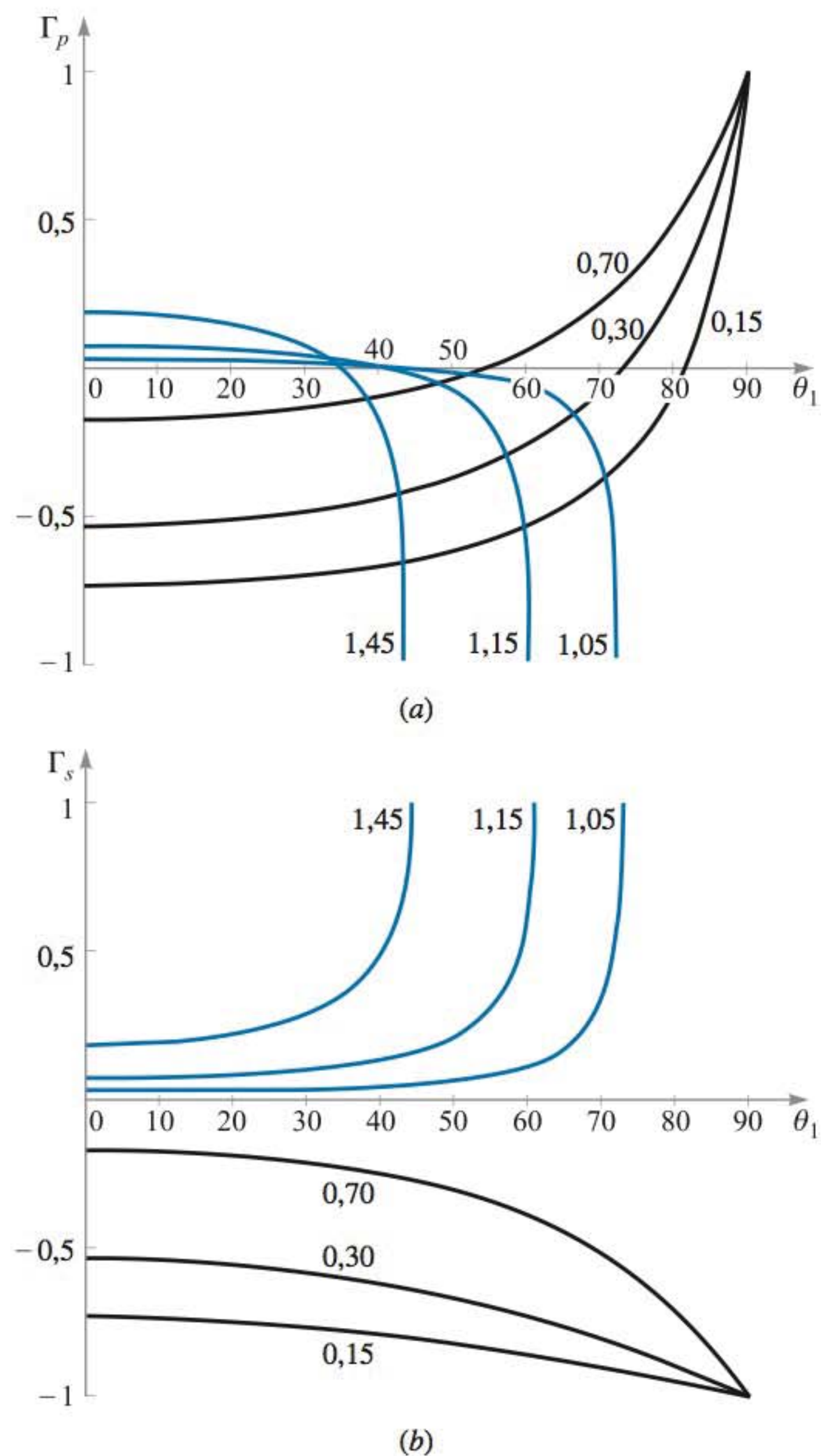



Figura 12.10 (*a*) Gráfico de Γ_p [Equação (69)] em função do ângulo de incidência θ_1, conforme mostrado na Figura 12.7*a*. São mostradas curvas para valores selecionados da razão entre os índices de refração, n_1/n_2. Ambos os meios são sem perdas e possuem $\mu_r = 1$. Logo, $\eta_1 = \eta_0/n_1$ e $\eta_2 = \eta_0/n_2$. (*b*) Gráfico de Γ_s [Equação (71)] em função do ângulo de incidência θ_1, conforme mostrado na Figura 12.7*b*. Assim como na Figura 12.10*a*, os meios são sem perdas, e são mostradas aqui curvas para valores selecionados de n_1/n_2.

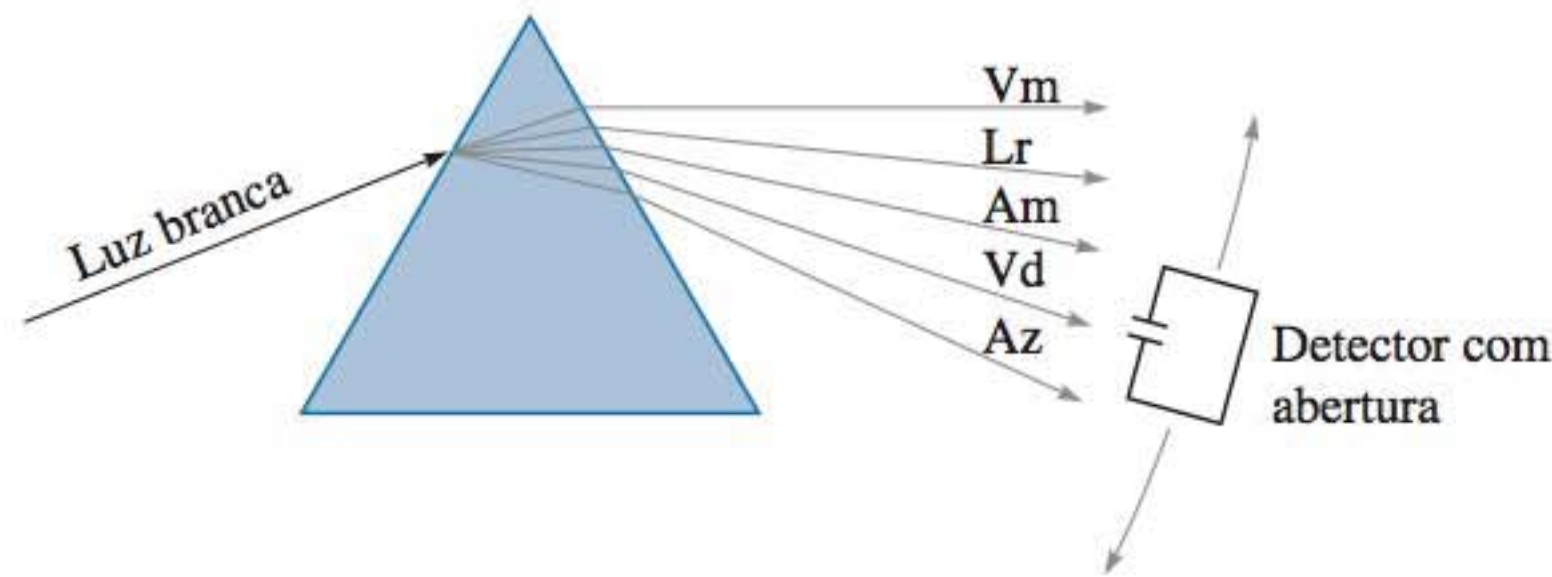



Figura 12.11 A dispersão angular de um prisma pode ser medida utilizando-se um dispositivo móvel que mede tanto o comprimento de onda quanto a potência. O dispositivo mede a luz por uma pequena abertura, melhorando assim a resolução do comprimento de onda.

experimenta uma absorção, que é mais forte do que seria caso a frequência não estivesse em sintonia com a ressonância. Um efeito associado é aquele que faz a parte real da constante dielétrica ser diferente em frequências próximas da ressonância em relação àquelas mais afastadas. Resumindo, efeitos de ressonância geram valores de ϵ' e de ϵ'' que variarão continuamente com a frequência. Esses, por sua vez, produzirão uma dependência com a frequência bastante complicada para as constantes de atenuação e de defasamento conforme expresso nas Equações (44) e (45) no Capítulo 11.

Esta seção lida com o efeito de uma constante dielétrica (ou índice de refração) variável com a frequência em uma onda – considerando uma situação em que a onda se propaga em um meio diferente sem perdas. Essa situação ocorre muito frequentemente porque uma variação significativa do índice de refração pode ocorrer em frequências que estão longe da ressonância, onde perdas por absorção são desprezíveis. Um exemplo clássico disso é a separação da luz branca em seus componentes coloridos em um prisma de vidro. Neste caso, o índice de refração dependente da frequência resulta em ângulos ou refrações diferentes para as diferentes cores – por isso a separação. O efeito de separação de cores produzido por um prisma é conhecido como *dispersão angular*, ou mais especificamente, dispersão angular *cromática*.

O termo *dispersão* implica uma *separação* de componentes distinguíveis de uma onda. No caso do prisma, os componentes são as várias cores que foram espacialmente separadas. Um ponto importante aqui é notar que a *potência* espectral foi dispersa pelo prisma. Podemos ilustrar essa ideia considerando o que seria necessário para medir a diferença nos ângulos refratados entre as luzes azul e vermelha, por exemplo. Neste caso, um detector de potência com uma abertura muito estreita deveria ser utilizado, conforme conforme mostra a Figura 12.11. O detector seria posicionado nas posições das luzes azul e vermelha vindas do prisma, com a abertura estreita permitindo essencialmente que uma cor de cada vez (ou luz em uma faixa espectral muito estreita) passasse pelo detector. O detector, então, mediria a potência no que poderíamos chamar de "pacote espectral", ou uma fatia muito estreita do espectro de potência total. Quanto menor a abertura, menor a largura espectral do pacote, e maior a precisão na medição.[4] É importante para nós pensarmos na potência da onda como

[4] Para realizar esse experimento, seria preciso medir também o comprimento de onda. Para fazer isso, seria bom que o detector fosse colocado na saída de um espectrômetro ou de um monocrômetro cuja fenda de entrada realizasse a função da abertura limitadora de largura de banda.

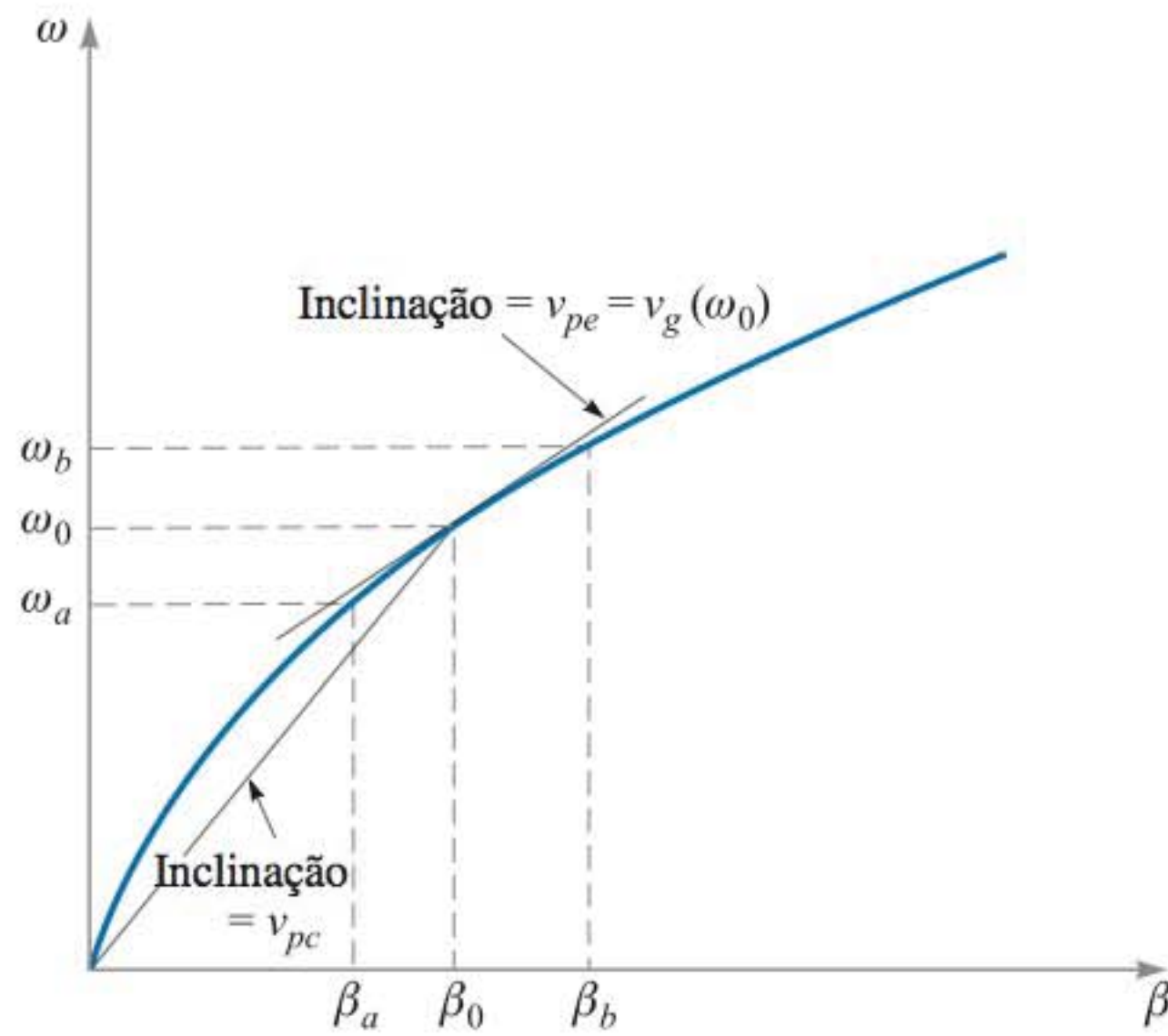



Figura 12.12 Diagrama ω-β para um material no qual o índice de refração aumenta com a frequência. A inclinação de uma reta tangente à curva em ω_0 é a velocidade de grupo naquela frequência. A inclinação da reta que une a origem ao ponto na curva em ω_0 é a velocidade de fase em ω_0.

subdividida em pacotes espectrais, porque na nossa interpretação da dispersão da onda *no tempo*, tópico principal desta seção, ela aparecerá predominantemente nessa forma.

Consideremos agora um meio não magnético sem perdas no qual o índice de refração varia com a frequência. A constante de defasamento de uma onda plana uniforme nesse meio assumirá a forma

$$\beta(\omega) = k = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon(\omega)} = n(\omega)\frac{\omega}{c} \tag{80}$$

Se considerarmos $n(\omega)$ uma função que cresce monotonicamente com a frequência (o que geralmente é o caso), um gráfico de ω *versus* β de alguma maneira se pareceria com a curva mostrada na Figura 12.12. Tal gráfico é conhecido como *diagrama* ω-β para o meio. Pode-se aprender muito sobre como ondas se propagam em um material pela consideração do formato da curva ω-β.

Suponha que tenhamos duas ondas em duas frequências, ω_a e ω_b, propagando-se conjuntamente no material (e com amplitudes iguais). As duas frequências são identificadas na curva da Figura 12.12, juntamente com a frequência central em relação às duas, ω_0. As constantes de defasamento correspondentes, β_a, β_b e β_0 também são identificadas. Os campos elétricos das duas ondas estão polarizados linearmente na mesma direção (ao longo de x, por exemplo), enquanto ambas as ondas se propagam na direção progressiva de z. As duas ondas então interferirão uma na outra, produzindo uma onda resultante cuja expressão de campo pode ser encontrada simplesmente somando-se os campos **E** das duas ondas. Essa adição é feita utilizando-se os campos complexos:

$$E_{c,\text{resultante}}(z,t) = E_0[e^{-j\beta_a z}e^{j\omega_a t} + e^{-j\beta_b z}e^{j\omega_b t}]$$

Note que devemos usar as formas complexas completas (com a dependência da frequência incluída) diferentemente da forma fasorial, já que as ondas estão em frequências diferentes. Em seguida, colocamos em evidência o termo $e^{-j\beta_0 z}e^{j\omega_0 t}$:

$$E_{c,\text{resultante}}(z,t) = E_0 e^{-j\beta_0 z}e^{j\omega_0 t}[e^{j\Delta\beta z}e^{-j\Delta\omega t} + e^{-j\Delta\beta z}e^{j\Delta\omega t}]$$
$$= 2E_0 e^{-j\beta_0 z}e^{j\omega_0 t}\cos(\Delta\omega t - \Delta\beta z) \qquad (81)$$

onde

$$\Delta\omega = \omega_0 - \omega_a = \omega_b - \omega_0$$

e

$$\Delta\beta = \beta_0 - \beta_a = \beta_b - \beta_0$$

A expressão anterior para $\Delta\beta$ é aproximadamente verdadeira à medida em que $\Delta\omega$ for pequeno. Isso pode ser visto na Figura 12.12 observando-se como a forma da curva afeta β, considerando espaçamentos uniformes na frequência.

A forma instantânea real da Equação (81) é encontrada por

$$\mathcal{E}_{\text{resultante}}(z,t) = \text{Re}\{E_{c,\text{ resultante}}\} = 2E_0\cos(\Delta\omega t - \Delta\beta z)\cos(\omega_0 t - \beta_0 z) \quad (82)$$

Se $\Delta\omega$ é realmente pequeno comparado a ω_0, reconhecemos a Equação (82) como uma onda portadora na frequência ω_0 que está modulada senoidalmente na frequência $\Delta\omega$. As duas ondas originais estão "batendo" conjuntamente para formar uma modulação lenta; isso é o mesmo que acontece quando ouvimos a mesma nota tocada por dois instrumentos musicais ligeiramente fora do tom. A onda resultante é mostrada na Figura 12.13.

São interessantes para nós as velocidades de fase da onda portadora e da envoltória de modulação. Da Equação (82), podemos escrevê-las imediatamente como*:

$$v_{pc} = \frac{\omega_0}{\beta_0} \qquad \text{(velocidade da portadora)} \qquad (83)$$

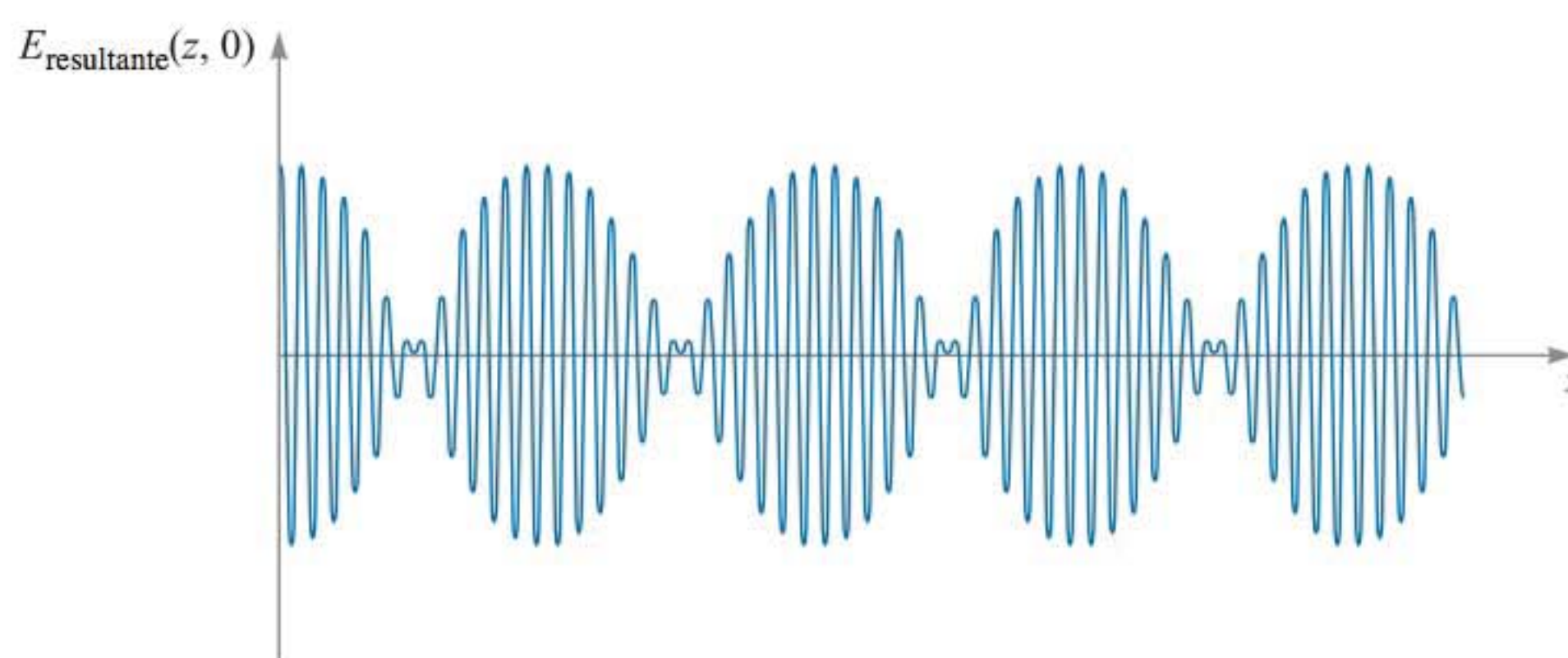



Figura 12.13 Gráfico da intensidade do campo elétrico total em função de z (com $t = 0$) de duas ondas que se propagam conjuntamente e têm frequências diferentes, ω_a e ω_b, conforme a Equação (81). As oscilações rápidas estão associadas com a frequência da portadora, $\omega_0 = (\omega_a + \omega_b)/2$. A modulação mais lenta está associada com a envoltória ou frequência de batimento em $\Delta\omega = (\omega_b - \omega_a)/2$.

* N. de T.: *pc* do termo inglês *phase carrier*.

$$v_{pe} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} \qquad \text{(velocidade do envelope)}^* \tag{84}$$

Em relação ao diagrama ω-β, na Figura 12.12, reconhecemos a velocidade de fase da portadora como a inclinação da linha reta que une a origem ao ponto na curva cujas coordenadas são ω_0 e β_0. Reconhecemos também a velocidade da envoltória como uma grandeza que se aproxima da inclinação da curva ω-β na posição de um ponto de operação especificado por (ω_0, β_0). Assim, a velocidade da envoltória nesse caso é um pouco menor que a velocidade da portadora. À medida que $\Delta\omega$ tende a zero, a velocidade da envoltória se torna exatamente a inclinação da curva em ω_0. Podemos, assim, afirmar o seguinte para nosso próximo exemplo:

$$\lim_{\Delta\omega \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} = \left.\frac{d\omega}{d\beta}\right|_{\omega_0} = v_g(\omega_0) \tag{85}$$

A grandeza $d\omega/d\beta$ é chamada de função *velocidade de grupo* para o material, $v_g(\omega)$**. Quando calculada em uma frequência específica ω_0, representa a velocidade de um grupo de frequências dentro de um pacote espectral de largura que tende a zero, centrado na frequência ω_0. Afirmando isso, estendemos nosso exemplo de duas frequências para incluir ondas que têm um espectro contínuo de frequências. Cada componente de frequência (ou pacote) está associado a uma velocidade de grupo na qual a energia naquele pacote se propaga. Uma vez que a inclinação da curva ω-β muda com a frequência, a velocidade de grupo obviamente será uma função da frequência. A *dispersão da velocidade de grupo* do meio é, em primeira aproximação, a taxa na qual a inclinação da curva ω-β muda com a frequência. Esse comportamento é de crucial importância prática para a propagação de ondas moduladas dentro de um meio com dispersão e para se entender o ponto até o qual a envoltória de modulação pode se degradar com a distância propagada.

EXEMPLO 12.10

Considere um meio no qual o índice de refração varia linearmente com a frequência em certa faixa:

$$n(\omega) = n_0 \frac{\omega}{\omega_0}$$

Determine a velocidade de grupo e a velocidade de fase de uma onda na frequência ω_0.

Solução. Primeiramente, a constante de defasamento será

$$\beta(\omega) = n(\omega)\frac{\omega}{c} = \frac{n_0\omega^2}{\omega_0 c}$$

Agora

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{2n_0\omega}{\omega_0 c}$$

* N. de T.: *pe* do termo inglês *phase envelope*.

** N. de T.: *g* do termo inglês *group*.

de forma que

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{\omega_0 c}{2n_0\omega}$$

A velocidade de grupo em ω_0 é

$$v_g(\omega_0) = \frac{c}{2n_0}$$

A velocidade de fase em ω_0 será

$$v_p(\omega_0) = \frac{\omega}{\beta(\omega_0)} = \frac{c}{n_0}$$

12.8 ALARGAMENTO DE PULSO EM MEIOS DISPERSIVOS

Para demonstrar como um meio dispersivo afeta uma onda modulada, vamos considerar a propagação de um pulso eletromagnético. Pulsos são utilizados em sinais digitais, onde a presença ou ausência de um pulso em um dado espaço de tempo correspondem a um "um" ou "zero" digital. O efeito do meio dispersivo em um pulso é alargá-lo no tempo. Para ver como isso acontece, consideramos o *espectro* do pulso, que é encontrado pela transformada de Fourier do pulso no domínio do tempo. Em particular, suponha que a forma do pulso no tempo seja uma Gaussiana, e que tenha campo elétrico dado na posição $z = 0$ por

$$E(0,t) = E_0 e^{-\frac{1}{2}(t/T)^2} e^{j\omega_0 t} \tag{86}$$

onde E_0 é uma constante, ω_0 é a frequência da portadora e T é a meia largura característica da envoltória do pulso. Esse tempo corresponde ao momento no qual a *intensidade* do pulso, ou a intensidade do vetor de Poynting, cai para $1/e$ do seu valor máximo (note que a intensidade é proporcional ao quadrado do campo elétrico). O espectro de frequências do pulso é a transformada de Fourier da Equação (86), que é

$$E(0,\omega) = \frac{E_0 T}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}T^2(\omega-\omega_0)^2} \tag{87}$$

Note que na Equação (87) o deslocamento de frequência em relação a ω_0, no qual a intensidade espectral (proporcional a $|E(0,\omega)|^2$) cai para $1/e$ do seu máximo, corresponde a $\Delta\omega = \omega - \omega_0 = 1/T$.

A Figura 12.14*a* mostra o espectro gaussiano de intensidade de um pulso, centrado em ω_0, onde as frequências correspondentes às posições de intensidade espectral de $1/e$, ω_a e ω_b são indicadas. A Figura 12.14*b* mostra as mesmas três frequências marcadas na curva ω-β para o meio. Três retas são desenhadas tangencialmente à curva nas três posições das frequências. As inclinações das retas indicam as velocidades de grupo em ω_a, ω_b e ω_0, indicadas como v_{ga}, v_{gb} e v_{g0}. Podemos pensar no alargamento de pulsos no tempo como resultante das diferenças nos tempos de propagação

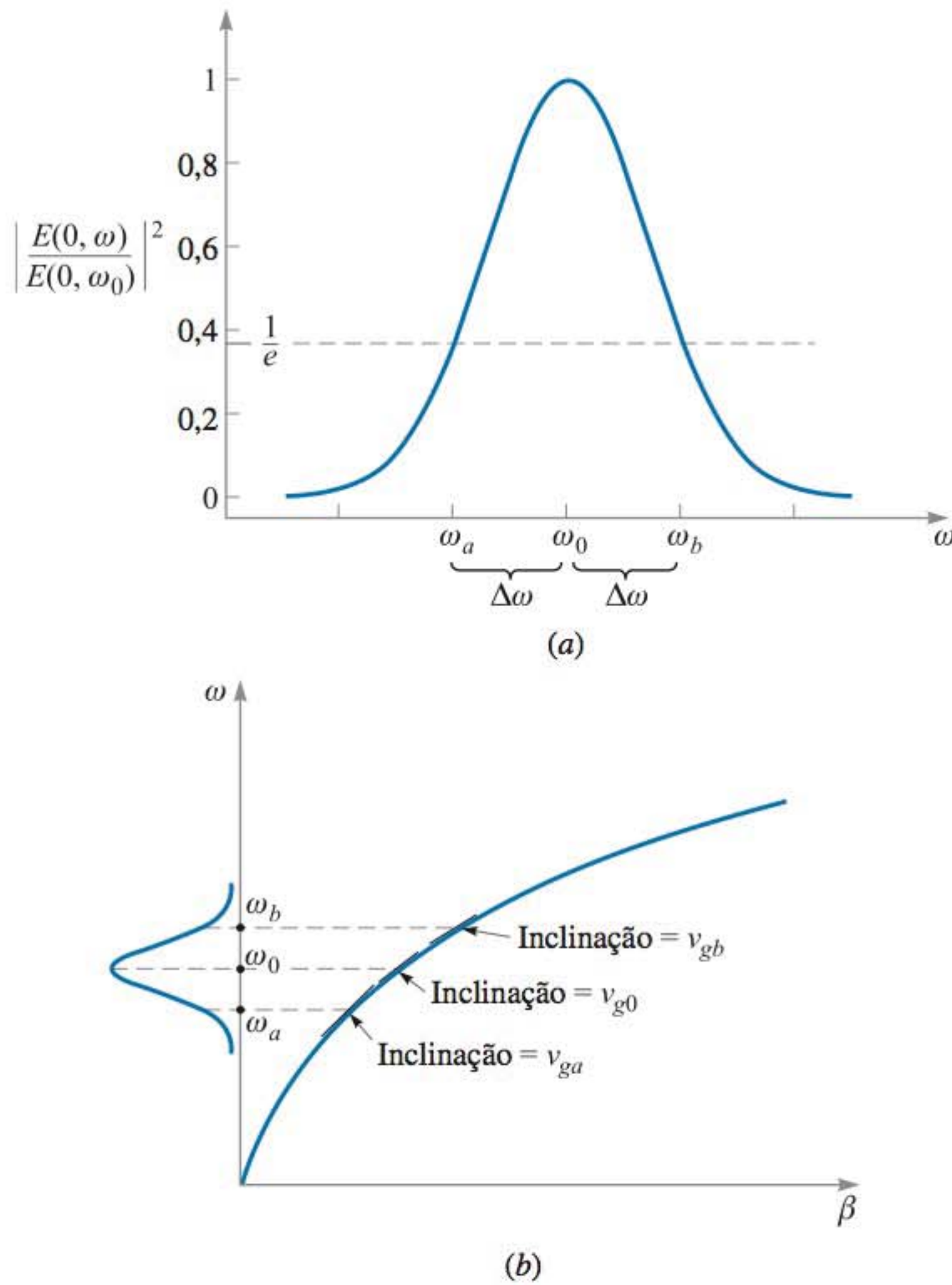



Figura 12.14 (*a*) Espectro de potência normalizado de um pulso Gaussiano, conforme determinado pela Equação (86). O espectro está centrado na frequência da portadora ω_0 e tem meia largura $1/e$, $\Delta\omega$. As frequências ω_a e ω_b correspondem às posições $1/e$ no espectro. (*b*) O espectro da Figura 12.14*a* é mostrado como um diagrama ω-β para o meio. As três frequências especificadas na Figura 12.14*a* são associadas com as três inclinações diferentes na curva, resultando em diferentes atrasos de grupo para os componentes espectrais.

dos pacotes espectrais de energia que formam o espectro do pulso. Uma vez que a energia espectral do pulso é mais alta na frequência central ω_0, podemos usar esse como ponto de referência em volta do qual o espalhamento adicional da energia ocorrerá. Como exemplo, vamos considerar a diferença nos tempos de chegada (atrasos de grupo) entre os componentes de frequência, ω_0 e ω_b, após se propagarem por uma distância z pelo meio:

$$\Delta\tau = z\left(\frac{1}{\nu_{gb}} - \frac{1}{\nu_{g0}}\right) = z\left(\left.\frac{d\beta}{d\omega}\right|_{\omega_b} - \left.\frac{d\beta}{d\omega}\right|_{\omega_0}\right) \tag{88}$$

O ponto essencial é o meio e a maneira como ele se comporta, pela qual ele pode ser chamado de *prisma temporal*. Em vez de dispersar o espectro de pacotes de energia no espaço, esse prisma dispersa-os no tempo. Nesse processo, uma nova envoltória

temporal dos pulsos é construída, cuja largura é fundamentalmente baseada no espalhamento dos atrasos de propagação dos diferentes componentes espectrais. Determinando-se a diferença dos atrasos entre o componente espectral de pico e o componente na meia largura espectral, construímos uma expressão para a nova meia largura *temporal*. Para isso devemos obviamente considerar a largura do pulso original como comparativamente desprezível; porém, se não for, podemos levá-la em conta também, conforme será mostrado mais adiante.

Para calcular a Equação (88), precisamos de mais informações sobre a curva ω-β. Se considerarmos que a curva é suave e possui curvatura suficientemente uniforme, podemos expressar $\beta(\omega)$ por meio dos três primeiros termos de uma expansão em série de Taylor centrada na frequência da portadora, ω_0:

$$\beta(\omega) \doteq \beta(\omega_0) + (\omega - \omega_0)\beta_1 + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2\beta_2 \tag{89}$$

onde

$$\beta_0 = \beta(\omega_0)$$

$$\beta_1 = \left.\frac{d\beta}{d\omega}\right|_{\omega_0} \tag{90}$$

e

$$\beta_2 = \left.\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right|_{\omega_0} \tag{91}$$

Note que se a curva ω-β fosse uma linha reta, então os dois primeiros termos na Equação (89) descreveriam $\beta(\omega)$ precisamente. É o terceiro termo na Equação (89), que envolve β_2, que descreve a curvatura e, no final das contas, a dispersão.

Notando-se que β_0, β_1 e β_2 são constantes, tomamos a primeira derivada de (89) com relação a ω para encontrar

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \beta_1 + (\omega - \omega_0)\beta_2 \tag{92}$$

Substituímos agora a Equação (92) em (88) para obter

$$\Delta\tau = [\beta_1 + (\omega_b - \omega_0)\beta_2]\,z - [\beta_1 + (\omega_0 - \omega_0)\beta_2]\,z = \Delta\omega\beta_2 z = \frac{\beta_2 z}{T} \tag{93}$$

onde $\Delta\omega = (\omega_b - \omega_0) = 1/T$. β_2, conforme definido na Equação (91), é o *parâmetro de dispersão*. Suas unidades são, em geral, tempo^2/distância, ou seja, a dispersão do pulso no tempo por unidade de largura de banda espectral por unidade de distância. Em fibras óticas, por exemplo, as unidades de modo geral utilizadas são picosegundos^2/quilômetro (ps^2/km). β_2 pode ser determinado quando sabemos como β varia com a frequência, ou pode ser medido.

Se a largura inicial do pulso é muito pequena comparada a $\Delta\tau$, então a largura do pulso alargado na posição z será simplesmente $\Delta\tau$. Se a largura inicial do pulso é

comparável a $\Delta\tau$, então a largura do pulso em z pode ser encontrada pela convolução da envoltória Gaussiana inicial do pulso de largura T com uma envoltória Gaussiana, cuja largura é $\Delta\tau$. Assim, concluímos que a largura do pulso na posição z será

$$T' = \sqrt{T^2 + (\Delta\tau)^2} \tag{94}$$

EXEMPLO 12.11

Uma ligação com fibra ótica é conhecida por ter dispersão $\beta_2 = 20\ \text{ps}^2/\text{km}$. Um pulso Gaussiano de luz na entrada da fibra tem largura inicial $T = 10$ ps. Determine a largura do pulso na saída da fibra se o comprimento da mesma for de 15 km.

Solução. A dispersão do pulso será de

$$\Delta\tau = \frac{\beta_2 z}{T} = \frac{(20)(15)}{10} = 30\ \text{ps}$$

Então, a largura do pulso na saída é

$$T' = \sqrt{(10)^2 + (30)^2} = 32\ \text{ps}$$

Notamos um subproduto interessante do alargamento de pulsos por dispersão cromática quando verificamos que o pulso alargado é *trinado*. Isso significa que a frequência instantânea do pulso varia monotonicamente (aumentando ou diminuindo) com o tempo ao longo da envoltória do pulso. Isso, novamente, é apenas uma manifestação do mecanismo de alargamento, no qual os componentes espectrais em frequências diferentes são espalhados no tempo na medida em que viajam em diferentes velocidades de grupo. Podemos quantificar o efeito calculando o atraso de grupo, τ_g, em função da frequência, usando a Equação (92). Obtemos:

$$\tau_g = \frac{z}{v_g} = z\frac{d\beta}{d\omega} = (\beta_1 + (\omega - \omega_0)\beta_2)\, z \tag{95}$$

Essa equação nos diz que o atraso de grupo será uma função linear da frequência e que frequências mais altas chegarão mais atrasadas se β_2 for positivo. Referimo-nos ao trinado como positivo se as frequências mais baixas estiverem à frente das frequências mais altas no tempo [o que requer um β_2 positivo na Equação (95)]. O trinado é negativo se as frequências mais altas estiverem à frente no tempo (β_2 negativo). A Figura 12.15 mostra o efeito de alargamento e ilustra o fenômeno de trinado.

EP12.6. Considere a ligação em fibra do Exemplo 12.11, mas agora um pulso de 20 ps é colocado na entrada em vez do pulso de 10 ps do exemplo. Determine a largura do pulso na saída.

Resp. 25 ps

Como um aspecto final, notamos que a largura de banda do pulso, $\Delta\omega$, foi encontrada como $1/T$. Isso é verdadeiro desde que a transformada de Fourier da *envoltória* do pulso seja tomada, conforme feito com a Equação (86) para se obter a Equação (87).

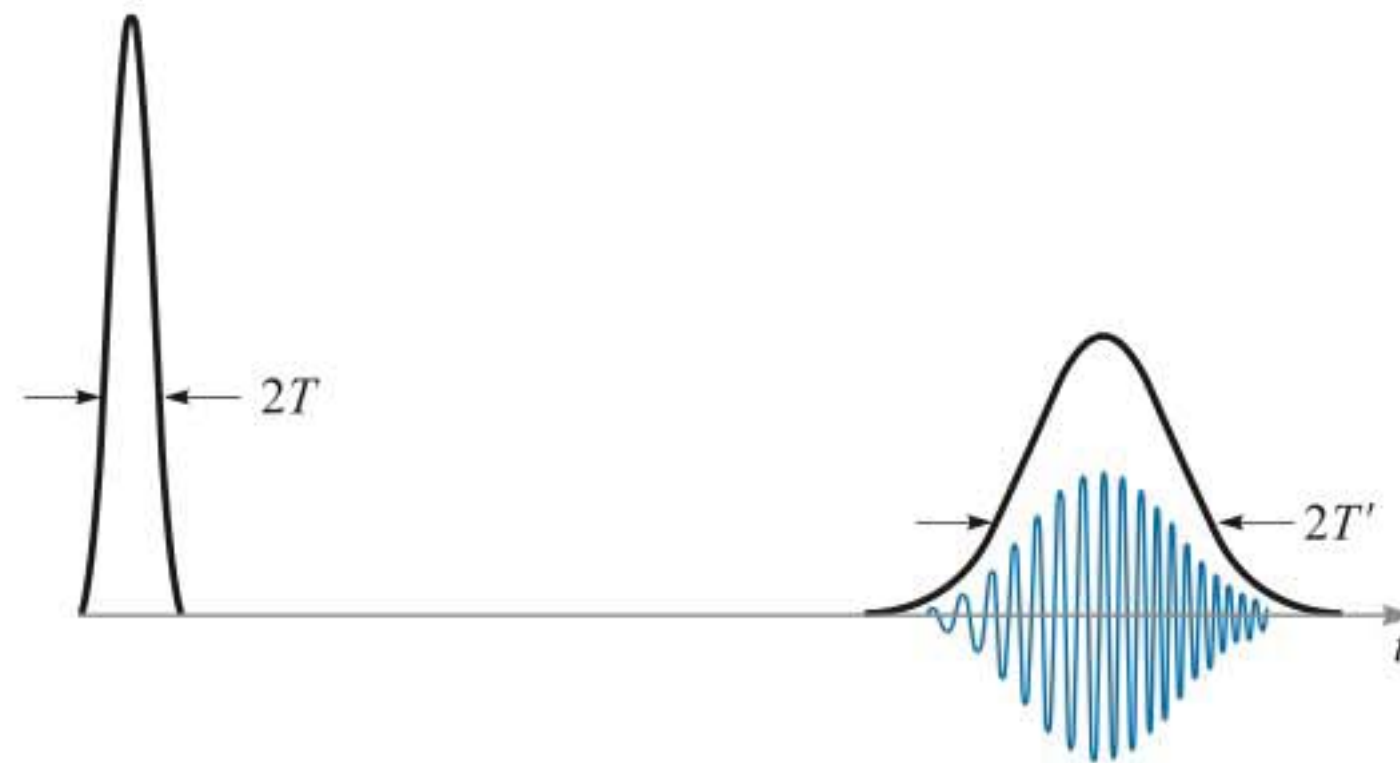



Figura 12.15 Intensidades de pulsos Gaussianos em função do tempo (curvas suaves) antes e depois da propagação em um meio dispersivo, como exemplificado pelo diagrama ω-β da Figura 12.14*b*. As oscilações do campo elétrico são mostradas debaixo do segundo traço para demonstrar o efeito trinado à medida que o pulso se espalha. Note a amplitude reduzida do pulso espalhado, que ocorre porque a energia do pulso (a área debaixo de envoltória de intensidade) é constante.

Nesse caso, E_0 foi tomado como uma constante e, então, a única variação com o tempo surgiu da onda portadora e da envoltória Gaussiana. Um pulso como este, cujo espectro de frequências é obtido apenas da envoltória do pulso, é conhecido como limitado pela transformada*. Contudo, é possível que uma largura de banda de frequências adicional esteja presente desde que E_0 possa variar no tempo por uma razão ou outra (tal como o ruído de fase que possivelmente estaria presente na portadora). Nesses casos, o alargamento de pulso é encontrado pela expressão mais geral

$$\Delta\tau = \Delta\omega\beta_2 z \tag{96}$$

onde $\Delta\omega$ é a largura de banda espectral equivalente criada por todas as fontes. Claramente, são preferidos os pulsos limitados pela transformada para minimizar o alargamento, porque eles terão a menor largura espectral para uma dada largura de pulso.

REFERÊNCIAS

1. DuBroff, R. E. S., S. V. Marshall, and G. G.Skitek. *Electromagnetic Concepts and Applications*. 4. ed. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1996. O Capítulo 9 desse livro desenvolve os conceitos aqui apresentados, com exemplos e aplicações adicionais.
2. Iskander, M. F. *Electromagnetic Fields and Waves*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1992. O tratamento para interfaces múltiplas no Capítulo 5 desse livro é particularmente bom.
3. Harrington, R. F. *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*. New York: McGraw-Hill, 1961. Esse texto avançado proporciona uma boa visão geral dos conceitos de reflexão de ondas no Capítulo 2.
4. Marcuse, D. *Light Transmission Optics*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1982. Esse texto de nível intermediário proporciona uma abordagem detalhada de guias de onda óticos e propagação de pulsos em meios dispersivos.

* N. de T.: Do inglês, *transform-limited.*

Quizzes

PROBLEMAS

12.1 Uma onda plana uniforme no ar, $E_{x1}^{+} = E_{x10}^{+} \cos(10^{10}t - \beta z)$ V/m, incide normalmente em uma superfície de cobre em $z = 0$. Qual é a porcentagem da densidade da potência incidente transmitida para dentro do cobre?

12.2 O plano $z = 0$ define a fronteira entre dois dielétricos. Para $z < 0$, $\epsilon_{r1} = 9$, $\epsilon_{r1}'' = 0$ e $\mu_1 = \mu_0$. Para $z > 0$, $\epsilon_{r2}' = 3$, $\epsilon_{r2}'' = 0$ e $\mu_2 = \mu_0$. Considere $E_{x1}^{+} = 10\cos(\omega t - 15z)$ V/m e calcule (*a*) ω; (*b*) $\langle \mathbf{S}_1^{+} \rangle$; (*c*) $\langle \mathbf{S}_1^{-} \rangle$; (*d*) $\langle \mathbf{S}_2^{+} \rangle$.

12.3 Uma onda plana uniforme na região 1 incide normalmente em uma fronteira plana que separa as regiões 1 e 2. Se $\epsilon_1'' = \epsilon_2''$, enquanto $\epsilon_{r1}' = \mu_{r1}^3$ e $\epsilon_{r2}' = \mu_{r2}^3$, calcule a razão $\epsilon_{r2}'/\epsilon_{r1}'$ se 20% da energia da onda incidente for refletida na fronteira. Existem duas respostas possíveis.

12.4 Uma onda plana uniforme de 10 MHz que possui uma densidade média de potência inicial de 5 W/m^2 incide normalmente a partir do espaço livre em uma superfície de um material com perdas no qual $\epsilon_2''/\epsilon_2' = 0{,}05$, $\epsilon_{r2}' = 5$, e $\mu_2 = \mu_0$. Calcule a distância no meio com perdas cuja densidade de potência da onda transmitida cai de 10 dB em relação aos 5 W/m^2 iniciais.

12.5 A região $z < 0$ é caracterizada por $\epsilon_r' = \mu_r = 1$ e $\epsilon_r'' = 0$. O campo **E** total nesta região é dado como a soma de duas ondas planas uniformes, $\mathbf{E}_s = 150e^{-j10z}\mathbf{a}_x + (50\angle 20°)e^{j10z}\mathbf{a}x$ V/m. (*a*) Qual é a frequência de operação? (*b*) Especifique a impedância intrínseca da região $z > 0$ que proporcionaria a onda refletida correta. (*c*) Em que valor de z, -10 cm $< z < 0$, a intensidade do campo elétrico total tem a amplitude máxima?

12.6 No prisma do Exemplo 12.8 suponha que os revestimentos antirrefletivos sejam removidos, deixando interfaces vidro-ar. Calcule a razão entre as potências de saída e de entrada do prisma, considerando um único trânsito.

12.7 As regiões semi-infinitas $z < 0$ e $z > 1$ m estão no espaço livre. Para $0 < z < 1$ m, $\epsilon_r' = 4$, $\mu_r = 1$ e $\epsilon_r'' = 0$. Uma onda plana uniforme com $\omega = 4 \times 10^8$ rad/s está viajando na direção $\mathbf{a}_z$ em direção à interface em $z = 0$. (*a*) Encontre a taxa de onda estacionária em cada uma das três regiões. (*b*) Encontre a localização do $|\mathbf{E}|$ máximo para $z < 0$ que está mais próximo de $z = 0$.

12.8 Uma onda começa no ponto *a*, propaga-se 1 m por um dielétrico com perdas, especificadas em 0,1 dB/m, reflete com incidência normal em uma fronteira na qual $\Gamma = 0{,}3 + j0{,}4$, e então retorna ao ponto *a*. Calcule a razão entre a potência final e a potência incidente após essa ida e volta, e especifique as perdas totais em decibéis.

12.9 A região 1, $z < 0$, e a região 2, $z > 0$, são ambas dielétricos perfeitos ($\mu = \mu_0$, $\epsilon'' = 0$). Uma onda plana uniforme viajando na direção $\mathbf{a}_z$ tem uma frequência angular de 3×10^{10} rad/s. Seus comprimentos de onda nas duas regiões são $\lambda_1 = 5$ cm e $\lambda_2 = 3$ cm. Qual porcentagem da energia incidente na fronteira é: (*a*) refletida; (*b*) transmitida? (*c*) Qual é a taxa de onda estacionária na região 1?

12.10 Na Figura 12.1, seja a região 2 o espaço livre, enquanto $\mu_{r1} = 1$, $\epsilon''_{r1} = 0$ e ϵ'_{r1} é desconhecido. Calcule ϵ'_{r1} se: (*a*) a amplitude de $\mathbf{E}_1^-$ é metade daquela de $\mathbf{E}_1^+$; (*b*) $\langle \mathbf{S}_1^- \rangle$ é metade de $\langle \mathbf{S}_1^+ \rangle$; (*c*) $|\mathbf{E}_1|_{\text{min}}$ é metade de $|\mathbf{E}_1|_{\text{max}}$.

12.11 Uma onda plana uniforme de 150 MHz incide normalmente a partir do ar em um material cuja impedância intrínseca é desconhecida. Medições mostram uma taxa de onda estacionária de 3 e o aparecimento de um mínimo de campo elétrico a 0,3 comprimento de onda à frente da interface. Determine a impedância desconhecida do material.

12.12 Uma onda plana uniforme de 50 MHz incide normalmente a partir do ar na superfície de um oceano calmo. Para a água do mar, $\sigma = 4$ S/m, e $\epsilon'_r = 78$. (*a*) Determine as frações da potência incidente, tanto a refletida quanto a transmitida. (*b*) Qualitativamente, como essas respostas mudarão (se é que vão) com o aumento da frequência?

12.13 Uma onda plana com polarização circular à direita incide normalmente a partir do ar em uma lâmina semi-infinita de plexiglas ($\epsilon'_r = 3{,}45$, $\epsilon''_r = 0$). Calcule as frações da potência incidente, tanto a refletida quanto a transmitida. Além disso, descreva a polarização das ondas refletida e transmitida.

12.14 Uma onda plana polarizada circularmente à esquerda incide normalmente em uma superfície de um condutor perfeito. (*a*) Construa a sobreposição das ondas incidente e refletida na forma fasorial. (*b*) Determine a forma instantânea real do resultado da parte (*a*). (*c*) Descreva a onda que é formada.

12.15 Hexafluoreto de enxofre (SF_6) é um gás de alta densidade que possui índice de refração $n_s = 1{,}8$ em pressão, temperatura e comprimento de onda específicos. Considere o prisma de retrorreflexão mostrado na Figura 12.16, que está imerso em SF_6. A luz entra através de uma camada antirrefletiva de um quarto de onda e então reflete totalmente de volta da superfície de trás do vidro. A princípio, o feixe deveria experimentar perda nula no comprimento de onda projetado ($P_{\text{saída}} = P_{\text{entrada}}$). (*a*) Determine o valor mínimo requerido do índice de refração do vidro, n_g, para o qual o feixe interior refletirá totalmente. (*b*) Conhecendo n_g, encontre o índice de refração do filme de quarto de onda, n_f. (*c*) Com o gás SF_6 evacuado da câmera e com os valores do vidro e do filme encontrados anteriormente, determine a razão $P_{\text{saída}}/P_{\text{entrada}}$. Considere uma falta de alinhamento muito leve, de maneira que o longo caminho do feixe através do prisma não seja distorcido pelas ondas refletidas.

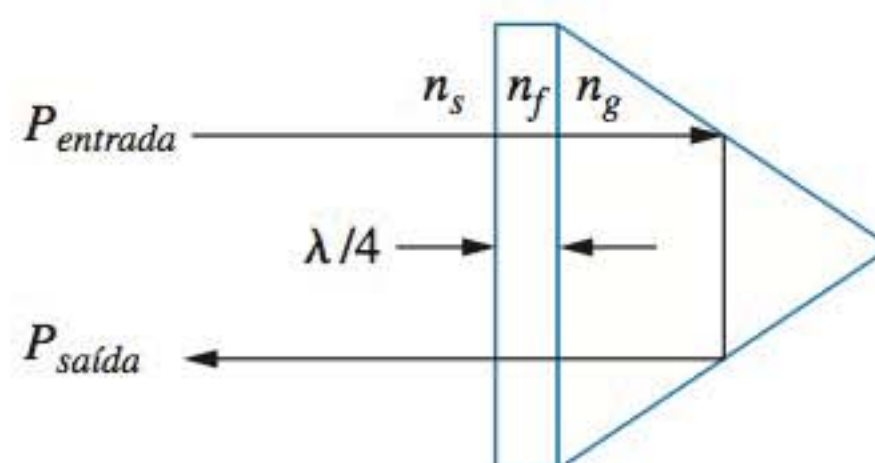



Figura 12.16 Ver Problema 12.15.

12.16 Na Figura 12.5, sejam as regiões 2 e 3 com larguras iguais a um quarto de onda. A região 4 é vidro, e seu coeficiente de refração é $n_4 = 1{,}45$. A região 1 é o ar. (*a*) Encontre $\eta_{\text{entrada}, b}$. (*b*) Encontre $\eta_{\text{entrada}, a}$. (*c*) Especifique uma relação entre as quatro impedâncias intrínsecas que permitirão transmissão total das ondas incidentes da esquerda para a região 4. (*d*) Especifique valores dos índices de refração para as regiões 2 e 3 que garantirão a condição da parte (*c*). (*e*) Determine a fração da potência incidente transmitida, se as duas camadas possuírem espessura de meia-onda em vez de espessura de um quarto de onda.

12.17 Uma onda plana uniforme no espaço livre incide normalmente em uma placa de dielétrico denso de espessura $\lambda/4$, com índice de refração n. Determine o valor requerido para n com o qual exatamente metade da potência incidente é refletida (e metade transmitida). Lembre-se que $n > 1$.

12.18 Uma onda plana uniforme incide normalmente em uma lâmina de vidro ($n = 1{,}45$) cuja superfície de trás está em contato com um condutor perfeito. Determine, na superfície da frente do vidro, o defasamento devido à reflexão se a espessura do vidro vale (*a*) $\lambda/2$; (*b*) $\lambda/4$; (*c*) $\lambda/8$.

12.19 São dadas a você quatro lâminas de dielétrico sem perdas, todas com as mesmas impedâncias intrínsecas, η, mas diferentes daquela impedância do espaço livre. A espessura de cada lâmina é $\lambda/4$, onde λ é o comprimento de onda medido no material da lâmina. As lâminas devem ser posicionadas paralelamente uma em relação à outra, sendo que a combinação está no caminho de uma onda plana uniforme, que incide normalmente. As lâminas devem ser arranjadas de forma que os espaços de ar entre elas tenham espessura igual a zero, um quarto de comprimento de onda ou um meio de comprimento de onda. Especifique um arranjo de lâminas e espaçamentos de ar de forma que (*a*) a onda seja totalmente transmitida pelo conjunto e (*b*) o conjunto apresente a maior refletância para a onda incidente. Várias respostas podem existir.

12.20 A onda plana de 50 MHz do Problema 12.12 incide na superfície do oceano fazendo um ângulo de 60° com a normal. Determine as frações da potência incidente, que são a refletida e a transmitida, para (*a*) polarização *s* e (*b*) polarização *p*.

12.21 Uma onda plana circularmente polarizada à direita no ar incide com o ângulo de Brewster em uma lâmina semi-infinita de plexiglas ($\epsilon'_r = 3{,}45$, $\epsilon''_r = 0$). (*a*) Determine as frações da onda incidente, tanto a refletida quanto a transmitida. (*b*) Descreva a polarização das ondas refletida e transmitida.

12.22 Um guia de onda dielétrico é mostrado na Figura 12.17 com índices de refração conforme indicados. Uma luz incidente entra no guia segundo um ângulo ϕ em relação à normal à superfície da frente, conforme mostrado. Já dentro, a luz reflete totalmente na interface superior $n_1 - n_2$, onde $n_1 > n_2$. Todas as reflexões subsequentes nas fronteiras superior e inferior também serão totais, de forma que a luz fica confinada dentro do guia. Expresse, utilizando n_1 e n_2, o valor máximo de ϕ para que o confinamento ocorra,

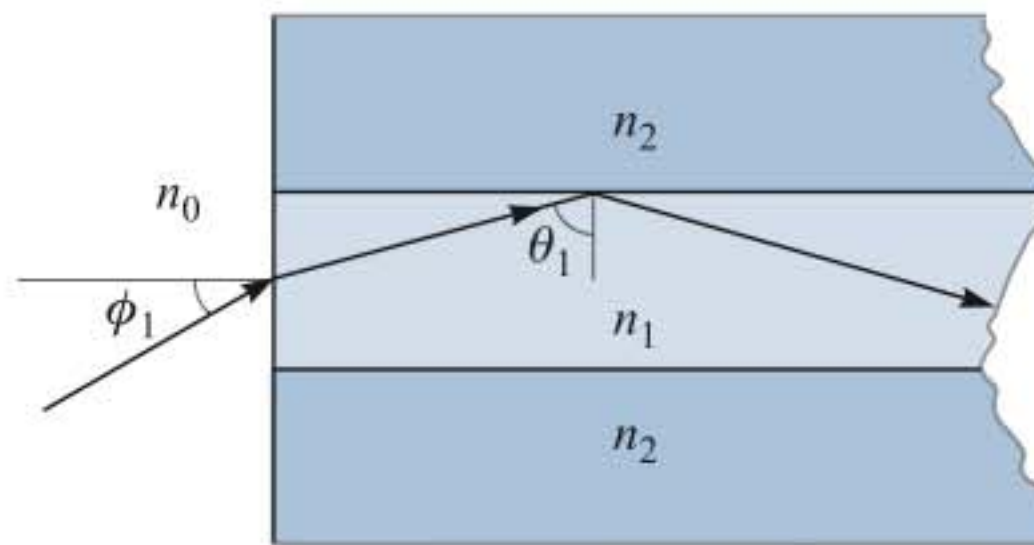



Figura 12.17 Ver Problemas 12.22 e 12.23.

considerando $n_0 = 1$. A grandeza sen ϕ é conhecida como a *abertura numérica* do guia.

12.23 Suponha que ϕ na Figura 12.17 seja o ângulo de Brewster, e que θ_1 seja o ângulo crítico. Encontre n_0 expressando-o em termos de n_1 e n_2.

12.24 Um *prisma de Brewster* é projetado para que deixe passar luz com polarização p sem nenhuma perda por reflexão. O prisma da Figura 12.18 é feito de vidro ($n = 1{,}45$) e está no ar. Considerando o caminho da luz mostrado, determine o ângulo α do vértice superior.

12.25 No prisma de Brewster da Figura 12.18, determine, para a luz com polarização s, a fração da potência incidente que é transmitida pelo prisma, e desta especifique a *perda de inserção* em dB, definida como 10 $\log_{10}$ daquele número.

12.26 Mostre como um bloco único de vidro pode ser utilizado para girar de 180° um feixe de luz com polarização p, sem que a luz sofra (em princípio) perdas por reflexão. A luz é incidente a partir do ar, e o feixe de retorno (também no ar) pode estar deslocado para o lado em relação ao feixe incidente. Especifique todos os ângulos pertinentes e use $n = 1{,}45$ para o vidro. Mais de um desenho pode ser necessário neste problema.

12.27 Utilizando a Equação (79) do Capítulo 11 como um ponto de partida, determine a razão entre as velocidades de grupo e de fase de uma onda eletromagnética em um bom condutor. Considere que a condutividade não varia com a frequência.

12.28 Para uma pequena faixa de comprimento de onda, o índice de refração de certo material varia aproximadamente de forma linear com o comprimento de onda de forma $n(\lambda) \doteq n_a + n_b(\lambda - \lambda_a)$, onde n_a, n_b e λ_a são constantes, e onde λ é o comprimento de onda no espaço livre. (*a*) Mostre que $d/d\omega = -(2\pi c/\omega^2)d/d\lambda$. (*b*) Usando $\beta(\lambda) = 2\pi n/\lambda$, determine a dependência (ou

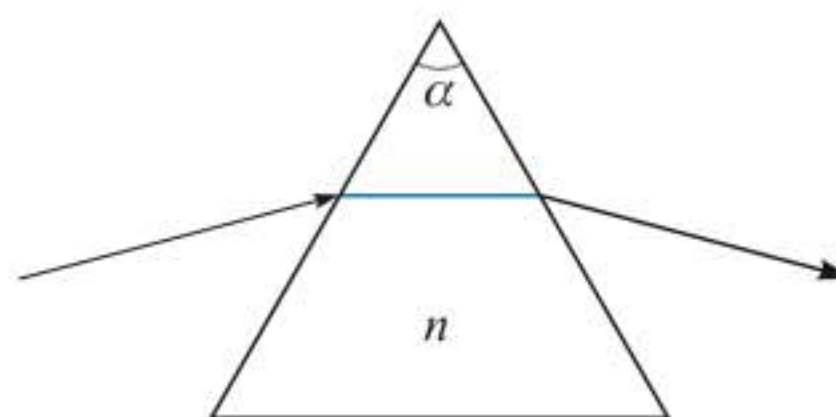



Figura 12.18 Ver Problemas 12.24 e 12.25.

independência) do atraso de grupo em relação ao comprimento de onda em uma unidade de distância. (*c*) Determine β_2 pelo seu resultado da parte (*b*). (*d*) Discuta as implicações desse resultado, caso existam, no alargamento do pulso.

12.29 Um pulso limitado por uma transformada com $T = 5$ ps se propaga em um meio dispersivo para o qual $\beta_2 = 10$ ps^2/km. Qual é a distância necessária para que o pulso cresça para o dobro da sua largura inicial?

12.30 Um pulso limitado por transformada com $T = 20$ ps se propaga por 10 km por um meio dispersivo para o qual $\beta_2 = 12$ ps^2/km. O pulso então se propaga por um segundo meio de 10 km para o qual $\beta_2 = -12$ ps^2/km. Descreva o pulso na saída do segundo meio e forneça uma explicação física para o que aconteceu.

13

Ondas Guiadas

Neste capítulo, investigaremos várias estruturas para guiar ondas eletromagnéticas e exploraremos os princípios pelos quais elas operam. Incluídas aí estão as linhas de transmissão, que primeiramente exploramos sob o ponto de vista de suas correntes e tensões no Capítulo 10, e que agora vamos rever sob a perspectiva dos campos. Assim ampliaremos a discussão para incluir diversos dispositivos que guiam ondas. Em definição ampla, um guia de onda é uma estrutura através da qual ondas eletromagnéticas podem ser transmitidas de um ponto a outro e dentro da qual os campos estão confinados até certo ponto. Uma linha de transmissão se encaixa nessa definição, mas é um caso especial que emprega dois condutores, além de propagar uma configuração de campo puramente TEM (Transverse Electro Magnetic). Os guias de onda em geral partem dessas restrições e podem empregar qualquer quantidade de condutores e dielétricos – ou, como veremos, apenas dielétricos sem condutores.

O capítulo começa com uma apresentação de diversas estruturas de linhas de transmissão, com ênfase na obtenção de expressões para as constantes primárias L, C, G e R para regimes de operação com frequências altas e baixas. Em seguida, começamos nosso estudo sobre guias de onda com uma ampla visão de dispositivos de guia de onda para obter um entendimento físico de como eles trabalham e sob quais condições são utilizados. Exploraremos então a estrutura de placas paralelas simples e distinguiremos sua operação como uma linha de transmissão de sua operação como um guia de onda. Nesse dispositivo o conceito de modos de guias de onda é desenvolvido, assim como as condições sob as quais eles ocorrerão. Estudaremos as configurações dos campos elétrico e magnético de modos guiados utilizando modelos simples de ondas planas e a equação de onda, e depois, estruturas mais complicadas, incluindo guias de onda retangulares, guias dielétricos laminados e fibras óticas. ■

13.1 CAMPOS E CONSTANTES PRIMÁRIAS DAS LINHAS DE TRANSMISSÃO

Começaremos estabelecendo a equivalência entre as operações das linhas de transmissão considerando a tensão e corrente, sob o ponto de vista dos campos dentro da linha. Considere, por exemplo, a linha de placas paralelas mostrada na Figura 13.1. Nessa linha, consideramos que a separação entre as placas, d, é muito menor que a largura da linha, b (para dentro da página), de forma que os campos elétrico e magnético podem ser considerados uniformes em qualquer plano transversal. Uma propagação sem perdas também é considerada. A Figura 13.1 mostra a visão lateral, a qual inclui o eixo de propagação z. Os campos, juntamente com a tensão e a corrente, são mostrados em um determinado instante de tempo.

A tensão e a corrente nas formas fasoriais são:

$$V_s(z) = V_0 e^{-j\beta z} \tag{1a}$$

$$I_s(z) = \frac{V_0}{Z_0} e^{-j\beta z} \tag{1b}$$

onde $Z_0 = \sqrt{L/C}$. O campo elétrico em um dado plano transversal na posição z é aquele do capacitor de placas paralelas:

$$E_{sx}(z) = \frac{V_s}{d} = \frac{V_0}{d} e^{-j\beta z} \tag{2a}$$

O campo magnético é igual à densidade superficial de corrente, considerada uniforme em cada placa [Equação (12), Capítulo 7]:

$$H_{sy}(z) = K_{sz} = \frac{I_s}{b} = \frac{V_0}{bZ_0} e^{-j\beta z} \tag{2b}$$

Os dois campos, ambos uniformes, ortogonais e pertencentes ao plano transversal, são idênticos em forma àqueles de uma onda plana uniforme. Como tais, são campos eletromagnéticos transversos (TEM), também conhecidos simplesmente como campo de linhas de transmissão. Eles diferem dos campos da onda plana uniforme apenas pelo fato de existirem no interior da linha e em nenhum outro lugar.

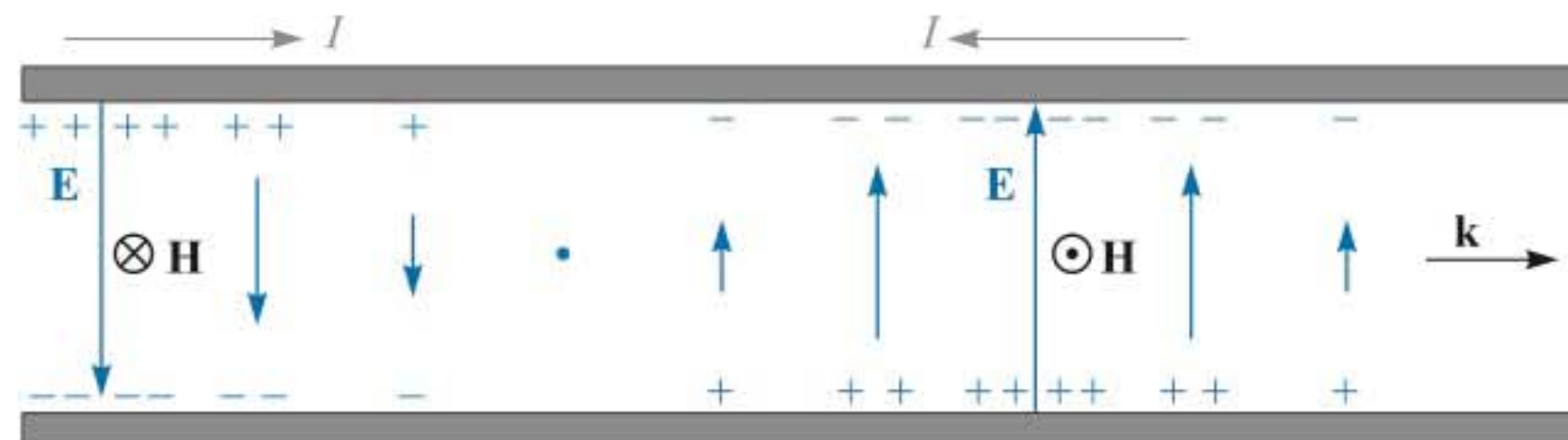



Figura 13.1 Uma onda de linha de transmissão representada pelas distribuições de tensão e de corrente ao longo do comprimento está associada aos campos elétrico e magnético transversos, formando uma onda TEM.

O fluxo de potência ao longo da linha é encontrado pelo vetor de Poynting médio no tempo, integrado na seção reta da linha. Usando as Equações (2*a*) e (2*b*), encontramos:

$$P_z = \int_0^b \int_0^d \frac{1}{2}\text{Re}\{E_{xs}H_{ys}^*\}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\frac{V_0}{d}\frac{V_0^*}{bZ_0^*}(bd) = \frac{|V_0|^2}{2Z_0^*} = \frac{1}{2}\text{Re}\{V_s I_s^*\} \quad (3)$$

De um ponto de vista prático, a potência transmitida pela linha é uma das grandezas mais importantes que desejamos conhecer. A Equação (3) mostra que ela pode ser obtida de forma consistente por meio dos campos da linha, ou pela tensão e pela corrente. Como era esperado, essa consistência é mantida quando perdas são incluídas. A abordagem por campos na verdade é vantajosa, e geralmente é a preferida, já que incorpora facilmente mecanismos de perdas dielétricas (outros que não a condutividade) em adição às propriedades de dispersão do dielétrico. Os campos da linha de transmissão são também necessários para produzir as constantes primárias, conforme demonstramos agora para a linha de placas paralelas e outras geometrias selecionadas de linhas.

Consideramos que a linha está preenchida com um dielétrico que possui permissividade ϵ', condutividade σ e permeabilidade μ, geralmente μ_0 (Figura 13.2). A espessura das placas superior e inferior é t, a qual juntamente com a largura b da placa e sua condutividade σ_c é utilizada para calcular o parâmetro de resistência por unidade de comprimento R sob condições de baixas frequências. Consideraremos, contudo, a operação em alta frequência, na qual o efeito pelicular causa uma espessura efetiva para a placa ou profundidade de penetração δ, muito menor que t.

Primeiramente, a capacitância e a condutância por unidade de comprimento são simplesmente as mesmas da estrutura de placas paralelas, considerando-se campos estáticos. Utilizando a Equação (27) do Capítulo 6, encontramos

$$C = \frac{\epsilon' b}{d} \quad (4)$$

O valor de permissividade utilizado deve ser apropriado para a faixa de frequências de operação considerada.

A condutância por unidade de comprimento pode ser determinada facilmente a partir da expressão da capacitância pela utilização da relação simples que existe entre a capacitância e a resistência [Equação (45), Capítulo 6]:

$$G = \frac{\sigma}{\epsilon'}C = \frac{\sigma b}{d} \quad (5)$$

O cálculo de L e R envolve as considerações de um efeito pelicular bem desenvolvido, de forma que $\delta \ll t$. Consequentemente, a indutância é basicamente externa,

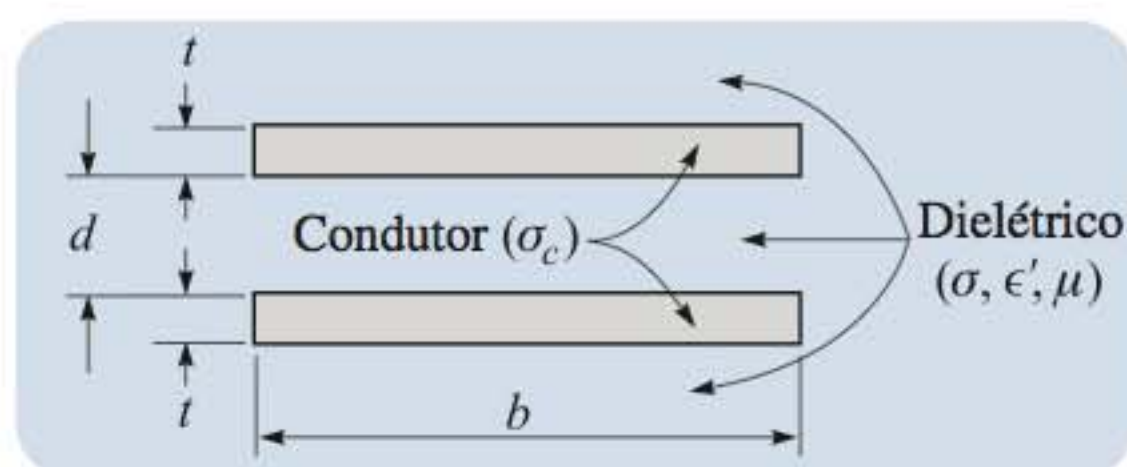



Figura 13.2 A geometria da linha de transmissão de placas paralelas.

porque o fluxo magnético dentro de cada condutor é desprezível comparado àquele entre os condutores. Logo,

$$L \doteq L_{\text{externo}} = \frac{\mu d}{b} \tag{6}$$

Note que $L_{\text{externo}}C = \mu\epsilon' = 1/v_p^2$, e assim somos capazes de calcular a indutância externa para qualquer linha de transmissão cuja capacitância e características do isolante sejam conhecidas.

O último dos quatro parâmetros que precisamos é a resistência por unidade de comprimento R. Se a frequência for muito alta e a profundidade de penetração δ muito pequena, então obtemos uma expressão apropriada para R distribuindo uniformemente a corrente total por uma profundidade δ. Considerando o efeito pelicular (devido aos dois condutores em série, por unidade de comprimento), a resistência é

$$R = \frac{2}{\sigma_c \delta b} \tag{7}$$

Finalmente, é conveniente incluir aqui, juntamente com as fórmulas para os parâmetros, a expressão comum para a impedância característica da linha:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_{\text{externo}}}{C}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}}\frac{d}{b} \tag{8}$$

Se necessário, um valor mais exato pode ser obtido da Equação (47), Capítulo 10. Note que quando substituirmos a Equação (8) na Equação (2*b*), e utilizarmos a Equação (2*a*), obteremos a relação esperada para a onda TEM, $E_{xs} = \eta H_{ys}$, onde $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon'}$.

EP13.1. Os parâmetros para a linha de transmissão plana mostrada na Figura 13.2 são $b = 6$ mm, $d = 0{,}25$ mm, $t = 25$ mm, $\sigma_c = 5{,}5 \times 10^7$ S/m, $\epsilon' = 25$ pF/m, $\mu = \mu_0$ e $\sigma/\omega\epsilon' = 0{,}03$. Se a frequência de operação é 750 MHz, calcule: (*a*) α; (*b*) β; (*c*) Z_0.

Resp. 0,47 Np/m; 26 rad/m; $9{,}3\angle 0{,}7^\circ\ \Omega$

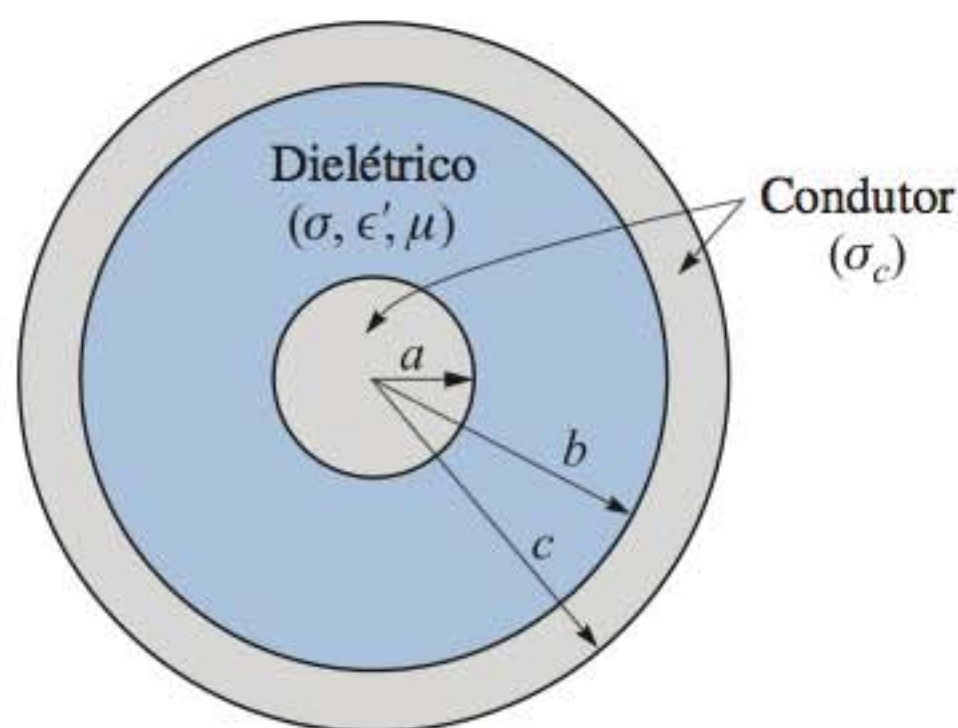



Figura 13.3 Geometria de linha de transmissão coaxial.

13.1.1 Coaxial (frequências altas)

Consideramos em seguida um cabo coaxial no qual o dielétrico possui um raio interno a e raio externo b (Figura 13.3). A capacitância por unidade de comprimento, obtida conforme a Equação (5) da Seção 6.3 é

$$C = \frac{2\pi\epsilon'}{\ln(b/a)} \tag{9}$$

Novamente, utilizando a relação $RC = \epsilon/\sigma$ (Ver Problema 6.6), a condutância é

$$G = \frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)} \tag{10}$$

onde σ é a condutividade do dielétrico entre os condutores na frequência de operação.

A indutância por unidade de comprimento foi calculada para o cabo coaxial como na Equação (50) da Seção 8.10,

$$L_{\text{externo}} = \frac{\mu}{2\pi}\ln(b/a) \tag{11}$$

Novamente, essa é uma indutância externa, pois a pequena profundidade de penetração impede qualquer fluxo magnético apreciável dentro dos condutores.

Para um condutor circular de raio a e condutividade σ_c, aplicamos a Equação (90) da Seção 11.4 a um comprimento unitário, obtendo

$$R_{\text{interno}} = \frac{1}{2\pi a\delta\sigma_c}$$

Existe também uma resistência para o condutor externo, que possui um raio interno b. Consideramos a mesma condutividade σ_c e o mesmo valor para a profundidade de penetração δ, o que leva a

$$R_{\text{externo}} = \frac{1}{2\pi b\delta\sigma_c}$$

Uma vez que a corrente na linha circula por essas duas resistências em série, a resistência total é a soma:

$$R = \frac{1}{2\pi\delta\sigma_c}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \tag{12}$$

Finalmente, a impedância característica, considerando baixas perdas, é

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_{\text{externo}}}{C}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}}\ln\frac{b}{a} \tag{13}$$

13.1.2 Coaxial (frequências baixas)

Obteremos agora os valores para os parâmetros da linha coaxial para frequências muito baixas, onde não ocorre efeito pelicular apreciável e a corrente pode ser considerada uniformemente distribuída pelas seções retas dos condutores.

Primeiramente, notamos que a distribuição de corrente nos condutores não afeta a capacitância ou a condutância por unidade de comprimento. Logo,

$$C = \frac{2\pi\epsilon'}{\ln(b/a)} \tag{14}$$

e

$$G = \frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)} \tag{15}$$

A resistência por unidade de comprimento pode ser calculada por métodos para corrente contínua, $R = l/(\sigma_c S)$, onde $l = 1$ m e σ_c é a condutividade dos condutores interno e externo. A área do condutor central é πa^2 e a do externo é $\pi(c^2 - b^2)$. Somando esses dois valores de resistência, temos

$$R = \frac{1}{\sigma_c \pi}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2 - b^2}\right) \tag{16}$$

Falta encontrar apenas um dos quatro parâmetros, a indutância por unidade de comprimento. A indutância externa que calculamos para frequências altas constitui-se na maior parte da indutância total. A ela, contudo, devem ser somados termos menores representando as indutâncias internas dos condutores interno e externo.

Em frequências muito baixas onde a distribuição de corrente é uniforme, tivemos a indutância interna do condutor central como o assunto do Problema 43 no Capítulo 8. A relação é também dada como a Equação (62) na Seção 8.10:

$$L_{a,\text{ interno}} = \frac{\mu}{8\pi} \tag{17}$$

A determinação da indutância interna da casca externa é um problema mais difícil, porém a maior parte dos procedimentos necessários para esse tipo de cálculo nos foi requisitada ainda no Problema 36 do Capítulo 8, no qual vimos que a energia armazenada por unidade de comprimento em uma casca cilíndrica externa de raio interno b e raio externo c com distribuição uniforme de corrente é

$$W_H = \frac{\mu I^2}{16\pi(c^2 - b^2)}\left(b^2 - 3c^2 + \frac{4c^2}{c^2 - b^2}\ln\frac{c}{b}\right)$$

Com isso, a indutância interna do condutor externo em frequências muito baixas é

$$L_{bc,\text{ interno}} = \frac{\mu}{8\pi(c^2 - b^2)}\left(b^2 - 3c^2 + \frac{4c^2}{c^2 - b^2}\ln\frac{c}{b}\right) \tag{18}$$

Em frequências baixas, a indutância total é obtida somando-se as Equações (11), (17) e (18):

$$L = \frac{\mu}{2\pi}\left[\ln\frac{b}{a} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4(c^2 - b^2)}\left(b^2 - 3c^2 + \frac{4c^2}{c^2 - b^2}\ln\frac{c}{b}\right)\right] \tag{19}$$

13.1.3 Coaxial (frequências intermediárias)

Falta ainda o intervalo de frequências onde a profundidade de penetração não é muito maior nem muito menor que o raio. Neste caso, a distribuição de corrente é governada por funções de Bessel, e tanto a resistência quanto a indutância interna tornam-se expressões complicadas. Valores relacionados a elas são tabulados em livros técnicos, e sua utilização é necessária quando se considera condutores de tamanhos muito pe-

quenos em altas frequências e condutores de tamanhos grandes utilizados em transmissão de potência em baixas frequências.[1]

EP13.2. As dimensões de uma linha de transmissão coaxial são $a = 4$ mm, $b = 17{,}5$ mm e $c = 20$ mm. A condutividade dos condutores interno e externo é 2×10^7 S/m, e as propriedades do dielétrico são $\mu_r = 1$, $\epsilon'_r = 3$ e $\sigma/\omega\epsilon' = 0{,}025$. Considere que a tangente de perdas é constante com a frequência. Determine: (*a*) L, C, R, G e Z_0 em 150 MHz; (*b*) L e R em 60 Hz.

Resp. 0,30 μH/m; 113 pF/m; 0,27 Ω/m; 2,7 mS/m; 51 Ω; 0,36 μH/m; 1,16 mΩ/m

13.1.4 Linha bifilar (frequências altas)

Para a linha de transmissão bifilar da Figura 13.4 com condutores de raio a, e condutividade σ_c com separação de centro a centro d em um meio de permeabilidade μ, permissividade ϵ' e condutividade σ_c, a capacitância é encontrada usando resultados da Seção 6.4

$$C = \frac{\pi\epsilon'}{\cosh^{-1}(d/2a)} \tag{20}$$

ou

$$C \doteq \frac{\pi\epsilon'}{\ln(d/a)} \qquad (a \ll d)$$

A indutância externa pode ser encontrada a partir de $L_{\text{externo}}C = \mu\epsilon'$. Ela vale

$$L_{\text{externo}} = \frac{\mu}{\pi}\cosh^{-1}(d/2a) \tag{21}$$

ou

$$L_{\text{externo}} \doteq \frac{\mu}{\pi}\ln(d/a) \qquad (a \ll d)$$

A condutância por unidade de comprimento pode ser escrita diretamente a partir de uma inspeção da expressão para a capacitância, usando a relação $RC = \epsilon/\sigma$:[*]

$$G = \frac{\pi\sigma}{\cosh^{-1}(d/2a)} \tag{22}$$

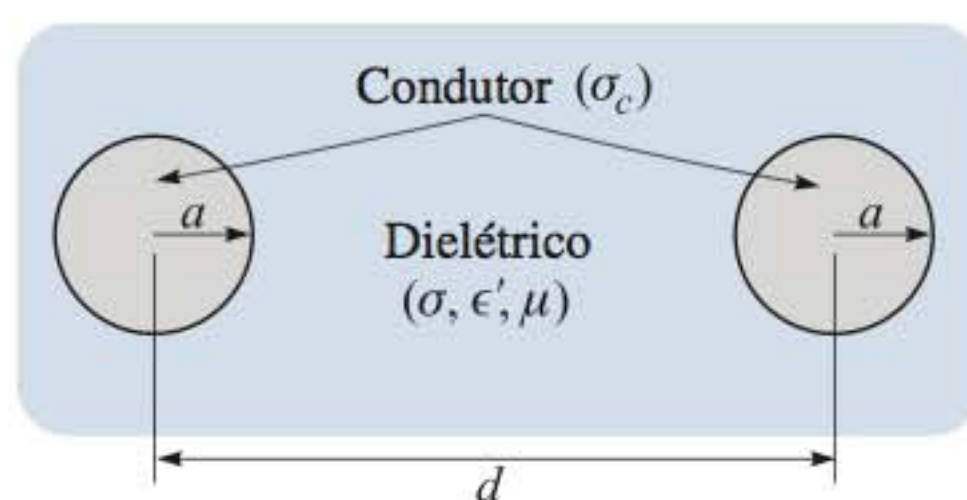



Figura 13.4 Geometria da linha de transmissão bifilar.

[1] As funções de Bessel serão discutidas dentro do contexto de fibras óticas na Seção 13.7. A distribuição de corrente, a indutância interna e a resistência interna de fios redondos são discutidas (com exemplos numéricos) em Weeks, pp. 35-44. Ver Referências no final deste capítulo.

* N. de T.: É importante salientar que o R desta equação corresponde a um parâmetro transversal da linha; portanto, neste caso, $G = 1/R$.

A resistência por unidade de comprimento é duas vezes aquela do condutor central do cabo coaxial,

$$R = \frac{1}{\pi a \delta \sigma_c} \tag{23}$$

Finalmente, utilizando as expressões para a capacitância e para a indutância externa, obteremos um valor para a impedância característica,

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_{\text{externo}}}{C}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\cosh^{-1}(d/2a) \tag{24}$$

13.1.5 Linha bifilar (frequências baixas)

Em baixas frequências onde uma distribuição uniforme de corrente pode ser assumida, devemos modificar novamente as expressões para L e R, mas não para C e G. Essas duas últimas são novamente expressas pelas Equações (20) e (22):

$$C = \frac{\pi \epsilon'}{\cosh^{-1}(d/2a)}$$

$$G = \frac{\pi \sigma}{\cosh^{-1}(d/2a)}$$

A indutância por unidade de comprimento deve ser obtida do dobro da indutância interna do condutor redondo retilíneo,

$$L = \frac{\mu}{\pi}\left[\frac{1}{4} + \cosh^{-1}(d/2a)\right] \tag{25}$$

A resistência se torna o dobro da resistência c.c.* de um fio de raio a, condutividade σ_c e comprimento unitário:

$$R = \frac{2}{\pi a^2 \sigma_c} \tag{26}$$

EP13.3. Cada condutor de uma linha de transmissão bifilar tem um raio de 0,8 mm e uma condutividade de 3×10^7 S/m. Eles são separados por uma distância de centro a centro de 0,8 cm em um meio para o qual $\epsilon'_r = 2{,}5$, $\mu_r = 1$ e $\sigma = 4 \times 10^{-9}$ S/m. Se a linha opera a 60 Hz, calcule: (*a*) δ; (*b*) C; (*c*) G; (*d*) L; (*e*) R.

Resp. 1,2 cm; 30 pF/m; 5,5 nS/m; 1,02 μH/m; 0,033 Ω/m

13.1.6 Linha microfita (frequências baixas)

Uma linha microfita é um exemplo de uma classe de configurações que envolvem condutores planos de larguras finitas sobre ou dentro de substratos de dielétricos. Elas são geralmente empregadas como dispositivos de interconexão em circuitos microeletrônicos. A configuração microfita mostrada na Figura 13.5 consiste em um

* N. de T.: c.c., neste caso, significa corrente contínua.

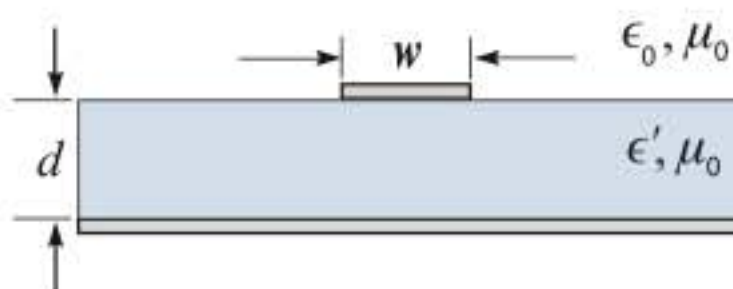



Figura 13.5 Geometria da linha microfita.

dielétrico (considerado sem perdas) de espessura d e de permissividade $\epsilon' = \epsilon_r\epsilon_0$, prensado entre um plano de terra condutor e uma fita condutora estreita de largura w. A região sobre a fita superior é o ar (considerado nesse caso) ou um dielétrico de permissividade mais baixa.

A estrutura se aproxima do caso da linha de placas paralelas se $w \gg d$. Em uma linha microfita, tal condição em geral não é válida, e dessa forma densidades de carga significativas existem em ambas as superfícies do condutor superior. O campo elétrico resultante, que se origina no condutor superior e termina no condutor inferior, existirá dentro de ambas as regiões preenchidas por substrato *e* ar. O mesmo é verdadeiro para o campo magnético, que circula em volta do condutor superior. Essa configuração de campo eletromagnético não pode se propagar como uma onda puramente TEM porque as velocidades da onda dentro dos dois meios são diferentes. Em vez disso, temos ondas que possuem componentes de **E** e de **H** em z. As intensidades dos componentes em z são estabelecidas de tal forma que os campos no ar e no dielétrico acabam por atingir velocidades de fase iguais (a razão por trás disso será explicada na Seção 13.6). A análise da estrutura no que diz respeito aos campos especiais é complicada, mas geralmente é possível aproximar o problema quando se considera componentes em z desprezíveis. Essa é uma aproximação *quase* TEM, na qual os campos estáticos (obtidos pela solução numérica da equação de Laplace, por exemplo) são utilizados para se calcular as constantes primárias. Resultados exatos são obtidos para frequências baixas (abaixo de 1 ou 2 GHz). Para frequências mais altas, os resultados obtidos a partir dos campos estáticos podem ainda ser utilizados, mas em conjunto com funções modificadoras apropriadas. Consideraremos o caso simples de operação em frequência baixa e consideraremos uma propagação sem perdas.[2]

Para começar, será bastante útil considerar as características da linha microfita quando o dielétrico *não* está presente. Considerando que ambos os condutores possuem espessuras muito pequenas, a indutância interna será desprezível, e então a velocidade de fase dentro da linha preenchida com ar, ν_{p0} será

$$\nu_{p0} = \frac{1}{\sqrt{L_{\text{externo}} C_0}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c \tag{27a}$$

onde C_0 é a capacitância da linha preenchida com ar (obtida a partir do campo elétrico para o caso em questão) e c é a velocidade da luz. Com o dielétrico colocado no lugar, a capacitância muda, *mas a indutância não muda*, já que a permeabilidade do dielétrico vale μ_0. Utilizando a Equação (27*a*), a velocidade de fase nesse caso se torna

$$\nu_p = \frac{1}{\sqrt{L_{\text{externo}} C}} = c\sqrt{\frac{C_0}{C}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{efetiva}}}} \tag{27b}$$

[2] O caso de frequência alta é tratado em detalhes em Edwards. (Ver Referência 2.)

onde a *constante dielétrica efetiva* para a linha microfita é

$$\epsilon_{r,\,\text{efetiva}} = \frac{C}{C_0} = \left(\frac{c}{\nu_p}\right)^2 \tag{28}$$

Como uma implicação da Equação (28), verificamos que a capacitância C da linha microfita seria determinada se ambas as regiões de ar e de substrato fossem homogeneamente preenchidas com material que tivesse constante dielétrica $\epsilon_{r,\,\text{efetiva}}$. A constante dielétrica efetiva é um parâmetro conveniente de ser utilizado porque propicia uma maneira de unificar os efeitos da geometria do dielétrico e do condutor. Para verificar isso, considere os dois casos extremos que envolvem relações largura/altura, w/d. Se w/d for muito grande, então a linha se parecerá com a linha de placas paralelas, onde quase todo o campo elétrico existe dentro do dielétrico. Neste caso, $\epsilon_{r,\,\text{efetiva}} \doteq \epsilon_r$. Por outro lado, para uma fita no topo muito estreita, ou w/d pequeno, as regiões de dielétrico e de ar conteriam quantidades aproximadamente iguais de fluxo elétrico. Nesse caso, a constante dielétrica efetiva se aproxima de seu mínimo, dado pela média das duas constantes dielétricas. Obtemos então a faixa de valores permitidos para $\epsilon_{r,\,\text{efetiva}}$:

$$\frac{1}{2}(\epsilon_r + 1) < \epsilon_{r,\,\text{efetiva}} < \epsilon_r \tag{29}$$

A interpretação física de $\epsilon_{r,\,\text{efetiva}}$ nos diz que ela é uma *média ponderada* das constantes dielétricas das regiões do substrato e do ar, com os pesos determinados pelo tanto que o campo elétrico preenche cada uma das duas regiões. Podemos então escrever a constante dielétrica efetiva expressando-a por um *fator de preenchimento de campo*, q, para o substrato:

$$\epsilon_{r,\,\text{efetiva}} = 1 + q(\epsilon_r - 1) \tag{30}$$

onde $0{,}5 < q < 1$. Com w/d grande, $q \to 1$. Com w/d pequeno, $q \to 0{,}5$.

Agora, as impedâncias características correspondentes à linha preenchida com ar e à linha com substrato dielétrico são respectivamente $Z_0^{\text{ar}} = \sqrt{L_{\text{externo}}/C_0}$ e $Z_0 = \sqrt{L_{\text{externo}}C}$. Logo, utilizando a Equação (28), encontramos

$$Z_0 = \frac{Z_0^{\text{ar}}}{\sqrt{\epsilon_{r,\,\text{efetiva}}}} \tag{31}$$

Um procedimento para se obter a impedância característica seria primeiramente calcular a impedância para o caso preenchido com ar para um dado w/d. Então, conhecendo-se a constante dielétrica efetiva, determinar a impedância real utilizando a Equação (31). Outro problema seria determinar a relação w/d necessária para um dado material de substrato de forma a se alcançar uma impedância característica desejada.

Análises detalhadas levaram a numerosas fórmulas de aproximação para o cálculo de $\epsilon_{r,\,\text{efetiva}}$, Z_0^{ar} e Z_0 para diferentes regimes (novamente, ver Referência 2 e as referências lá contidas). Como exemplo, considerando dimensões restritas segundo as quais $1{,}3 < w/d < 3{,}3$, as fórmulas aplicáveis incluem

$$Z_0^{\text{ar}} \doteq 60 \ln\left[4\left(\frac{d}{w}\right) + \sqrt{16\left(\frac{d}{w}\right)^2 + 2}\right] \qquad \frac{w}{d} < 3{,}3 \tag{32}$$

e

$$\epsilon_{r,\,\text{efetiva}} \doteq \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2}\left(1 + 10\frac{d}{w}\right)^{-0,555} \qquad \frac{w}{d} > 1,3 \tag{33}$$

Ou, se uma linha tem que ser fabricada tendo um valor desejado para Z_0, a constante dielétrica efetiva (pela qual o w/d necessário pode ser obtido) é encontrada por:

$$\epsilon_{r,\,\text{efetiva}} \doteq \epsilon_r[0,96 + \epsilon_r(0,109 - 0,004\epsilon_r)\,(\log_{10}(10 + Z_0) - 1)]^{-1} \qquad \frac{w}{d} > 1,3 \tag{34}$$

EP13.4. Uma linha microfita é fabricada em um substrato de niobato de lítio ($\epsilon_r = 4,8$) de 1 mm de espessura. Se o condutor superior tem 2 mm de largura, calcule (*a*) $\epsilon_{r,\text{efetiva}}$; (*b*) Z_0; (*c*) v_p.

Resp. 3,6; 47 Ω; $1,6 \times 10^8$ m/s

13.2 OPERAÇÃO BÁSICA DE UM GUIA DE ONDA

Os guias de onda assumem formas muito diferentes que dependem do propósito do guia e da frequência das ondas a serem transmitidas. A forma mais simples (para fins de análise) é o guia de placas paralelas mostrado na Figura 13.6. Outras formas incluem os guias tubulares ocos, englobando os guias de onda retangulares da Figura 13.7 e o guia cilíndrico, mostrado na Figura 13.8. Guias de onda dielétricos, utilizados primariamente em frequências óticas, incluem o guia laminado da Figura 13.9 e a fibra ótica, mostrada na Figura 13.10. Cada uma dessas estruturas possui vantagens em relação às outras, dependendo da aplicação e da frequência das ondas a serem transmitidas. Todos os guias, entretanto, exibem os mesmos princípios básicos de operação, os quais exploraremos nesta seção.

Para desenvolver um entendimento do comportamento do guia de onda, consideramos o guia de onda de placas paralelas da Figura 13.6. Primeiramente, devemos reconhecer esse guia como uma das estruturas de linha de transmissão que investigamos na Seção 13.1. Desta forma, a primeira pergunta que surge é: qual é então

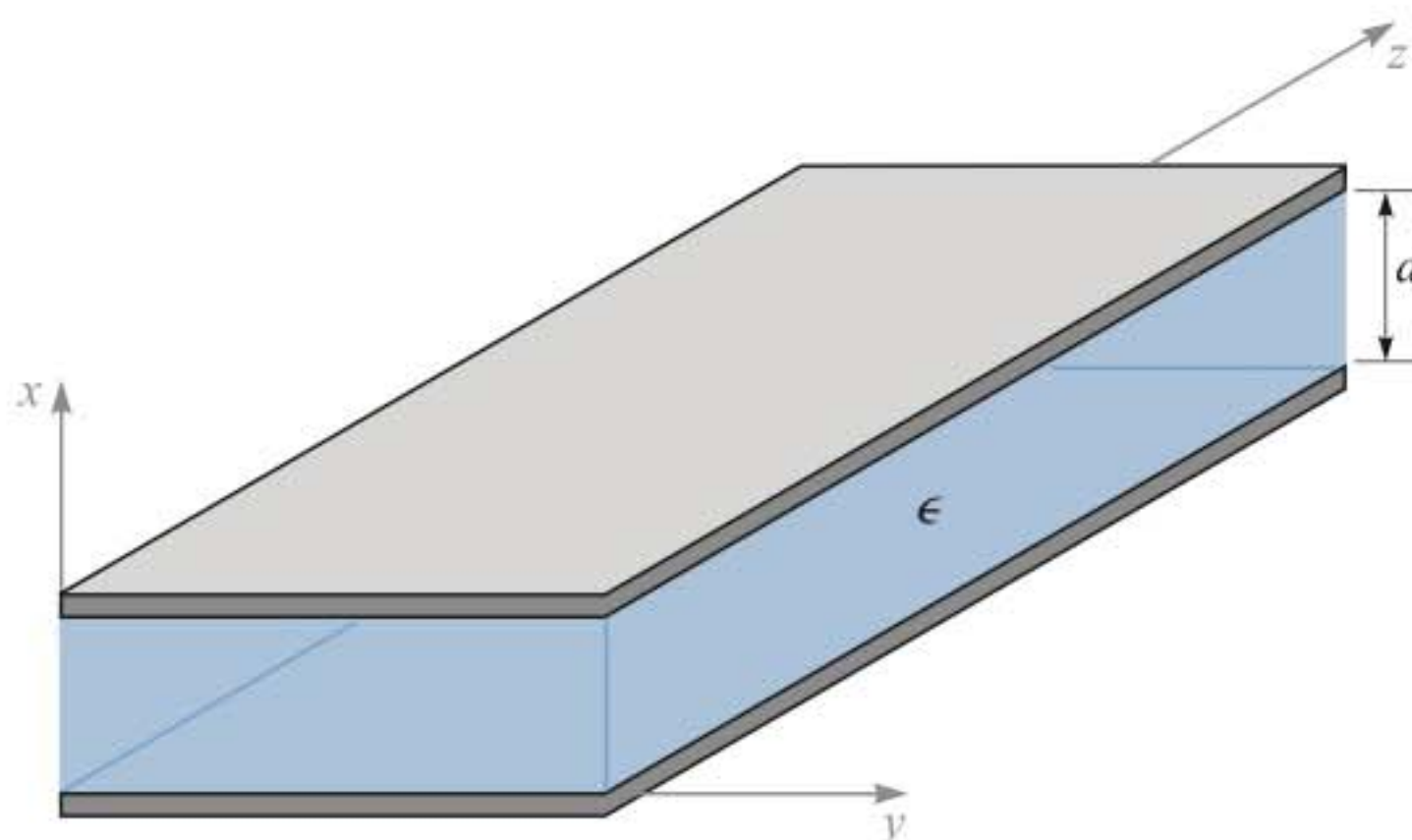



Figura 13.6 Guia de onda de placas paralelas, com placas metálicas em $x = 0, d$. Entre as placas está um dielétrico de permissividade ϵ.

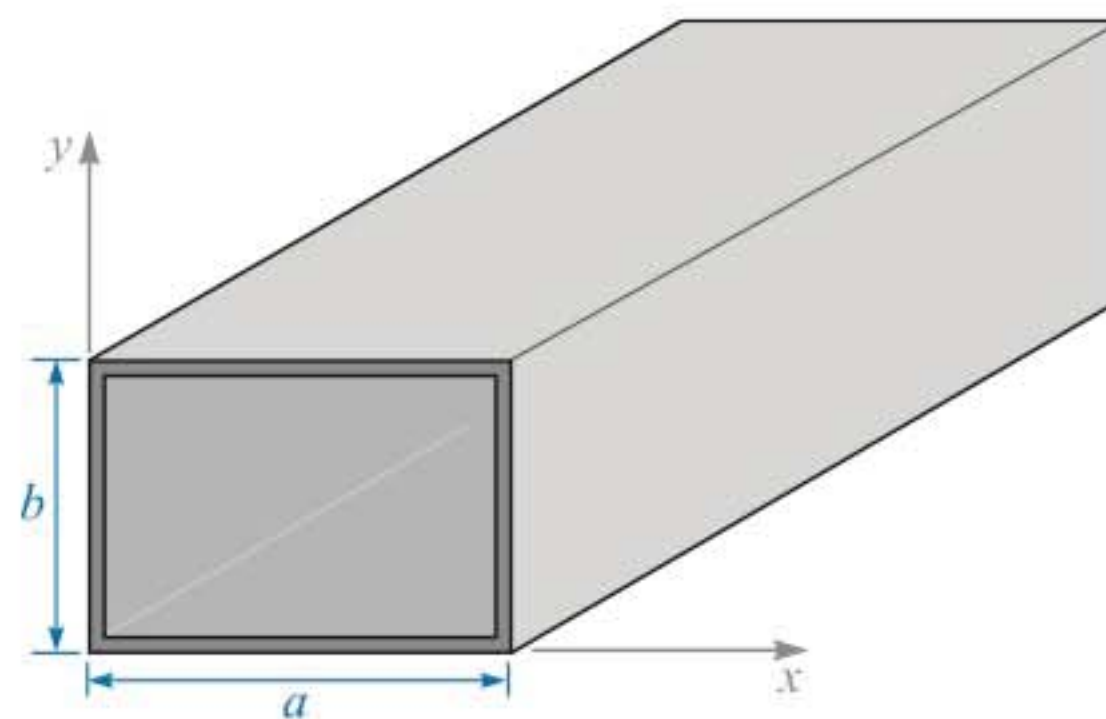



Figura 13.7 Guia de onda retangular.

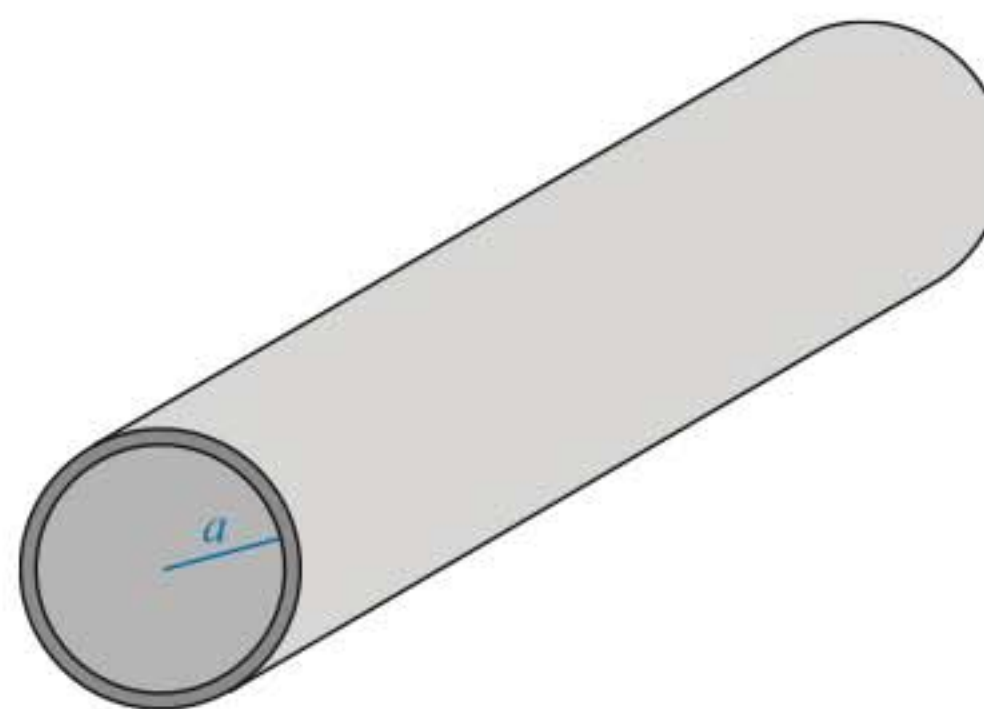



Figura 13.8 Guia de onda cilíndrico.

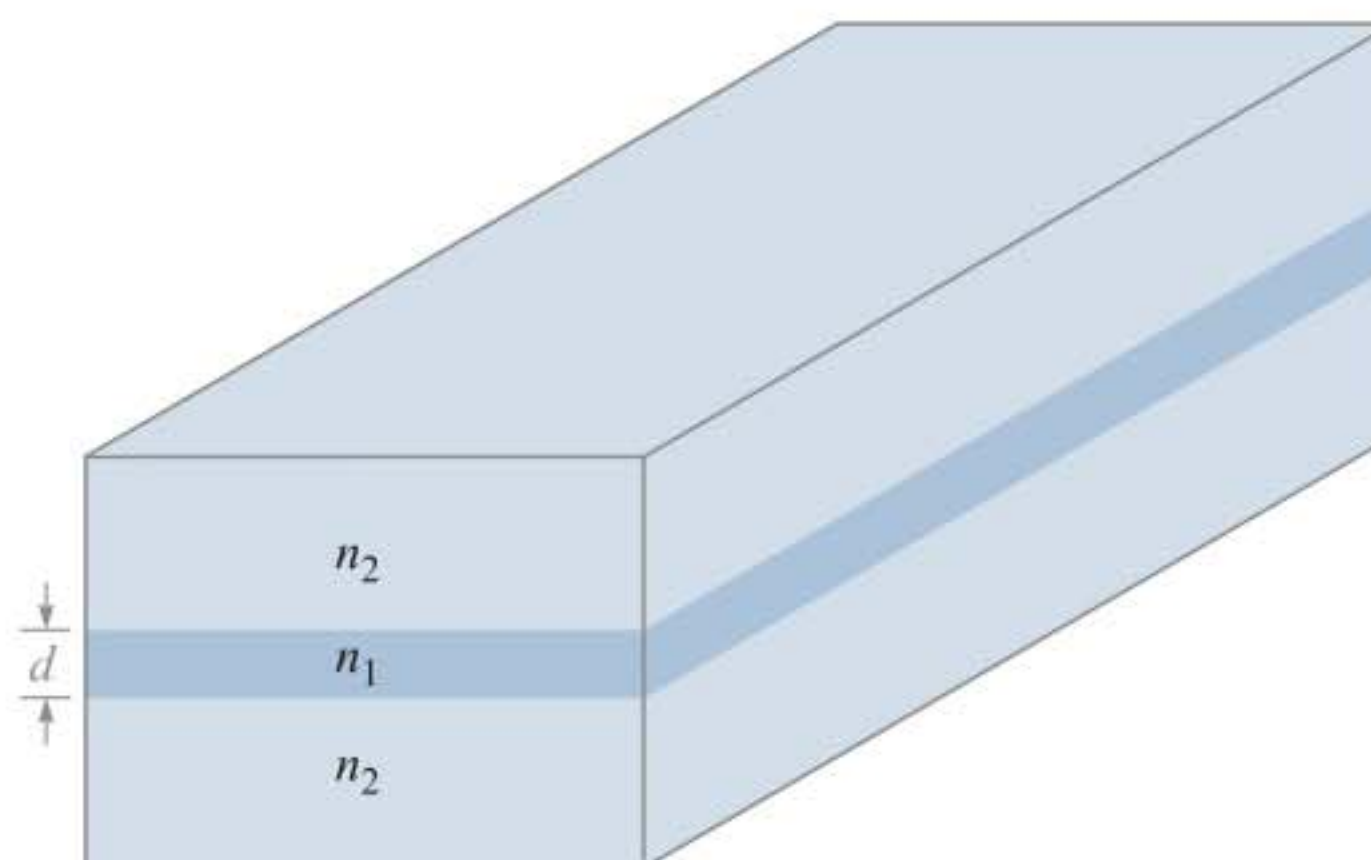



Figura 13.9 Guia de onda dielétrico laminado simétrico, com a região da lâmina (índice de refração n_1) envolvida por dois dielétricos de índices $n_2 < n_1$.

a diferença entre um guia de onda e uma linha de transmissão? A diferença reside na forma dos campos elétrico e magnético na linha. Para verificar isso, considere novamente a Figura 13.1, que mostra os campos quando a linha opera como uma linha de transmissão. Como vimos anteriormente, uma onda de tensão senoidal, com tensão aplicada entre os condutores, gera um campo elétrico que está direcionado

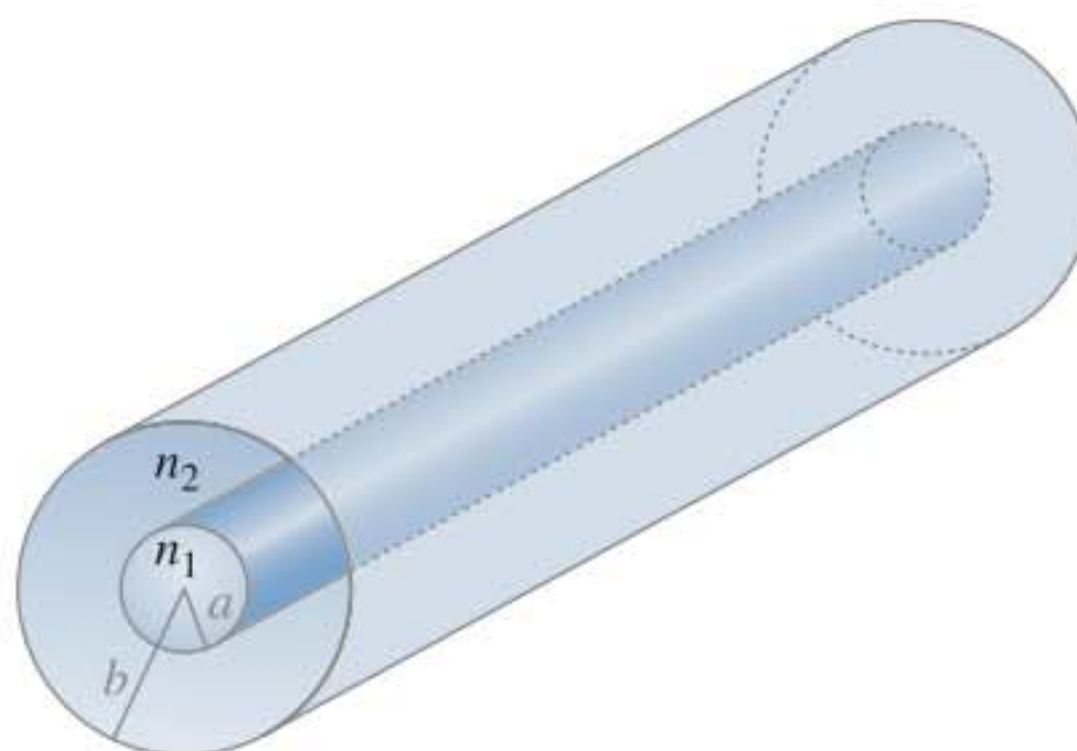



Figura 13.10 Guia de onda de fibra ótica, com núcleo dielétrico ($\rho < a$) de índice de refração n_1. O dielétrico de revestimento ($a < \rho < b$) tem índice $n_2 < n_1$.

verticalmente entre os condutores, conforme mostrado. Já que a corrente circula apenas na direção z, o campo magnético estará orientado para dentro e para fora da página (na direção y). Os campos interiores compõem uma onda eletromagnética plana que se propaga na direção z (conforme o vetor de Poynting mostrará), uma vez que ambos os campos estão no plano transversal. Referimo-nos a isso como uma onda de linha de transmissão, a qual, conforme discutido na Seção 13.1, é uma onda transversa eletromagnética, ou TEM. O vetor de onda **k**, mostrado na Figura 13.1, indica a direção da propagação da onda assim como a direção de fluxo da potência.

À medida que a frequência é aumentada, uma mudança marcante ocorre na maneira pela qual os campos se propagam ao longo da linha. Embora a configuração original do campo na Figura 13.1 possa ainda estar presente, uma outra possibilidade aparece, a qual é mostrada na Figura 13.11. Novamente, uma onda plana é guiada na direção z, mas por meio da progressão de reflexões em zigue-zague nas placas superior e inferior. Os vetores de onda $\mathbf{k}_u$ e $\mathbf{k}_d$* estão associados com as ondas que se propagam para cima e para baixo, respectivamente, e possuem intensidades idênticas,

$$|\mathbf{k}_u| = |\mathbf{k}_d| = k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

Para que tal onda se propague, todas as ondas de propagação ascendente devem estar *em fase* (assim como deve acontecer com todas as ondas de propagação descendente). Essa condição somente pode ser satisfeita com alguns ângulos discretos de incidência, mostrados como θ na Figura 13.11. Um valor permitido para θ, juntamente com a

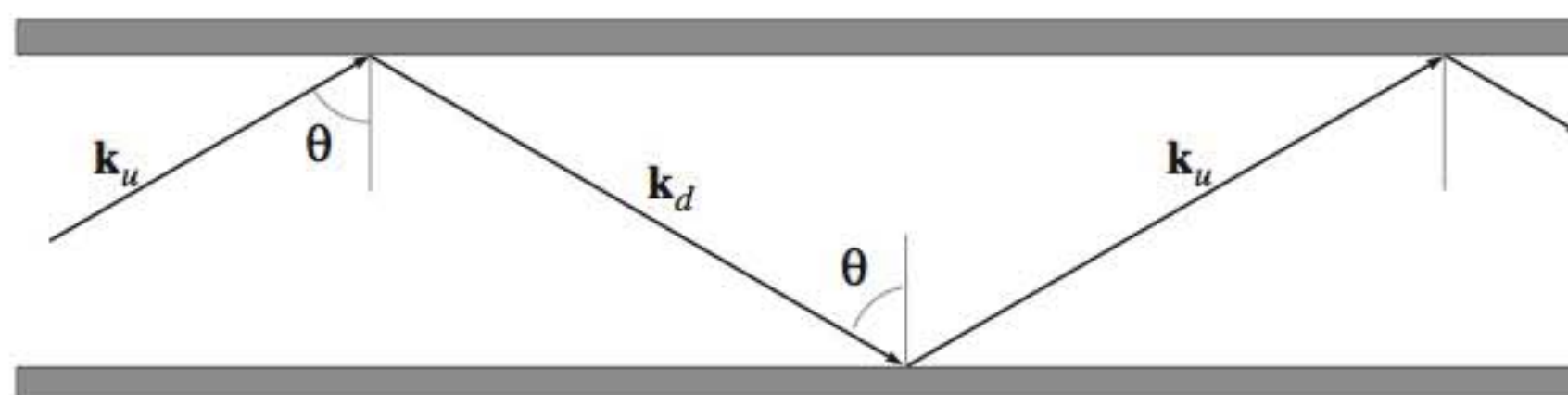



Figura 13.11 Em um guia de onda de placas paralelas, ondas planas podem se propagar por reflexão oblíqua nas paredes dos condutores. Isso produz um modo de guia de onda que não é TEM.

* N. de T.: *u* do termo em inglês *upword* e *d* do *downword*.

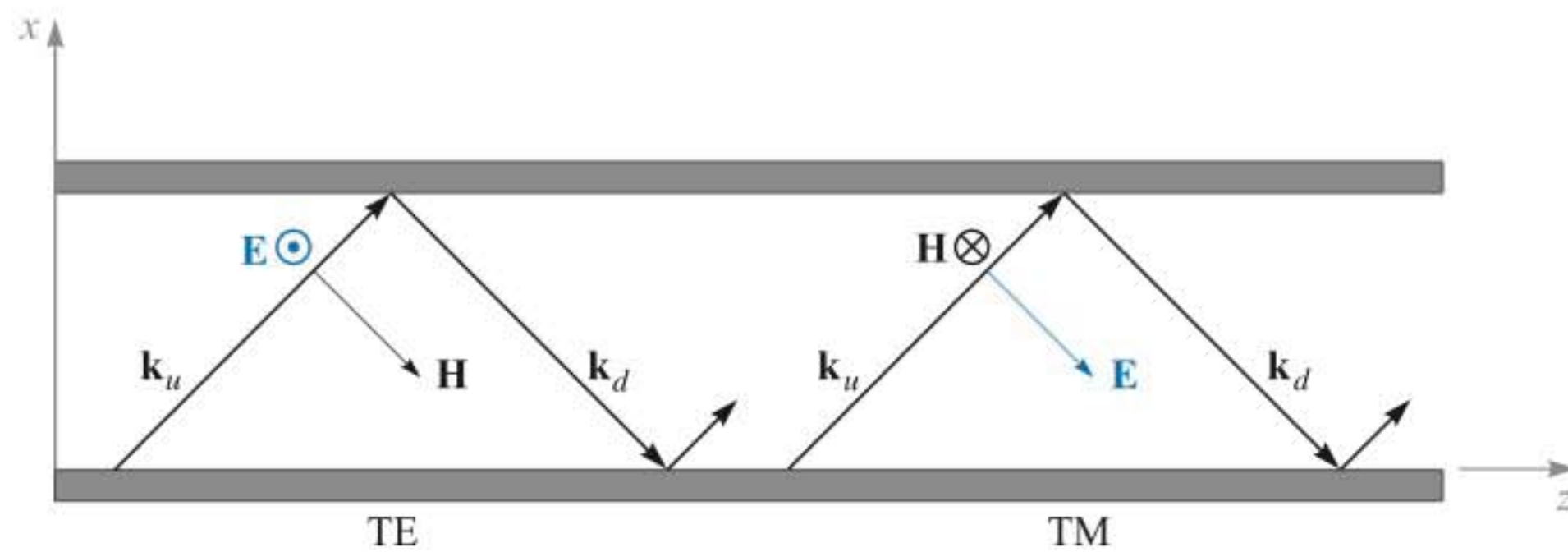



Figura 13.12 Representação das ondas planas de modos TE e TM em um guia de placas paralelas.

configuração resultante de campo, corresponde a um *modo de guia de onda* da estrutura. Associada a cada modo guiado está uma *frequência de corte*. Se a frequência de operação estiver abaixo dessa frequência de corte, o modo não se propagará; se estiver acima, entretanto, o modo se propagará. O modo TEM, contudo, não possui corte, e existirá em qualquer frequência. Em uma dada frequência, o guia pode suportar diversos modos, cuja quantidade depende da separação entre as placas e da constante dielétrica do meio interior, conforme será mostrado. O número de modos aumenta à medida que a frequência é aumentada.

Dessa forma, para responder à nossa pergunta inicial sobre a distinção entre linhas de transmissão e guias de onda, podemos afirmar o seguinte: linhas de transmissão consistem em dois ou mais condutores e, como regra, suportarão ondas TEM (ou algo que poderia se aproximar de uma onda desse tipo). Um guia de onda pode consistir em um ou mais condutores, ou em nenhum condutor, e suportará modos de guia de onda de formas similares àquelas que acabaram de ser descritas. Guias de onda podem ou não suportar ondas TEM, dependendo do projeto das mesmas.

No guia de placas paralelas, dois tipos de modos de guia de onda podem ser suportados. Eles são mostrados na Figura 13.12, onde surgem das orientações s e p das polarizações de ondas planas. De uma maneira consistente com nossas discussões anteriores sobre reflexão oblíqua (Seção 12.5) identificamos um modo *transverso elétrico* ou *TE* quando **E** está perpendicular ao plano de incidência (polarização s). Isso posiciona **E** de forma paralela ao plano transversal ao guia de onda, assim como às fronteiras. De forma similar, um modo *transverso magnético* ou *TM* resulta de uma onda com polarização p. O campo **H** inteiro está na direção y, estando assim no plano transversal ao guia. Ambas as possibilidades são ilustradas na Figura 13.12. Note, por exemplo, que com **E** na direção y (modo TE), **H** terá componentes em x e z. Da mesma forma, um modo TM apresentará componentes em x e z de **E**.[3] Em todo caso, o leitor pode verificar pela geometria da Figura 13.12 que não é possível alcançar um modo puramente TEM para outros valores de θ que não sejam 90°. É possível que outras polarizações de onda estejam entre os casos TE e TM, mas essas podem sempre ser expressas como uma superposição de modos TE e TM.

[3] Outros tipos de modos podem existir em outras estruturas (não no guia de placas paralelas) nas quais **E** e **H** *ambos* possuem componentes em z. Esses são conhecidos como modos *híbridos*, e ocorrem tipicamente em guias com seções retas cilíndricas, como a fibra ótica.

13.3 ANÁLISE DA ONDA PLANA NO GUIA DE ONDA DE PLACAS PARALELAS

Vamos agora investigar as condições sob as quais os modos de guia de onda vão ocorrer, utilizando nosso modelo de onda plana para os campos modais. Na Figura 13.13*a*, um caminho em zigue-zague é novamente mostrado, mas dessa vez frentes de onda são desenhadas, as quais estão associadas com duas das ondas de propagação ascendente. A primeira onda refletiu duas vezes (nas superfícies superior e inferior) para formar a segunda onda (as frentes de onda de propagação descendente não são mostradas). Note que as frentes da fase da segunda onda não coincidem com aquelas da primeira onda, e dessa forma as duas ondas estão fora de fase. Na Figura 13.13*b*, o ângulo da onda foi ajustado para que as duas ondas estivessem em fase. Satisfeita essa condição, poderemos agora observar que *todas* as ondas de propagação ascendente terão frentes de onda coincidentes. A mesma condição automaticamente ocorrerá para todas as ondas de propagação descendente. Esse é o requisito para se estabelecer um modo guiado.

Na Figura 13.14 mostramos o vetor de onda, $\mathbf{k}_u$, e seus componentes, juntamente com uma série de frentes de onda. Um desenho desse tipo para $\mathbf{k}_d$ seria igual, exceto pelo componente em x representado por κ_m, que seria invertido. Na Seção 12.4 medimos o defasamento por unidade de distância ao longo das direções x e z pelos componentes k_x e k_z, os quais variaram continuamente à medida que a direção de $\mathbf{k}$ mudava. Na nossa discussão sobre guias de onda, introduzimos uma notação diferente, onde κ_m e β_m são usados no lugar de k_x e k_z. O subscrito m é um inteiro que indica o *número*

(*a*)

(*b*)

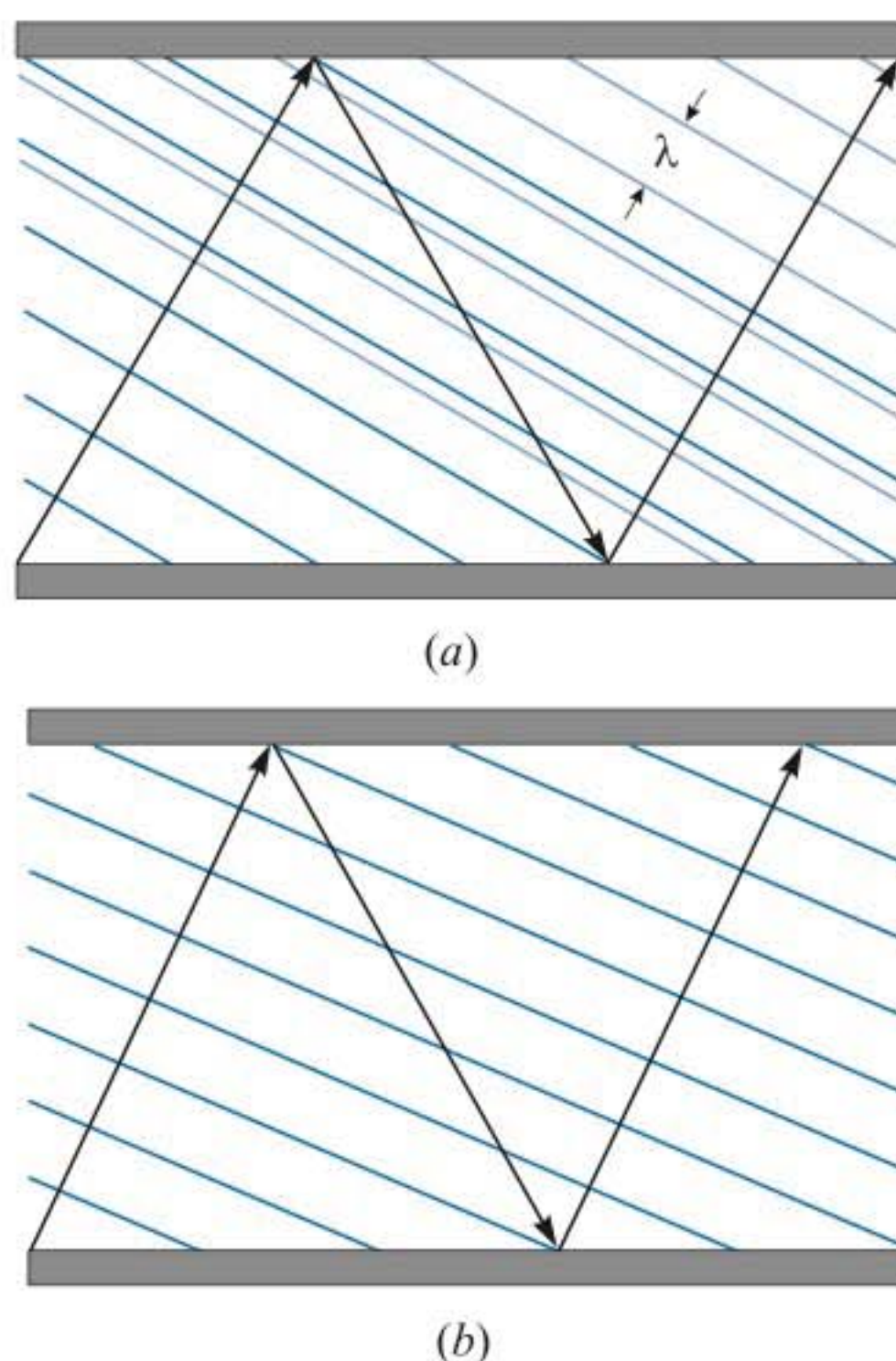



Figura 13.13 (*a*) Propagação de onda plana em um guia de placas paralelas, no qual o ângulo da onda é tal que as ondas de propagação ascendente não estão em fase. (*b*) O ângulo da onda foi ajustado de forma que as ondas ascendentes estão em fase, resultando em um modo guiado.

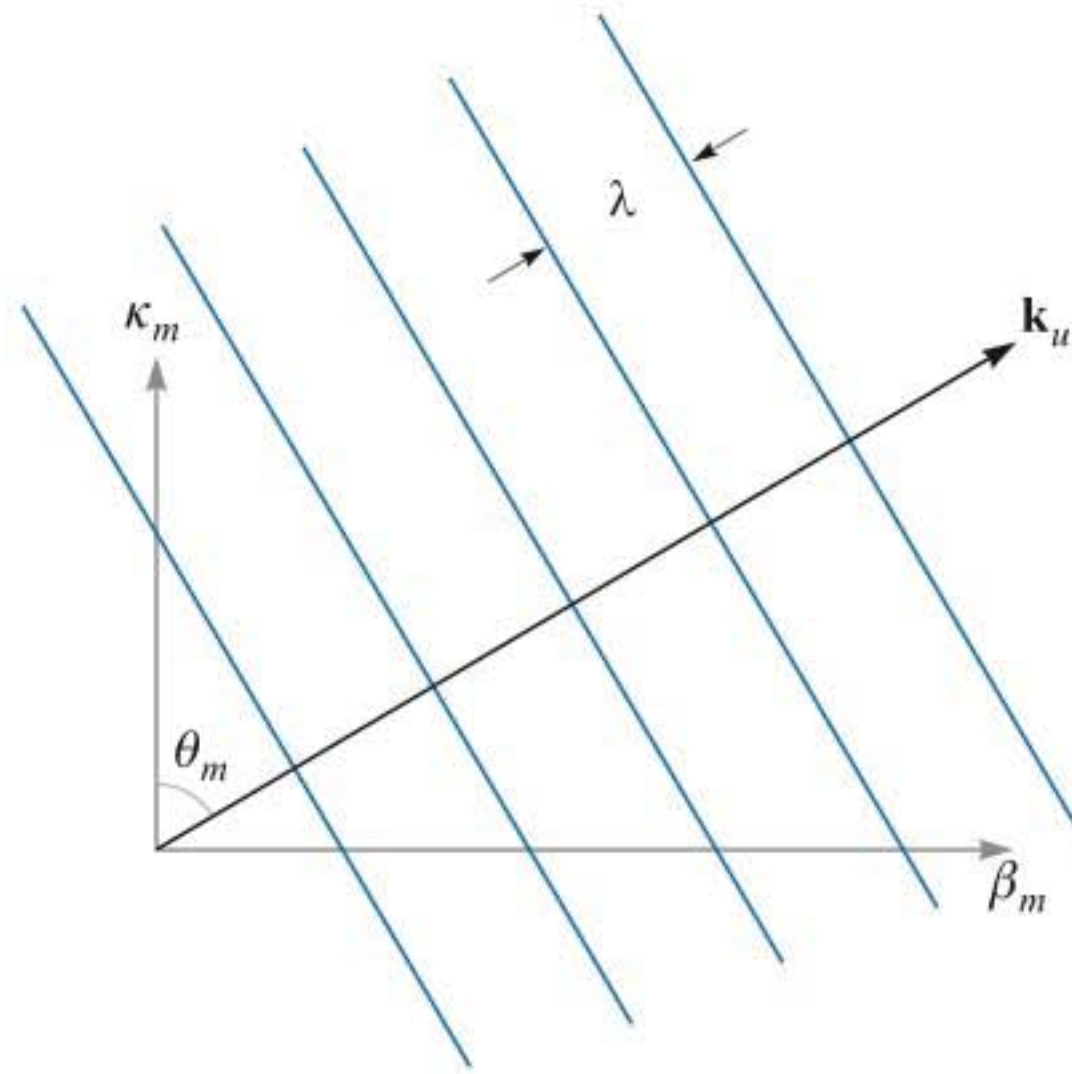



Figura 13.14 Os componentes do vetor de onda ascendente são κ_m e β_m, as constantes de defasamento transversal e axial. Para formar o vetor de onda descendente, $\mathbf{k}_d$, o sentido de κ_m é invertido.

do modo. Isso fornece uma dica sutil indicando que β_m e κ_m assumirão apenas certos valores discretos correspondentes a certas direções permitidas para $\mathbf{k}_u$ e $\mathbf{k}_d$, para que nosso requisito de frentes de onda coincidentes seja satisfeito.[4] Pela geometria vemos que para qualquer valor de m,

$$\beta_m = \sqrt{k^2 - \kappa_m^2} \tag{35}$$

A utilização do símbolo β_m para os componentes em z de $\mathbf{k}_u$ e $\mathbf{k}_d$ é apropriado porque β_m acabará sendo a constante de defasamento para o m-ésimo modo de guia de onda, medindo defasamento por distância ao longo do guia. Ele é também utilizado para determinar a velocidade de fase do modo, ω/β_m, e a velocidade de grupo, $d\omega/d\beta_m$.

Nas nossas discussões, consideraremos que o meio dentro do guia é sem perdas e não magnético, de forma que

$$k = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon'} = \frac{\omega\sqrt{\epsilon_r'}}{c} = \frac{\omega n}{c} \tag{36}$$

que expressamos pela constante dielétrica, ϵ_r', ou pelo índice de refração, n, do meio.

É κ_m, o componente em x de $\mathbf{k}_u$ e $\mathbf{k}_d$, que será útil na quantificação de nosso requisito de frentes de ondas coincidentes, mediante uma condição conhecida como *ressonância transversa*. Essa condição determina que o defasamento resultante

[4] Os subscritos (m) não são mostrados em $\mathbf{k}_u$ e $\mathbf{k}_d$, mas estão implícitos. A mudança de m não afeta as intensidades desses vetores, mas apenas suas direções.

medido durante uma viagem de ida e volta por toda a dimensão transversal do guia deve ser um múltiplo inteiro de 2π radianos. Essa é outra maneira de se afirmar que todas as ondas planas de propagação ascendente (ou descendente) devem ter fases coincidentes. Os vários segmentos dessa viagem de ida e volta são ilustrados na Figura 13.15. Consideramos nesse exercício que as ondas estão congeladas no tempo e que um observador se move verticalmente para cima e para baixo durante a viagem, medindo o defasamento ao longo do caminho. No primeiro segmento (Figura13.15*a*), o observador começa em uma posição logo acima do condutor inferior e se move verticalmente em direção ao condutor superior por uma distância d. O defasamento medido ao longo dessa distância é $\kappa_m d$ rad. Ao atingir a superfície superior, o observador notará um possível defasamento na reflexão (Figura 13.15*b*). Esse valerá π se a onda tiver polarização TE e será zero se a onda tiver polarização TM (ver Figura 13.16 para uma demonstração disso). Em seguida, o observador se move para baixo ao longo das frentes da onda refletida em direção ao condutor inferior e novamente mede um defasamento $\kappa_m d$ (Figura 13.15*c*). Finalmente, após incluir o defasamento da reflexão no condutor inferior, o observador está de volta na posição inicial original e então percebe a fase da próxima onda de propagação ascendente.

O defasamento total ao longo de toda a viagem de ida e volta deve ser um inteiro múltiplo de 2π:

$$\boxed{\kappa_m d + \phi + \kappa_m d + \phi = 2m\pi} \tag{37}$$

onde ϕ é o deslocamento na reflexão em cada fronteira. Note que com $\phi = \pi$ (ondas TE) ou 0 (ondas TM) o defasamento resultante das reflexões na viagem de ida e volta vale 2π ou 0, independentemente do ângulo de incidência. Logo, o defasamento devido às reflexões não mais influencia o problema atual, e assim podemos simplificar a Equação (37) para obtermos

$$\boxed{\kappa_m = \frac{m\pi}{d}} \tag{38}$$

que é válido para *ambos* os modos TE e TM. Na Figura 13.14 cabe notar que $\kappa_m = k\cos\theta_m$. Assim, os ângulos da onda para os modos permitidos são prontamente encontrados a partir da Equação (38) com a Equação (36):

$$\theta_m = \cos^{-1}\left(\frac{m\pi}{kd}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{m\pi c}{\omega n d}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{m\lambda}{2nd}\right) \tag{39}$$

onde λ é o comprimento de onda no espaço livre.

Podemos, em seguida, encontrar a constante de defasamento para cada modo, usando a Equação (35) com a Equação (38):

$$\beta_m = \sqrt{k^2 - \kappa_m^2} = k\sqrt{1 - \left(\frac{m\pi}{kd}\right)^2} = k\sqrt{1 - \left(\frac{m\pi c}{\omega n d}\right)^2} \tag{40}$$

(*a*)

Reflexão com defasamento 0 ou π

(*b*)

Reflexão com defasamento 0 ou π

(*c*)

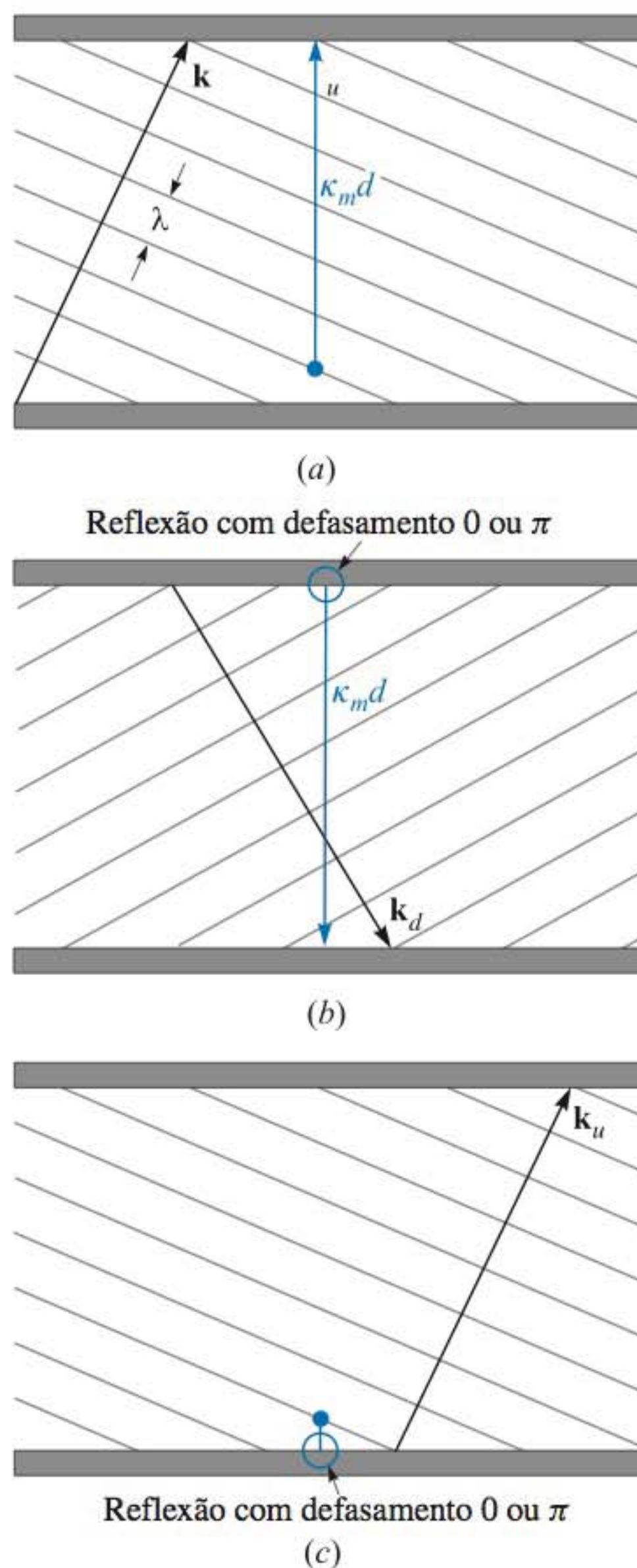



Figura 13.15 O defasamento resultante ao longo de uma viagem de ida e volta no guia de placas paralelas pode ser encontrado quando, primeiramente, mede-se o defasamento transversal entre as placas da onda ascendente inicial (*a*). Em seguida, mede-se o defasamento transversal na onda refletida (descendente), enquanto leva-se em conta o defasamento devido à reflexão na placa superior (*b*). Finalmente, soma-se o defasamento devido à reflexão na placa inferior, retornando-se assim ao ponto inicial, mas com uma nova onda ascendente (*c*). Ressonância transversa ocorre se a fase no ponto final é a mesma que aquela no ponto inicial (as duas ondas ascendentes estão em fase).

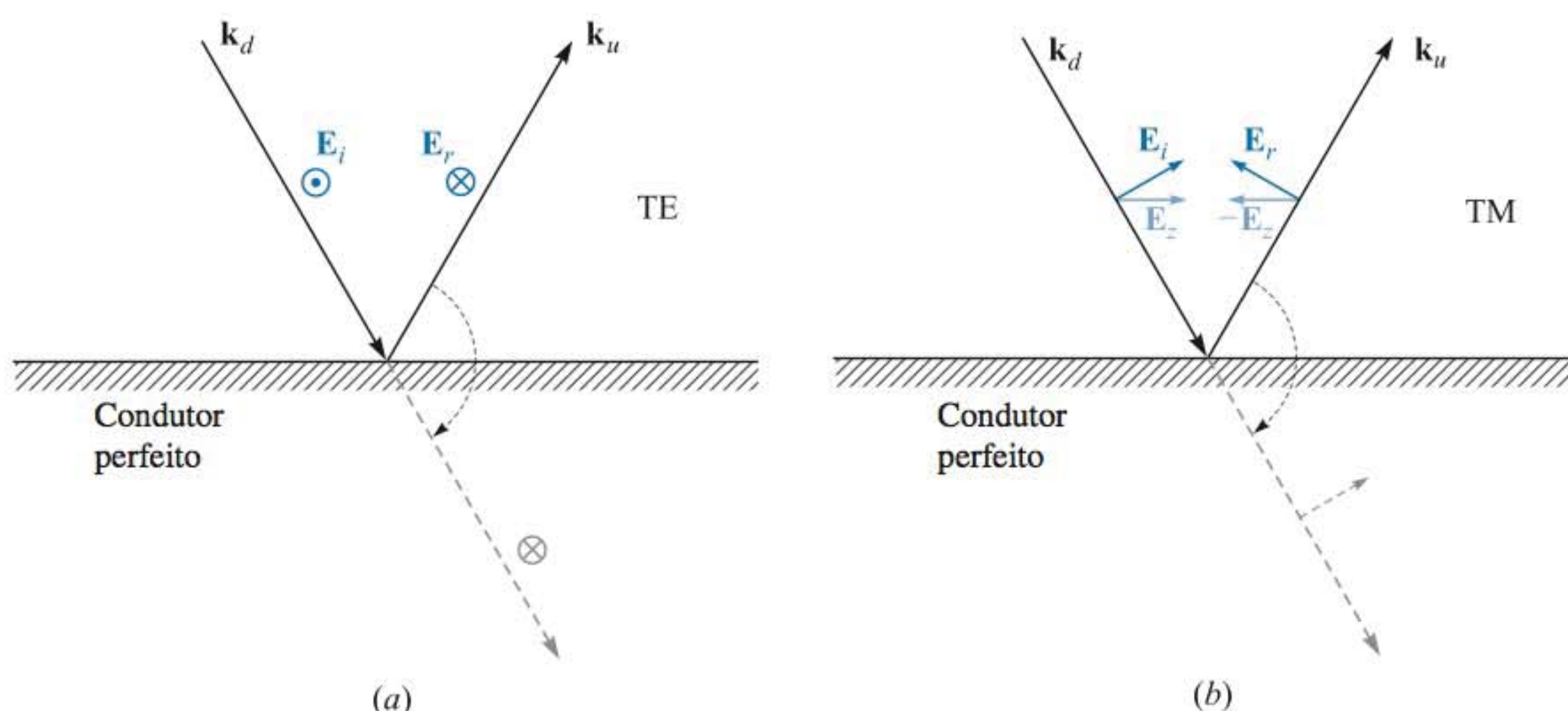



Figura 13.16 O defasamento de uma onda na reflexão em uma superfície condutora perfeita dependerá da onda incidente e da sua polarização – TE (polarização *s*) ou TM (polarização *p*). Em ambos os desenhos, campos elétricos são mostrados conforme apareceriam em um ponto imediatamente adjacente à fronteira condutora. Em (*a*) o campo de uma onda TE inverte o sentido na reflexão para que um campo total zero seja estabelecido na fronteira. Isso se constitui em um defasamento de π, conforme é evidente pela consideração de uma onda transmitida fictícia (linha tracejada) formada por uma rotação simples da onda refletida de forma a se alinhar com a onda incidente. Em (*b*), uma onda incidente TM experimenta uma inversão do *componente em z* de seu campo elétrico. O campo resultante da onda refletida, entretanto, não ficou defasado. A rotação da onda refletida tornando-a alinhada com a onda incidente (linha tracejada) mostra isso.

Definimos a *frequência angular de corte* para o modo m como

$$\omega_{cm} = \frac{m\pi c}{nd} \tag{41}$$

de forma que a Equação (40) se torna

$$\beta_m = \frac{n\omega}{c}\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{cm}}{\omega}\right)^2} \tag{42}$$

O significado da frequência de corte pode ser imediatamente inferido da Equação (42): se a frequência de operação ω for maior que a frequência de corte para o modo m, então esse modo terá uma constante de defasamento β_m com valor real, e assim o modo propagará. Para $\omega < \omega_{cm}$, β_m é imaginário e o modo não propaga.

Associado à frequência de corte está o *comprimento de onda de corte*, λ_{cm}, definido como o comprimento de onda no espaço livre no qual o corte para o modo m ocorre. Ele será

$$\lambda_{cm} = \frac{2\pi c}{\omega_{cm}} = \frac{2nd}{m} \tag{43}$$

Note, por exemplo, que em um guia preenchido com ar ($n = 1$) o comprimento de onda no qual o modo de menor ordem começa a se propagar é $\lambda_{c1} = 2d$, ou a separação entre as placas é metade do comprimento de onda. O modo m se propagará sempre que $\omega > \omega_{cm}$, ou, de maneira equivalente, sempre que $\lambda < \lambda_{cm}$. O uso do comprimento de onda de corte nos permite construir uma segunda forma útil para a Equação (42):

$$\beta_m = \frac{2\pi n}{\lambda}\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{cm}}\right)^2} \tag{44}$$

EXEMPLO 13.1

Um guia de onda de placas paralelas tem separação entre as placas $d = 1$ cm e é preenchido com Teflon, o qual possui constante dielétrica $\epsilon'_r = 2{,}1$. Determine a máxima frequência de operação para que apenas o modo TEM se propague. Encontre também a faixa de frequências na qual os modos TE_1 e TM_1 ($m = 1$) se propagarão, e não os outros modos de maior ordem.

Solução. Usando a Equação (41), veremos que a frequência de corte para o primeiro modo de guia de onda ($m = 1$) será

$$f_{c1} = \frac{\omega_{c1}}{2\pi} = \frac{2{,}99 \times 10^{10}}{2\sqrt{2{,}1}} = 1{,}03 \times 10^{10}\ \text{Hz} = 10{,}3\ \text{GHz}$$

Para que apenas ondas TEM se propaguem, devemos ter $f < 10{,}3$ GHz. Para permitir apenas TE_1 e TM_1 (juntamente com TEM), a faixa de frequências deve ser $\omega_{c1} < \omega < \omega_{c2}$, onde $\omega_{c2} = 2\omega_{c1}$, da Equação (41). Logo, as frequências nas quais teremos os modos $m = 1$ e TEM serão $10{,}3\ \text{GHz} < f < 20{,}6\ \text{GHz}$.

EXEMPLO 13.2

No guia de placas paralelas do Exemplo 13.1, o comprimento de onda de operação é $\lambda = 2$ mm. Quantos modos de guia de onda se propagarão?

Solução. Para que o modo m se propague, é necessário que $\lambda < \lambda_{cm}$. Para o guia de onda e o comprimento de onda dados, a desigualdade se torna, utilizando a Equação (43),

$$2\ \text{mm} < \frac{2\sqrt{2{,}1}\ (10\ \text{mm})}{m}$$

da qual

$$m < \frac{2\sqrt{2{,}1}\ (10\ \text{mm})}{2\ \text{mm}} = 14{,}5$$

Logo, o guia suportará modos no comprimento de onda dado até a ordem $m = 14$. Uma vez que existirá um modo TE e um modo TM para cada valor de m, teremos, sem incluir o modo TEM, um total de 28 modos guiados acima do corte.

A configuração do campo para um dado modo pode ser encontrada pela superposição dos campos de todas as ondas refletidas. Podemos fazer isso para as ondas TE, por exemplo, escrevendo o fasor campo elétrico no guia considerando os campos incidente e refletido por

$$E_{ys} = E_0 e^{-j\mathbf{k}_u\cdot\mathbf{r}} - E_0 e^{-j\mathbf{k}_d\cdot\mathbf{r}} \tag{45}$$

onde os vetores de onda $\mathbf{k}_u$ e $\mathbf{k}_d$ estão indicados na Figura 13.12. O sinal de menos na frente do segundo termo aparece do defasamento de π na reflexão. Pela geometria descrita na Figura 13.14, escrevemos

$$\mathbf{k}_u = \kappa_m \mathbf{a}_x + \beta_m \mathbf{a}_z \tag{46}$$

e

$$\mathbf{k}_d = -\kappa_m \mathbf{a}_x + \beta_m \mathbf{a}_z \tag{47}$$

Então, usando

$$\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + z\mathbf{a}_z$$

a Equação (45) se torna

$$E_{ys} = E_0(e^{-j\kappa_m x} - e^{jk_m x})e^{-j\beta_m z} = 2jE_0 \operatorname{sen}(\kappa_m x)e^{-j\beta_m z} = E_0' \operatorname{sen}(\kappa_m x)e^{-j\beta_m z} \tag{48}$$

onde a amplitude da onda plana, E_0, e a fase total estão embutidas em E_0'. Na forma instantânea real, a Equação (48) se torna

$$E_y(z,t) = \operatorname{Re}\left(E_{ys}e^{j\omega t}\right) = E_0' \operatorname{sen}(\kappa_m x)\cos(\omega t - \beta_m z) \quad \text{(Modo TE acima do corte)} \tag{49}$$

Interpretamos isso como uma onda que se propaga no sentido positivo de z (ao longo do guia) enquanto tem um perfil de campo que varia com x.[5] O campo do modo TE é o *padrão de interferência* que resulta da superposição das ondas planas ascendentes e descendentes. Note que se $\omega < \omega_{cm}$, a Equação (42) leva a um valor imaginário para β_m, o qual podemos escrever como $-j|\beta_m| = -j\alpha_m$. As Equações (48) e (49) então se tornam

$$E_{ys} = E_0' \operatorname{sen}(\kappa_m x)e^{-\alpha_m z} \tag{50}$$

$$E(z,t) = E_0' \operatorname{sen}(\kappa_m x)e^{-\alpha_m z}\cos(\omega t) \quad \text{(Modo TE abaixo do corte)} \tag{51}$$

Esse modo não se propaga, mas simplesmente oscila em uma frequência ω, enquanto exibe um padrão de campo que decresce em intensidade com o aumento de z. O coeficiente de atenuação, α_m, é encontrado a partir da Equação (42) com $\omega < \omega_{cm}$:

$$\alpha_m = \frac{n\omega_{cm}}{c}\sqrt{1-\left(\frac{\omega}{\omega_{cm}}\right)^2} = \frac{2\pi n}{\lambda_{cm}}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_{cm}}{\lambda}\right)^2} \tag{52}$$

[5] Podemos também interpretar esse campo como o campo de uma onda estacionária em x enquanto é uma onda viajante em z.

A partir das Equações (39) e (41) notamos que o ângulo da onda plana está relacionado com a frequência de corte e com o comprimento de onda de corte por

$$\cos\theta_m = \frac{\omega_{cm}}{\omega} = \frac{\lambda}{\lambda_{cm}} \tag{53}$$

Dessa forma, vemos que no corte ($\omega = \omega_{cm}$), $\theta_m = 0$, e as ondas planas apenas se refletem para frente e para trás ao longo da seção reta. Não progridem para frente ao longo do guia. À medida que ω é aumentado para além do corte (ou λ é diminuído), o ângulo da onda aumenta, se aproximando de 90° à medida que ω se aproxima do infinito (ou à medida que λ se aproxima de zero). Da Figura 13.14, temos

$$\beta_m = k \operatorname{sen}\theta_m = \frac{n\omega}{c}\operatorname{sen}\theta_m \tag{54}$$

e então a velocidade de fase do modo *m* será

$$v_{pm} = \frac{\omega}{\beta_m} = \frac{c}{n \operatorname{sen}\theta_m} \tag{55}$$

A velocidade é mínima em c/n para todos os modos, aproximando-se desse valor nas frequências muito acima do corte; v_{pm} se aproxima do infinito à medida que a frequência é reduzida, se aproximando da frequência de corte. Novamente, a velocidade de fase é a velocidade das fases na direção z, e o fato de essa velocidade poder exceder a velocidade da luz no meio não é uma violação dos princípios da relatividade, conforme discutido na Seção 12.7.

A energia se propagará na velocidade de grupo, $v_g = d\omega/d\beta$. Utilizando a Equação (42), temos

$$v_{gm}^{-1} = \frac{d\beta_m}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left[\frac{n\omega}{c}\sqrt{1-\left(\frac{\omega_{cm}}{\omega}\right)^2}\right] \tag{56}$$

O cálculo da derivada é direto. Realizando-o e tomado o recíproco do resultado tem-se

$$v_{gm} = \frac{c}{n}\sqrt{1-\left(\frac{\omega_{cm}}{\omega}\right)^2} = \frac{c}{n}\operatorname{sen}\theta_m \tag{57}$$

A velocidade de grupo é então identificada como a projeção da velocidade associada com $\mathbf{k}_u$ ou $\mathbf{k}_d$ na direção z. Isso será menor ou igual à velocidade da luz no meio, c/n, conforme esperado.

EXEMPLO 13.3

No guia do Exemplo 13.1 a frequência de operação é 25 GHz. Consequentemente, os modos para os quais $m = 1$ e $m = 2$ estarão acima do corte. Determine a *diferença de atraso de grupo* entre esses dois modos em uma distância de 1 cm. Essa é a diferença

nos tempos de propagação entre os dois modos quando a energia em cada um deles se propaga pela distância de 1 cm.

Solução. A diferença de atraso de grupo é expressa por

$$\Delta t = \left(\frac{1}{v_{g2}} - \frac{1}{v_{g1}} \right) \text{ (s/cm)}$$

Da Equação (57), juntamente com os resultados do Exemplo 13.1, temos

$$v_{g1} = \frac{c}{\sqrt{2{,}1}} \sqrt{1 - \left(\frac{10{,}3}{25} \right)^2} = 0{,}63c$$

$$v_{g2} = \frac{c}{\sqrt{2{,}1}} \sqrt{1 - \left(\frac{20{,}6}{25} \right)^2} = 0{,}39c$$

Logo,

$$\Delta t = \frac{1}{c} \left[\frac{1}{0{,}39} - \frac{1}{0{,}63} \right] = 3{,}3 \times 10^{-11} \text{ s/cm} = 33 \text{ ps/cm}$$

Esse cálculo oferece uma medida grosseira da *dispersão modal* no guia, aplicado quando se tem apenas dois modos se propagando. Um pulso cuja frequência central é de 25 GHz, por exemplo, teria sua energia dividida entre os dois modos. O pulso se alargaria aproximadamente 33 ps/cm de distância propagada à medida que a energia nos dois modos se separasse. Entretanto, se incluirmos o modo TEM (conforme realmente deveríamos) então o alargamento seria ainda maior. A velocidade de grupo para o TEM será $c/\sqrt{2{,}1}$. Assim, a diferença de atraso de grupo de interesse será entre o modo TEM e o modo $m = 2$ (TE ou TM). Teríamos então

$$\Delta t_{\text{resultante}} = \frac{1}{c} \left[\frac{1}{0{,}39} - 1 \right] = 52 \text{ ps/cm}$$

EP13.5. Determine os ângulos de onda θ_m para os primeiros quatro modos ($m = 1, 2, 3, 4$) em um guia de placas paralelas com $d = 2$ cm, $\epsilon'_r = 1$ e $f = 30$ GHz.

Resp. 76°; 60°; 41°; 0°

EP13.6. Um guia de placas paralelas tem espaçamento entre placas $d = 5$ mm e está preenchido com vidro ($n = 1{,}45$). Qual é a frequência máxima na qual o guia irá operar apenas no modo TEM?

Resp. 20,7 GHz

EP13.7. Um guia de placas paralelas que tem $d = 1$ cm está preenchido com ar. Encontre o comprimento de onda de corte para o modo $m = 2$ (TE ou TM).

Resp. 1 cm

13.4 ANÁLISE DO GUIA DE PLACAS PARALELAS UTILIZANDO A EQUAÇÃO DE ONDA

A abordagem mais direta na análise de qualquer guia de onda é a utilização da equação de onda, a qual resolvemos sujeita às condições de fronteira nas paredes condutoras. A forma da equação que vamos utilizar é a mesma da Equação (28) na Seção 11.1, a qual foi escrita para o caso da propagação no espaço livre. Levamos em conta as propriedades do dielétrico no guia de onda substituindo k_0 naquela equação por k, para obter

$$\nabla^2 \mathbf{E}_s = -k^2 \mathbf{E}_s \tag{58}$$

onde $k = n\omega/c$ como antes.

Podemos utilizar os resultados da última seção para nos ajudar a visualizar o processo de solução da equação de onda. Como exemplo, podemos considerar os modos TE primeiramente, nos quais haverá apenas um componente em y de $\mathbf{E}$. A equação de onda se torna

$$\frac{\partial^2 E_{ys}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{ys}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{ys}}{\partial z^2} + k^2 E_{ys} = 0 \tag{59}$$

Consideramos que a largura do guia (na direção y) é muito grande se comparada à separação entre as placas d. Logo, podemos supor que não há variação dos campos em y (campos nas extremidades são ignorados), e assim $\partial^2 E_{ys}/y^2 = 0$. Também sabemos que a variação em z será da forma $e^{-j\beta_m z}$. A forma da solução do campo será então

$$E_{ys} = E_0 f_m(x) e^{-j\beta_m z} \tag{60}$$

onde E_0 é uma constante, e onde $f_m(x)$ é uma função normalizada a ser determinada (cujo valor máximo é a unidade). Incluímos o subscrito m em β, κ e $f(x)$, uma vez que antecipamos diversas soluções que correspondem a modos discretos, aos quais associamos o número de modo m. Agora substituímos a Equação (60) na Equação (59) para obter

$$\frac{d^2 f_m(x)}{dx^2} + \left(k^2 - \beta_m^2\right) f_m(x) = 0 \tag{61}$$

onde E_0 e $e^{-j\beta_m z}$ foram divididos e cancelados, e onde utilizamos o fato de que

$$\frac{d^2}{dz^2} e^{-j\beta_m z} = -\beta_m^2 e^{-j\beta_m z}$$

Note também que escrevemos a Equação (61) utilizando a derivada total d^2/dx^2 uma vez que f_m é uma função apenas de x. Em seguida fazemos uso da geometria da Figura 13.14, e notamos que $k^2 - \beta_m^2 = \kappa_m^2$. Usando isso na Equação (61), obtemos

$$\frac{d^2 f_m(x)}{dx^2} + \kappa_m^2 f_m(x) = 0 \tag{62}$$

A solução geral da Equação (62) será

$$f_m(x) = \cos(\kappa_m x) + \operatorname{sen}(\kappa_m x) \tag{63}$$

Em seguida, aplicamos as condições de fronteira adequadas ao nosso problema para avaliar κ_m. Da Figura 13.6, fronteiras condutoras aparecem em $x = 0$ e $x = d$, nas quais o campo elétrico tangencial (E_y) deve ser zero. Na Equação (63), apenas o termo sen $(\kappa_m x)$ permitirá que as condições de fronteira sejam satisfeitas, por isso retemos esse termo e o cortamos em cosseno. A condição de $x = 0$ é automaticamente satisfeita pela função seno. A condição $x = d$ é alcançada quando escolhemos um valor para κ_m de forma que

$$\kappa_m = \frac{m\pi}{d} \tag{64}$$

Reconhecemos o resultado na Equação (64) como o mesmo que obtivemos ao utilizar a condição de ressonância transversa da Seção 13.3. A forma final de E_{ys} é obtida pela substituição de $f_m(x)$ conforme expresso nas Equações (63) e (64) na Equação (60), levando a um resultado que é consistente com aquele representado na Equação (48):

$$E_{ys} = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{d}\right) e^{-j\beta_m z} \tag{65}$$

Um significado adicional do número de modo m é percebido quando consideramos a forma do campo elétrico na Equação (65). Especificamente, m é o número de meios ciclos espaciais de campos elétricos que ocorrem em uma distância d no plano transversal. Isso pode ser entendido fisicamente pela consideração do comportamento do guia no corte. Conforme aprendemos na última seção, o ângulo de incidência da onda plana no guia no corte é zero, o que significa que a onda simplesmente oscila para cima e para baixo entre as paredes condutoras. A onda deve ser ressonante na estrutura, o que significa que o defasamento resultante na viagem de ida e volta é $2m\pi$. Com as ondas planas orientadas verticalmente, $\beta_m = 0$, e assim $\kappa_m = k = 2n\pi/\lambda_{cm}$. Dessa forma, no corte

$$\frac{m\pi}{d} = \frac{2n\pi}{\lambda_{cm}} \tag{66}$$

o que leva a

$$d = \frac{m\lambda_{cm}}{2n} \qquad \text{no corte} \tag{67}$$

A Equação (65) no corte se torna

$$E_{ys} = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{d}\right) = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{\lambda_{cm}}\right) \tag{68}$$

O guia de onda é simplesmente uma *cavidade ressonante* unidimensional, na qual uma onda pode oscilar na direção x se o comprimento de onda medido no meio for um inteiro múltiplo de $2d$, onde o inteiro vale m.

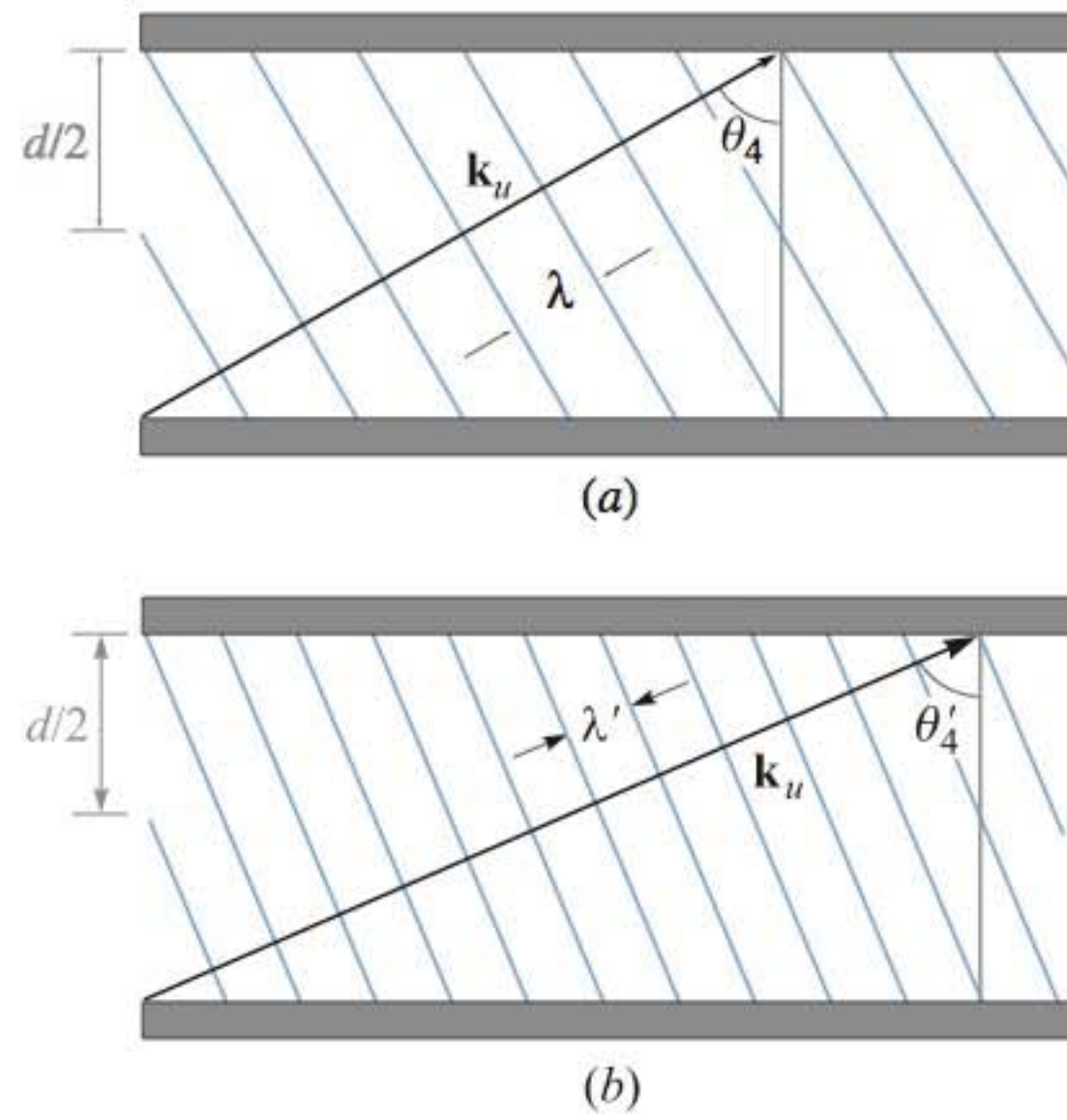



Figura 13.17 (*a*) Uma onda plana associada com um modo $m = 4$, mostrando um defasamento resultante de 4π (dois comprimentos de onda medidos em x) que ocorrem ao longo de uma distância d no plano transversal. (*b*) À medida que a frequência aumenta, um aumento no ângulo da onda é necessário para manter o defasamento transversal de 4π.

Agora, à medida que a frequência aumentar, o comprimento de onda diminuirá, e então a condição de comprimento de onda igual a um múltiplo inteiro de $2d$ não será mais alcançada. A resposta do modo é estabelecer componentes em z de $\mathbf{k}_u$ e $\mathbf{k}_d$, o que resulta no comprimento de onda menor sendo compensado por um aumento no comprimento de onda quando *medido na direção x*. A Figura 13.17 mostra esse efeito para o modo $m = 4$, no qual o ângulo da onda, θ_4, aumenta constantemente com o aumento da frequência. Com isso, o modo preserva precisamente a forma funcional do seu campo na direção x, mas estabelece um valor crescente de β_m à medida que a frequência é aumentada. Essa invariância no padrão espacial transversal significa que o modo manterá sua identidade em todas as frequências. A velocidade de grupo, expressa na Equação (57), também varia, o que significa que o ângulo de onda variável com a frequência é um mecanismo de dispersão da velocidade de grupo, conhecido simplesmente como *dispersão do guia de onda*. Pulsos que se propagam em um guia de onda monomodo, por exemplo, irão assim experimentar alargamento da maneira considerada na Seção 12.8.

Tendo encontrado o campo elétrico, podemos encontrar o campo magnético utilizando as equações de Maxwell. Notamos do nosso modelo de onda plana que esperamos obter componentes em x e em z de $\mathbf{H}_s$ para um modo TE. Usamos a equação de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu\mathbf{H}_s \tag{69}$$

onde, nesse caso em que existe apenas um componente em y para $\mathbf{E}_s$, temos

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = \frac{\partial E_{ys}}{\partial x}\mathbf{a}_z - \frac{\partial E_{ys}}{\partial z}\mathbf{a}_x = \kappa_m E_0 \cos(\kappa_m x)e^{-j\beta_m z}\mathbf{a}_z + j\beta_m E_0 \,\text{sen}(\kappa_m x)e^{-j\beta_m z}\mathbf{a}_x \tag{70}$$

Encontramos $\mathbf{H}_s$ dividindo ambos os lados da Equação (69) por $-j\omega\mu$. Executando essa operação na Equação (70), obtemos os dois componentes para o campo magnético:

$$H_{xs} = -\frac{\beta_m}{\omega\mu} E_0 \operatorname{sen}(\kappa_m x) e^{-j\beta_m z} \tag{71}$$

$$H_{zs} = j\frac{\kappa_m}{\omega\mu} E_0 \cos(\kappa_m x) e^{-j\beta_m z} \tag{72}$$

Juntos, esses dois componentes formam padrões em forma de caminhos fechados para $\mathbf{H}_s$ no plano xz, conforme pode ser verificado ao se utilizar os métodos de representação de linhas de força desenvolvidos na Seção 2.6.

É interessante considerar a intensidade de $\mathbf{H}_s$, encontrada por

$$|\mathbf{H}_s| = \sqrt{\mathbf{H}_s \cdot \mathbf{H}_s^*} = \sqrt{H_{xs} H_{xs}^* + H_{zs} H_{zs}^*} \tag{73}$$

Fazendo isso utilizando as Equações (71) e (72), temos

$$|\mathbf{H}_s| = \frac{E_0}{\omega\mu} \left(\kappa_m^2 + \beta_m^2\right)^{1/2} \left(\operatorname{sen}^2(\kappa_m x) + \cos^2(\kappa_m x)\right)^{1/2} \tag{74}$$

Considerando que $\kappa_m{}^2 + \beta_m{}^2 = k^2$ e usando a identidade $\operatorname{sen}^2(\kappa_m x) + \cos^2(\kappa_m x) = 1$, a Equação (74) se torna

$$|\mathbf{H}_s| = \frac{k}{\omega\mu} E_0 = \frac{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{\omega\mu} = \frac{E_0}{\eta} \tag{75}$$

onde $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$. Esse resultado é consistente com nosso entendimento de modos de guia de onda baseados na sobreposição de ondas planas, no qual a relação entre $\mathbf{E}_s$ e $\mathbf{H}_s$ é através da impedância intrínseca η do meio.

EP13.8. Determine a velocidade de grupo do modo $m = 1$ (TE ou TM) em um guia de placas paralelas preenchido com ar com $d = 0{,}5$ cm em $f =$ (*a*) 30 GHz, (*b*) 60 GHz e (*c*) 100 GHz.

Resp. 0; $2{,}6 \times 10^8$ m/s; $2{,}9 \times 10^8$ m/s

EP13.9. Observa-se que um modo TE em um guia de placas paralelas possui três máximos no seu padrão de campo elétrico entre $x = 0$ e $x = d$. Qual é o valor de m?

Resp. 3

13.5 GUIAS DE ONDA RETANGULARES

Nesta seção consideraremos guias de onda retangulares, uma estrutura normalmente utilizada na região de micro-ondas do espectro eletromagnético. O guia retangular é mostrado na Figura 13.7. Como sempre, a direção de propagação é ao longo do eixo z. O guia tem largura a ao longo de x e altura b ao longo de y. Podemos relacionar essa estrutura com a do guia de placas paralelas das seções anteriores, pensando nele

como dois guias de placas paralelas com orientações ortogonais montados de maneira a formar uma unidade. Temos, então, um par de paredes condutoras horizontais (ao longo da direção x) e um par de paredes verticais (ao longo de y), todas formando uma fronteira contínua. A equação de onda na sua forma tridimensional completa [Equação (59)] deve agora ser resolvida, pois geralmente teremos variações de campo nas três direções coordenadas.

No guia de placas paralelas, concluímos que o modo TEM pode existir, juntamente com os modos TE e TM. O guia de onda retangular suportará os modos TE e TM, mas *não suportará um modo TEM*. Isto porque, em contraste com o guia de placas paralelas, temos agora uma fronteira condutora que envolve completamente o plano transverso. A inexistência de TEM pode ser entendida ao lembrar que qualquer campo elétrico deve ter um componente tangencial nulo na fronteira. Isto significa que é impossível determinar um campo elétrico que não apresente variação nos caminhos laterais, o que é necessário para satisfazer essa condição de fronteira. Como $\mathbf{E}$ varia no plano transversal, o cômputo de $\mathbf{H}$, por meio de $\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$ *deve resultar* em um componente em z de $\mathbf{H}$ e, então, não é possível um modo TEM. Não podemos encontrar qualquer outra orientação de um $\mathbf{E}$ completamente transverso no guia que permita um $\mathbf{H}$ também completamente transverso.

13.5.1 Usando as Equações de Maxwell para relacionar os componentes de campo

Com os modos se dividindo nos tipos TE e TM, a aproximação padrão é inicialmente resolver a equação de onda para os componentes em z. Por definição, $E_z = 0$ em um modo TE e $H_z = 0$ em um modo TM. Em consequência, teremos uma solução para o modo TE ao resolver a equação de onda para H_z e, então, obteremos uma solução TM ao resolver para E_z. Usando esses resultados, pode-se obter todos os componentes de campo transversais diretamente das equações de Maxwell. Este procedimento pode parecer um pouco enfadonho, mas nos dá a certeza de que encontraremos todos os modos. Primeiramente, lidaremos com o problema de ter que obter os componentes transversais expressos pelos componentes em z.

Para começar o processo, consideremos que os fasores de campos elétrico e magnético serão funções de propagação progressiva em z, que exibirão variação espacial no plano xy. A única variação em z é a de uma onda progressiva propagante:

$$\mathbf{E}_s(x, y, z) = \mathbf{E}_s(x, y, 0)e^{-j\beta z} \tag{76a}$$

$$\mathbf{H}_s(x, y, z) = \mathbf{H}_s(x, y, 0)e^{-j\beta z} \tag{76b}$$

Podemos, assim, obter expressões para os componentes transversos dos fasores de campo pela avaliação dos componentes em x e y das equações rotacionais de Maxwell em um meio sem fontes. Na avaliação do rotacional, pela Equação (76) é evidente que $\partial/\partial z = -j\beta$. O resultado é

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu\mathbf{H}_s \;\rightarrow\; \begin{cases} \partial E_{zs}/\partial y + j\beta E_{ys} = -j\omega\mu H_{xs} \text{ (componente em } x) & (77a) \\ j\beta E_{xs} + \partial E_{zs}/\partial x = j\omega\mu H_{ys} \text{ (componente em } y) & (77b) \end{cases}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = j\omega\epsilon\mathbf{E}_s \;\rightarrow\; \begin{cases} \partial H_{zs}/\partial y + j\beta H_{ys} = j\omega\epsilon E_{xs} \text{ (componente em } x) & (78a) \\ j\beta H_{xs} + \partial H_{zs}/\partial x = -j\omega\epsilon E_{ys} \text{ (componente em } y) & (78b) \end{cases}$$

Agora, pares das equações anteriores podem ser resolvidos com o objetivo de expressar os componentes individuais de campo transverso pelas derivadas dos componentes em z de **E** e **H**. Por exemplo, as Equações (77a) e (78b) podem ser combinadas, eliminando E_{ys}, para resultar em

$$H_{xs} = \frac{-j}{\kappa^2}\left[\beta\frac{\partial H_{zs}}{\partial x} - \omega\epsilon\frac{\partial E_{zs}}{\partial y}\right] \tag{79a}$$

Então, usando as Equações (76b) e (77a), elimina-se E_{xs} entre elas para obter

$$H_{ys} = \frac{-j}{\kappa^2}\left[\beta\frac{\partial H_{zs}}{\partial y} + \omega\epsilon\frac{\partial E_{zs}}{\partial x}\right] \tag{79b}$$

Utilizando os mesmos pares de equações, os componentes transversos de campo elétrico são encontrados:

$$E_{xs} = \frac{-j}{\kappa^2}\left[\beta\frac{\partial E_{zs}}{\partial x} + \omega\mu\frac{\partial H_{zs}}{\partial y}\right] \tag{79c}$$

$$E_{ys} = \frac{-j}{\kappa^2}\left[\beta\frac{\partial E_{zs}}{\partial y} - \omega\mu\frac{\partial H_{zs}}{\partial x}\right] \tag{79d}$$

κ é definido da mesma maneira como no guia de placas paralelas [Equação (35)]:

$$\kappa = \sqrt{k^2 - \beta^2} \tag{80}$$

onde $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$. Na geometria de placas paralelas, verificamos que valores discretos de κ e β resultaram da análise, com subscritos do número inteiro do modo, m (κ_m e β_m). A interpretação de m foi o número de máximos de campo que ocorreram entre as placas (na direção x). No guia retangular, as variações de campo ocorrerão em x e y e, então, perceberemos que é necessário associar *dois* subscritos inteiros a κ e β, ou seja

$$\kappa_{mp} = \sqrt{k^2 - \beta_{mp}^2} \tag{81}$$

onde m e p indicam o número de variações de campo nas direções x e y. A forma da Equação (81) sugere que a teoria de onda plana (raio) poderia ser usada para obter os modos de campo no guia retangular, como foi executado na Seção 13.3 para o guia de placas paralelas. Isso é realmente o que ocorre aqui, e é prontamente realizado para casos onde as reflexões de onda plana ocorrem entre somente duas fronteiras opostas (topo para base ou lado para lado), e isto é verdadeiro somente para certos modos TE. O método torna-se complicado quando reflexões ocorrem em todas as quatro fronteiras. Mas, em qualquer caso, a interpretação de κ_{mp} é o componente transverso (plano xy) do vetor onda plana k, enquanto β_{mp} é o componente em z, como antes.

O próximo passo é resolver a equação de onda para os componentes em z de **E** e **H**, da qual encontraremos os campos dos modos TE e TM.

13.5.2 Modos TM

Para encontrar modos TM iniciamos com a equação de onda [Equação (59)], na qual derivadas com relação a z são equivalentes à multiplicação por $j\beta$. Escrevemos a equação para o componente em z de $\mathbf{E}_s$:

$$\frac{\partial^2 E_{zs}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{zs}}{\partial y^2} + (k^2 - \beta_{mp}^2)E_{zs} = 0 \tag{82}$$

A solução da Equação (82) pode ser escrita como uma soma de termos; cada um deles envolve o produto de três funções que exibem variação individual com x, y e z:

$$E_{zs}(x, y, z) = \sum_{m,p} F_m(x)\, G_p(y) \exp\,(-j\beta_{mp}\, z) \tag{83}$$

onde as funções $F_m(x)$ e $G_p(y)$ (não normalizadas) devem ser determinadas. Cada termo da Equação (83) corresponde a um modo do guia e será uma solução da Equação (82). Para determinar as funções, um único termo na Equação (83) é substituído na Equação (82). Deve-se notar que todas as derivadas são aplicadas a funções de uma única variável (e, assim, as derivadas parciais tornam-se derivadas totais), e usando a Equação (81), o resultado é

$$G_p(y)\frac{d^2 F_m}{dx^2} + F_m(x)\frac{d^2 G_p}{dy^2} + \kappa_{mp}^2\, F_m(x)\, G_p(y) = 0 \tag{84}$$

no qual o termo $\exp(-j\beta_{mp}\, z)$ foi eliminado. Rearranjando a Equação (84), tem-se

$$\underbrace{\frac{1}{F_m}\frac{d^2 F_m}{dx^2}}_{-\kappa_m^2} + \underbrace{\frac{1}{G_p}\frac{d^2 G_p}{dy^2}}_{-\kappa_p^2} + \kappa_{mp}^2 = 0 \tag{85}$$

Os termos na Equação (85) são agrupados de tal forma que a variação em x está no primeiro termo, que varia *somente* com x, e toda variação em y está no segundo termo, que varia *somente* com y. Agora, considere o que aconteceria se x variasse enquanto y fosse mantido fixo. O segundo e terceiro termos deveriam ser fixos, e a Equação (85) seria sempre mantida. Em consequência, o primeiro termo variável com x deve ser uma constante. Esta constante é denotada $-\kappa_m^2$, como indicado na Equação (85). O mesmo é verdadeiro para o segundo termo, que deve também ser uma constante se y varia enquanto x é fixo. Associamos o segundo termo ao valor constante κ_p^2, como indicado. A Equação (85) então afirma que

$$\kappa_{mp}^2 = \kappa_m^2 + \kappa_p^2 \tag{86}$$

a qual sugere uma interpretação geométrica imediata: como κ_{mp} é um componente no plano transverso do vetor onda k, κ_m e κ_p são claramente os componentes em x e y de κ_{mp} (e de k) – novamente, pode-se pensar nas ondas planas e na maneira como elas saltariam no guia de onda para formar o modo total. Também indicado na Equação (86) está o fato de que κ_m e κ_p serão funções, respectivamente, dos inteiros m e p, como já frisado.

Sob as condições anteriores, a Equação (85) será separada em duas equações – uma em cada variável:

$$\frac{d^2 F_m}{dx^2} + \kappa_m^2\, F_m = 0 \tag{87a}$$

$$\frac{d^2G_p}{dy^2} + \kappa_p^2 G_p = 0 \tag{87b}$$

A Equação (87) é agora facilmente resolvida. Obtemos

$$F_m(x) = A_m \cos(\kappa_m x) + B_m \operatorname{sen}(\kappa_m x) \tag{88a}$$

$$G_p(y) = C_p \cos(\kappa_p y) + D_p \operatorname{sen}(\kappa_p y) \tag{88b}$$

Usando essas equações juntamente com a Equação (83), a solução geral para o componente z de $\mathbf{E}_s$ para um único modo TM pode ser construída:

$$E_{zs} = [A_m \cos(\kappa_m x) + B_m \operatorname{sen}(\kappa_m x)][C_p \cos(\kappa_p y) + D_p \operatorname{sen}(\kappa_p y)] \exp(-j\beta_{mp} z) \tag{89}$$

As constantes na Equação (89) podem ser avaliadas pela aplicação das condições de fronteira do campo em todas as superfícies. Especificamente, como E_{zs} é tangente a todas as superfícies condutoras, ele deve desaparecer sobre todas elas. Referindo-se à Figura 13.7, as condições de fronteira são

$$E_{zs} = 0 \text{ em } x = 0, \; y = 0, \; x = a, \quad \text{e} \quad y = b$$

Obter campo nulo em $x = 0$ e $y = 0$ corresponde a anular os termos em cosseno na Equação (89) (direcionando $A_m = C_p = 0$). Os valores de κ_m e κ_p que aparecem nos termos em seno restantes são, então, determinados da seguinte forma, garantindo campo zero em $x = a$ e $y = b$:

$$\kappa_m = \frac{m\pi}{a} \tag{90a}$$

$$\kappa_p = \frac{p\pi}{b} \tag{90b}$$

Usando esses resultados e definindo $B = B_m D_p$, a Equação (89) torna-se:

$$\boxed{E_{zs} = B \operatorname{sen}(\kappa_m x) \operatorname{sen}(\kappa_p y) \exp(-j\beta_{mp} z)} \tag{91a}$$

Agora, para encontrar os componentes de campo restantes (transversos), substituímos a Equação (91a) na Equação (79) para obter:

$$\boxed{E_{xs} = -j\beta_{mp} \frac{\kappa_m}{\kappa_{mp}^2} B \cos(\kappa_m x) \operatorname{sen}(\kappa_p y) \exp(-j\beta_{mp} z)} \tag{91b}$$

$$\boxed{E_{ys} = -j\beta_{mp} \frac{\kappa_p}{\kappa_{mp}^2} B \operatorname{sen}(\kappa_m x) \cos(\kappa_p y) \exp(-j\beta_{mp} z)} \tag{91c}$$

$$\boxed{H_{xs} = j\omega\epsilon \frac{\kappa_p}{\kappa_{mp}^2} B \operatorname{sen}(\kappa_m x) \cos(\kappa_p y) \exp(-j\beta_{mp} z)} \tag{91d}$$

$$\boxed{H_{ys} = -j\omega\epsilon \frac{\kappa_m}{\kappa_{mp}^2} B \cos(\kappa_m x) \operatorname{sen}(\kappa_p y) \exp(-j\beta_{mp} z)} \tag{91e}$$

Os componentes de campo anteriores pertencem aos modos designados por TM_{mp}. Note que para esses modos m e p devem ser maiores ou iguais a 1. O valor zero para cada inteiro irá anular todos os campos.

13.5.3 Modos TE

Para obter os campos de modo TE, resolvemos a equação de onda para o componente z de **H** e, então, usamos a Equação (79), como antes, para determinar os componentes transversos. A equação de onda é a mesma que a Equação (82), exceto pelo fato de que E_{zs} é substituído por H_{zs}:

$$\frac{\partial^2 H_{zs}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_{zs}}{\partial y^2} + (k^2 - \beta_{mp}^2)H_{zs} = 0 \tag{92}$$

e a solução é da forma:

$$H_{zs}(x, y, z) = \sum_{m,p} F'_m(x)\, G'_p(y) \exp(-j\beta_{mp}\, z) \tag{93}$$

O procedimento é idêntico àquele dos modos TM, e a solução geral será

$$H_{zs} = [A'_m \cos(\kappa_m x) + B'_m \operatorname{sen}(\kappa_m x)][C'_p \cos(\kappa_p y) + D'_p \operatorname{sen}(\kappa_p y)] \exp(-j\beta_{mp}\, z) \tag{94}$$

Novamente, a expressão é simplificada pelo uso apropriado das condições de fronteira. Sabemos que o campo elétrico tangencial deve desaparecer em todas as superfícies condutoras. Quando relacionamos as derivadas do campo elétrico com as derivadas do magnético, usando as Equações (79c) e (79d), as seguintes condições surgem:

$$E_{xs}\Big|_{y=0,b} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial H_{zs}}{\partial y}\Big|_{y=0,\, b} = 0 \tag{95a}$$

$$E_{ys}\Big|_{x=0,a} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial H_{zs}}{\partial x}\Big|_{x=0,\, a} = 0 \tag{95b}$$

As condições de fronteira são agora aplicadas para a Equação (94), resultando, para a Equação (95a):

$$\frac{\partial H_{zs}}{\partial y} = [A'_m \cos(\kappa_m x) + B'_m \operatorname{sen}(\kappa_m x)] \times \underline{[-\kappa_p C'_p \operatorname{sen}(\kappa_p y) + \kappa_p D'_p \cos(\kappa_p y)]} \exp(-j\beta_{mp}\, z)$$

Os termos grifados são aqueles que foram modificados pela diferenciação parcial. Requerer que este resultado seja zero em $y = 0$ e $y = b$ direciona o termo $\cos(\kappa_p y)$ a zero ($D'_p = 0$) e a $\kappa_p = p\pi/b$, como antes. Aplicando a Equação (95b) à Equação (94), temos

$$\frac{\partial H_{zs}}{\partial x} = \underline{[-\kappa_m A'_m \operatorname{sen}(\kappa_m x) + \kappa_m B'_m \cos(\kappa_m x)]} \times [C'_p \cos(\kappa_p y) + D'_p \operatorname{sen}(\kappa_p y)] \exp(-j\beta_{mp}\, z)$$

onde, novamente, o termo grifado foi modificado pela diferenciação parcial com relação a x. Determinar que esse resultado seja nulo em $x = 0$ e $x = a$ leva a $\cos(\kappa_m x)$ igual a zero ($B'_m = 0$) e a $\kappa_m = m\pi/a$, como antes. Com todas as condições de fronteira anteriormente aplicadas, a expressão final para H_{zs} é

$$H_{zs} = A \cos(\kappa_m x) \cos(\kappa_p y) \exp(-j\beta_{mp} z) \quad (96a)$$

onde definimos $A = A'_m C'_p$. Aplicando as Equações (79*a*) a (79*d*) à Equação (96*a*), os componentes transversais do campo são fornecidos:

$$H_{xs} = j\beta_{mp} \frac{\kappa_m}{\kappa_{mp}^2} A \operatorname{sen}(\kappa_m x) \cos(\kappa_p y) \exp(-j\beta_{mp} z) \quad (96b)$$

$$H_{ys} = j\beta_{mp} \frac{\kappa_p}{\kappa_{mp}^2} A \cos(\kappa_m x) \operatorname{sen}(\kappa_p y) \exp(-j\beta_{mp} z) \quad (96c)$$

$$E_{xs} = j\omega\mu \frac{\kappa_p}{\kappa_{mp}^2} A \cos(\kappa_m x) \operatorname{sen}(\kappa_p y) \exp(-j\beta_{mp} z) \quad (96d)$$

$$E_{ys} = -j\omega\mu \frac{\kappa_m}{\kappa_{mp}^2} A \operatorname{sen}(\kappa_m x) \cos(\kappa_p y) \exp(-j\beta_{mp} z) \quad (96e)$$

Esses componentes de campo pertencem aos modos denominados TE_{mp}. Para esses modos, *m* ou *p* podem ser zero, direcionando assim à possibilidade dos importantes casos TE_{m0} ou TE_{0p}, como será discutido posteriormente. Algumas ilustrações muito boas dos modos TE e TM são apresentadas na Referência 3.

13.5.4 Condições de Corte

A constante de fase para um dado modo pode ser expressa pela utilização da Equação (81):

$$\beta_{mp} = \sqrt{k^2 - \kappa_{mp}^2} \quad (97)$$

Então, usando a Equação (86), junto com as Equações (90*a*) e (90*b*), temos

$$\beta_{mp} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{p\pi}{b}\right)^2} \quad (98)$$

Esse resultado pode ser escrito de forma consistente com a Equação (42), usando $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ e definindo uma frequência radiana de corte, ω_{Cmp}, apropriada para o guia retangular. Obtemos:

$$\beta_{mp} = \omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{Cmp}}{\omega}\right)^2} \quad (99)$$

onde

$$\omega_{Cmp} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{b}\right)^2\right]^{1/2} \quad (100)$$

Como discutido para o guia de placas paralelas, a partir da Equação (99) fica novamente claro que a frequência de operação, ω, deve exceder a frequência de corte, ω_{Cmp}, para obtenção de um valor real para β_{mp} (e, assim, permitir que o modo *mp* propague). A Equação (100) aplica-se a ambos os modos, TE e TM, e assim alguma combinação dos tipos de modo pode estar presente (ou acima do corte) em uma dada frequência. É evidente que a escolha das dimensões do guia, a e b, juntamente com as propriedades do material, ϵ_r e μ_r, determinará o número de modos que propagarão. Para o caso típico de $\mu_r = 1$, usando $n = \sqrt{\epsilon_r}$, e identificando a velocidade da luz, $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$, podemos reescrever a Equação (100) em uma forma consistente com a Equação (41):

$$\omega_{Cmp} = \frac{c}{n}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{b}\right)^2\right]^{1/2} \tag{101}$$

Isso direcionaria a uma expressão para o comprimento de onda de corte, λ_{Cmp}, de uma maneira consistente com a Equação (43):

$$\lambda_{Cmp} = \frac{2\pi c}{\omega_{Cmp}} = 2n\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{p}{b}\right)^2\right]^{-1/2} \tag{102}$$

λ_{Cmp} é o comprimento de onda do *espaço livre* no corte. Se medido no meio que preenche o guia de onda, o comprimento de onda de corte seria dado pela Equação (102) dividida por n.

Agora, em uma forma consistente com a Equação (44), a Equação (99) torna-se

$$\beta_{mp} = \frac{2\pi n}{\lambda}\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{Cmp}}\right)^2} \tag{103}$$

onde λ é o comprimento de onda no espaço livre. Como dissemos anteriormente, o modo TE_{mp} ou o TM_{mp} pode propagar se seu comprimento de onda de operação, λ, for menor que λ_{Cmp}.

13.5.5 Casos especiais: modos TE_{m0} e TE_{0p}

O modo mais importante no guia retangular é aquele que pode propagar por si mesmo. Como sabemos, esse modo terá a menor frequência de corte (ou o maior comprimento de onda de corte), de maneira que, em certa faixa de frequências, esse modo estará acima do corte, enquanto todos os outros, abaixo. Por inspeção da Equação (101) e notando que $a > b$, a menor frequência de corte ocorrerá para o modo no qual $m = 1$ e $p = 0$. Esse modo corresponde ao TE_{10} [lembre que um modo TM_{10} não existe, como mostrado na Equação (91)]. Esse modo, bem como aqueles do mesmo tipo geral, possuem a mesma forma dos modos de estrutura de placas paralelas.

Os campos especificados para a família de modos TE_{m0} são obtidos das Equações (96*a*) a (96*e*), considerando $p = 0$, que significa, usando as Equações (86) e (90), que

$$\kappa_m = \kappa_{mp}\Big|_{p=0} = \frac{m\pi}{a} \tag{104}$$

e $\kappa_p = 0$. Sob essas condições, os únicos componentes de campo que sobrevivem na Equação (91) serão: E_{ys}, H_{xs} e H_{zs}. É conveniente definir as equações de campo expressando-as pela amplitude do campo elétrico, E_0, a qual é composta por todos os termos de amplitude na Equação (96*e*). Especificamente, define-se

$$E_0 = -j\omega\mu\frac{\kappa_m}{\kappa_{m0}^2}A = -j\frac{\omega\mu}{\kappa_m}A \tag{105}$$

Substituindo as Equações (104) e (105) nas Equações (96*e*), (96*c*) e (96*a*) obtém-se as seguintes expressões para os campos de modo TE_{m0}:

$$\boxed{E_{ys} = E_0 \operatorname{sen}(\kappa_m x)\, e^{-j\beta_{m0}z}} \tag{106}$$

$$\boxed{H_{xs} = -\frac{\beta_{m0}}{\omega\mu}E_0 \operatorname{sen}(\kappa_m x)\, e^{-j\beta_{m0}z}} \tag{107}$$

$$\boxed{H_{zs} = j\frac{\kappa_m}{\omega\mu}E_0 \cos(\kappa_m x) e^{-j\beta_{m0}z}} \tag{108}$$

Pode-se verificar que essas expressões são idênticas às dos campos de placas paralelas, correspondentes às Equações (65), (71) e (72). Para TE_{m0}, novamente notamos que os subscritos indicam que existem *m* meio ciclos do campo elétrico em uma dimensão *x* e não existe variação em *y*. A frequência de corte para o modo TE_{m0} é dada pela Equação (101), apropriadamente modificada:

$$\omega_{Cm0} = \frac{m\pi c}{na} \tag{109}$$

Usando a Equação (109) na Equação (99), a constante de fase é

$$\beta_{m0} = \frac{n\omega}{c}\sqrt{1 - \left(\frac{m\pi c}{\omega n a}\right)^2} \tag{110}$$

As implicações sobre o comportamento do modo acima e abaixo da frequência de corte são exatamente as mesmas que encontramos para o guia de placas paralelas. A análise de onda plana é também realizada da mesma maneira. Os modos TE_{m0} podem ser modelados como ondas planas que propagam para baixo do guia, devido à reflexão entre as paredes verticais laterais.

O campo elétrico do modo fundamental (TE_{10}) é, a partir da Equação (106):

$$\boxed{E_{ys} = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta_{10}z}} \tag{111}$$

Esse campo está desenhado na Figura 13.18*a*. O campo está polarizado verticalmente, termina nas placas do topo e da base, e é nulo nas duas paredes verticais, como é requerido da condição de fronteira do campo elétrico tangencial em uma superfície condutora. Seu comprimento de onda de corte é determinado pela Equação (102) como

$$\boxed{\lambda_{C10} = 2na} \tag{112}$$

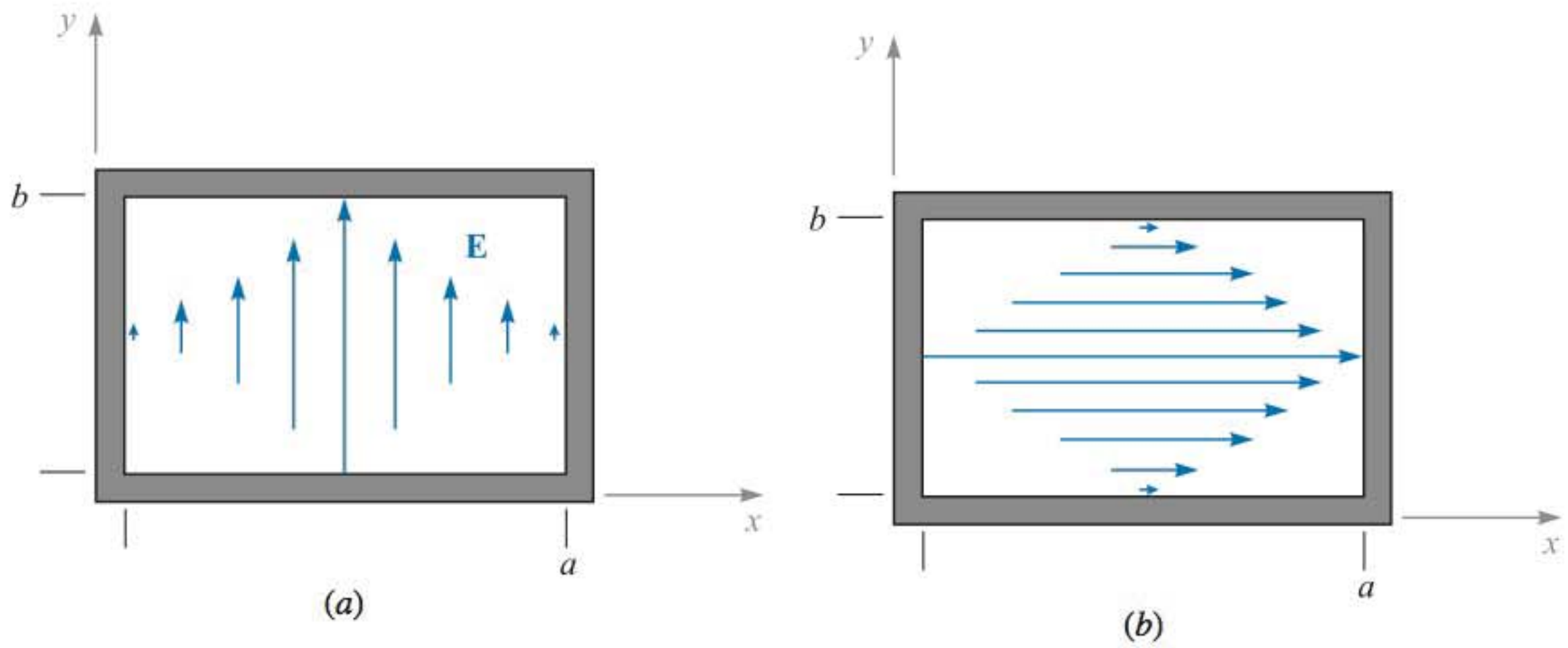



Figura 13.18 Configurações de campo elétrico para os modos (*a*) TE_{10} e (*b*) TE_{01} em um guia de onda retangular.

que significa que o corte para esse modo é obtido quando a dimensão horizontal do guia, *a*, é igual à metade do comprimento de onda (como medido no meio).

Outra possibilidade é a configuração do campo TE_{0p}, que consiste em um campo elétrico polarizado horizontalmente. A Figura 13.18*b* mostra o campo para TE_{01}. Os campos específicos para a família TE_{0p} são obtidos das Equações (96*a*) a (96*e*), considerando $m = 0$, o que significa, usando as Equações (86) e (90), que

$$\kappa_p = \kappa_{mp}\bigg|_{m=0} = \frac{p\pi}{b} \tag{113}$$

e $\kappa_m = 0$. Agora, os componentes de campo que restam das Equações (91*a*) a (91*e*) serão: E_{xs}, H_{ys} e H_{zs}. Define-se assim a amplitude de campo elétrico, E_0', que é composta de todos os termos de amplitude na Equação (96*d*):

$$E_0' = j\omega\mu\frac{\kappa_p}{\kappa_{0p}^2}A = j\frac{\omega\mu}{\kappa_p}A \tag{114}$$

Utilizando as Equações (113) e (114) nas Equações (96*d*), (96*b*) e (96*a*) obtém-se as seguintes expressões para os campos de modo TE_{0p}:

$$E_{xs} = E_0 \operatorname{sen}\left(\kappa_p y\right) e^{-j\beta_{0p}z} \tag{115}$$

$$H_{ys} = \frac{\beta_{0p}}{\omega\mu} E_0 \operatorname{sen}\left(\kappa_p y\right) e^{-j\beta_{0p}z} \tag{116}$$

$$H_{zs} = -j\frac{\kappa_p}{\omega\mu} E_0 \cos\left(\kappa_p y\right) e^{-j\beta_{0p}z} \tag{117}$$

onde a frequência de corte será

$$\omega_{C0p} = \frac{p\pi c}{nb} \tag{118}$$

EXEMPLO 13.4

Um guia de onda retangular preenchido com ar tem dimensões $a = 2$ cm e $b = 1$ cm. Determine a faixa de frequências na qual o guia irá operar em modo único (TE_{10}).

Solução. Uma vez que o guia é preenchido com ar, $n = 1$, e segundo o que a Equação (109) fornece, para $m = 1$:

$$f_{C10} = \frac{\omega_{C10}}{2\pi} = \frac{c}{2a} = \frac{3 \times 10^{10}}{2(2)} = 7{,}5 \text{ GHz}$$

O próximo modo de ordem mais alta será TE_{20} ou TE_{01}, os quais, de acordo com a Equação (100), terão a mesma frequência de corte, pois $a = 2b$. Essa frequência será o dobro daquela encontrada para TE_{10}, ou 15 GHz. Logo, a faixa de frequências de operação na qual o guia terá modo único será 7,5 GHz $< f <$ 15 GHz.

Considerando a maneira como os guias de onda retangulares funcionam, perguntamos: por que eles são utilizados e quando são úteis? Vamos considerar, por um momento, a operação de uma linha de transmissão em frequências altas o suficiente para que possam ocorrer modos de guia de onda. O estabelecimento de modos guiados em uma linha de transmissão, conhecido como *moding*, é de fato um problema que precisa ser evitado, porque pode causar distorção de sinal. Um sinal introduzido em uma linha desse tipo terá sua potência dividida em alguma proporção entre os vários modos. A potência do sinal em cada modo se propaga com uma velocidade de grupo única para aquele modo. Com a potência assim distribuída, ocorrerá distorção em distâncias suficientes à medida que os componentes do sinal entre os modos perdem sincronia uns com os outros, devido aos diferentes atrasos de tempo (atrasos de grupo) associados aos modos diferentes. Encontramos esse conceito no Exemplo 13.3.

O problema anterior de *dispersão modal* em linhas de transmissão é evitado assegurando-se que apenas o modo TEM se propague, e que todos os modos de guia de onda estejam abaixo da frequência de corte. Isso é conseguido utilizando-se dimensões de linhas menores que a metade do comprimento de onda do sinal ou, então, assegurando-se um limite superior para a frequência de operação em uma dada linha. Mas é mais complicado que isso.

Na Seção 13.1, vimos que com o aumento da frequência as perdas na linha crescem como resultado do efeito pelicular. Isso é manifestado pelo aumento na resistência em série por unidade de comprimento, R. Pode-se compensar isso aumentando uma ou mais dimensões na seção reta da linha, conforme mostrado, por exemplo, nas Equações (7) e (12), mas apenas até o ponto no qual o *moding* possa ocorrer. Tipicamente, o aumento das perdas com o aumento da frequência tornará a linha de transmissão inútil antes do estabelecimento do *moding*, mas ainda não se pode aumentar as dimensões da linha para reduzir as perdas sem considerar a possibilidade de *moding*. Essa limitação nas dimensões também limita a capacidade da linha de lidar com potência, porque a tensão na qual a disrupção no dielétrico ocorre decresce com a diminuição da separação entre os condutores. Consequentemente, o uso de linhas de transmissão à medida que as frequências são aumentadas para além de certo ponto torna-se indesejável, pois as perdas se tornarão excessivas e a limitação nas dimensões limitarão a capacidade de lidar com potência. Em vez disso, consideramos outras estruturas de guias, entre as quais está o guia retangular.

Já que o guia retangular não suportará um modo TEM, ele não operará até que a frequência exceda a frequência de corte do modo guiado de ordem mais baixa da estrutura. Logo, um guia deve ser construído com tamanho suficiente para que se alcance isso em uma dada frequência. As dimensões transversais necessárias serão, consequentemente, maiores que as de uma linha de transmissão projetada para suportar apenas o modo TEM. O tamanho aumentado, somado ao fato de que existe mais área de superfície condutora que em uma linha de transmissão de volume igual, significa que as perdas serão substancialmente menores na estrutura do guia de onda retangular. Além disso, os guias suportarão mais potência em uma dada intensidade de campo elétrico que uma linha de transmissão, já que o guia retangular terá área maior de seção reta.

Ainda assim, guias tubulares ocos devem operar em modo único de forma a evitar problemas de distorção do sinal que aparecem na transmissão multimodal. Isso significa que os guias devem ter dimensões que operem acima da frequência de corte do modo de ordem mais baixa, mas abaixo da frequência de corte do próximo modo de ordem mais alta, conforme demonstrado no Exemplo 13.4. Se aumentarmos a frequência de operação novamente, as dimensões transversais do guia devem ser diminuídas para se manter a operação em modo único. Isso pode ser feito até o ponto no qual as perdas por efeito pelicular se tornam novamente problemáticas (lembre-se que a profundidade de penetração decresce com o aumento da frequência, além de ocorrer uma diminuição da superfície metálica com a diminuição do tamanho do guia). Além disso, os guias se tornam muito difíceis de serem fabricados, e as tolerâncias para casamento se tornam mais restritas. Assim, novamente, à medida que as frequências são aumentadas ainda mais, procuramos por outro tipo de estrutura.

EP13.10. Especifique a largura mínima, a, e a altura máxima, b, de um guia retangular preenchido com ar de forma que ele opere em modo único na faixa de frequências $15\text{ GHz} < f < 20\text{ GHz}$.

Resp. 1 cm; 0,75 cm.

13.6 GUIAS DE ONDA DIELÉTRICOS PLANOS

Quando as perdas por efeito pelicular se tornam excessivas, uma boa maneira de eliminá-las é remover inteiramente o metal da estrutura e utilizar as interfaces entre os dielétricos como as superfícies de confinamento. Obtemos então um *guia de onda dielétrico*. De forma básica, o *guia de onda simétrico laminado* é mostrado na Figura 13.19. A estrutura é assim chamada por causa de sua simetria vertical em relação ao eixo z. Considere-se que o guia tem largura em y muito maior que a espessura d da lâmina, de forma que o problema se torna bidimensional, com os campos presumivelmente variando com x e com z enquanto são independentes de y. O guia laminado funciona de forma muito parecida com o guia de placas paralelas, exceto pela ocorrência de reflexões de onda nas interfaces entre dielétricos, os quais possuem índices de refração diferentes, n_1 para a lâmina e n_2 para as regiões acima e abaixo. No guia dielétrico a reflexão total é necessária; logo, o ângulo de incidência deve exceder o ângulo crítico. Consequentemente, conforme descrito na Seção 12.6, o índice da

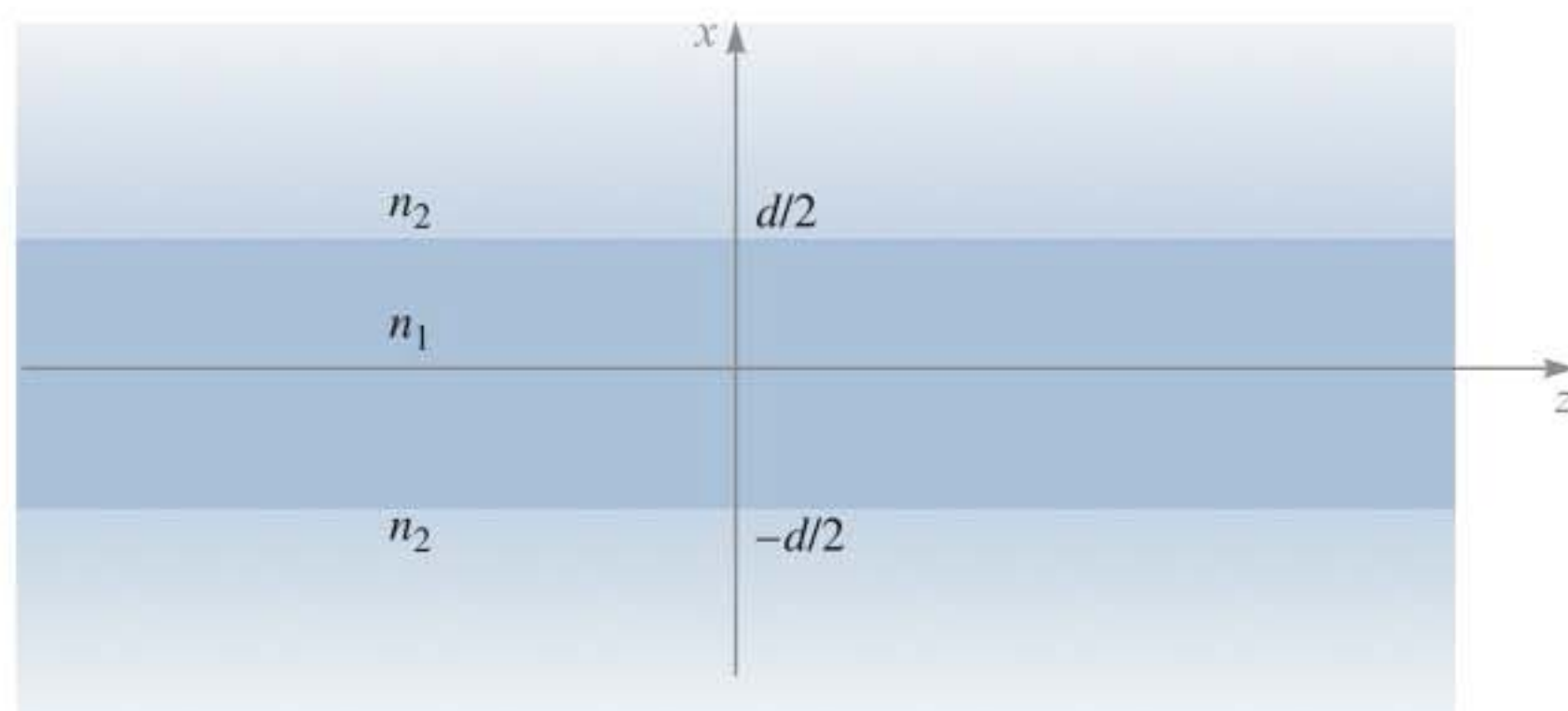



Figura 13.19 Estrutura de um guia de onda dielétrico simétrico laminado, no qual ondas se propagam ao longo de *z*. Considera-se o guia infinito na direção *y*, tornando assim o problema bidimensional.

lâmina, n_1, deve ser maior que o dos materiais em volta, n_2. Guias dielétricos diferem de guias condutores porque neles a potência não está completamente confinada à lâmina, mas reside parcialmente acima e abaixo.

Guias dielétricos são usados primariamente em frequências óticas (da ordem de 10^{14} Hz). Novamente, as dimensões transversais do guia devem ser mantidas na ordem do comprimento de onda para se atingir a operação monomodo. Vários métodos de fabricação podem ser utilizados para se conseguir isso. Como exemplo, uma placa de vidro pode ser dopada com materiais que aumentarão o índice de refração. O processo de dopagem permite que materiais sejam introduzidos apenas dentro de uma fina camada adjacente à superfície que possui poucos micrômetros de espessura.

Para entender a operação do guia, considere a Figura 13.20, a qual mostra uma onda se propagando por uma lâmina através de reflexões múltiplas, mas onde ocorre *transmissão parcial* para as regiões superior e inferior em cada incidência na fronteira. Os vetores de onda são mostrados nas regiões central e superior, juntamente com seus componentes nas direções x e z. Conforme encontramos no Capítulo 12, os componentes em z (β) de todos os vetores de onda são iguais, caso as condições de fronteira de campo nas interfaces sejam satisfeitas para todas as posições e por todo o tempo. A transmissão parcial nas fronteiras é, evidentemente, uma situação indesejada, pois a potência na lâmina gradualmente se perde por fuga. Temos então uma *onda com fuga* se propagando na estrutura, enquanto precisamos ter um modo guiado. Note que em cada caso temos ainda as duas possibilidades de polarização da onda e a designação resultante dos modos – TE ou TM.

Uma reflexão total da potência nas fronteiras para as ondas TE ou TM implica, respectivamente, que $|\Gamma_s|^2$ ou $|\Gamma_p|^2$ seja unitário; os seus coeficientes de reflexão foram dados nas Equações (71) e (69) no Capítulo 12:

$$\Gamma_s = \frac{\eta_{2s} - \eta_{1s}}{\eta_{2s} + \eta_{1s}} \tag{119}$$

e

$$\Gamma_p = \frac{\eta_{2p} - \eta_{1p}}{\eta_{2p} + \eta_{1p}} \tag{120}$$

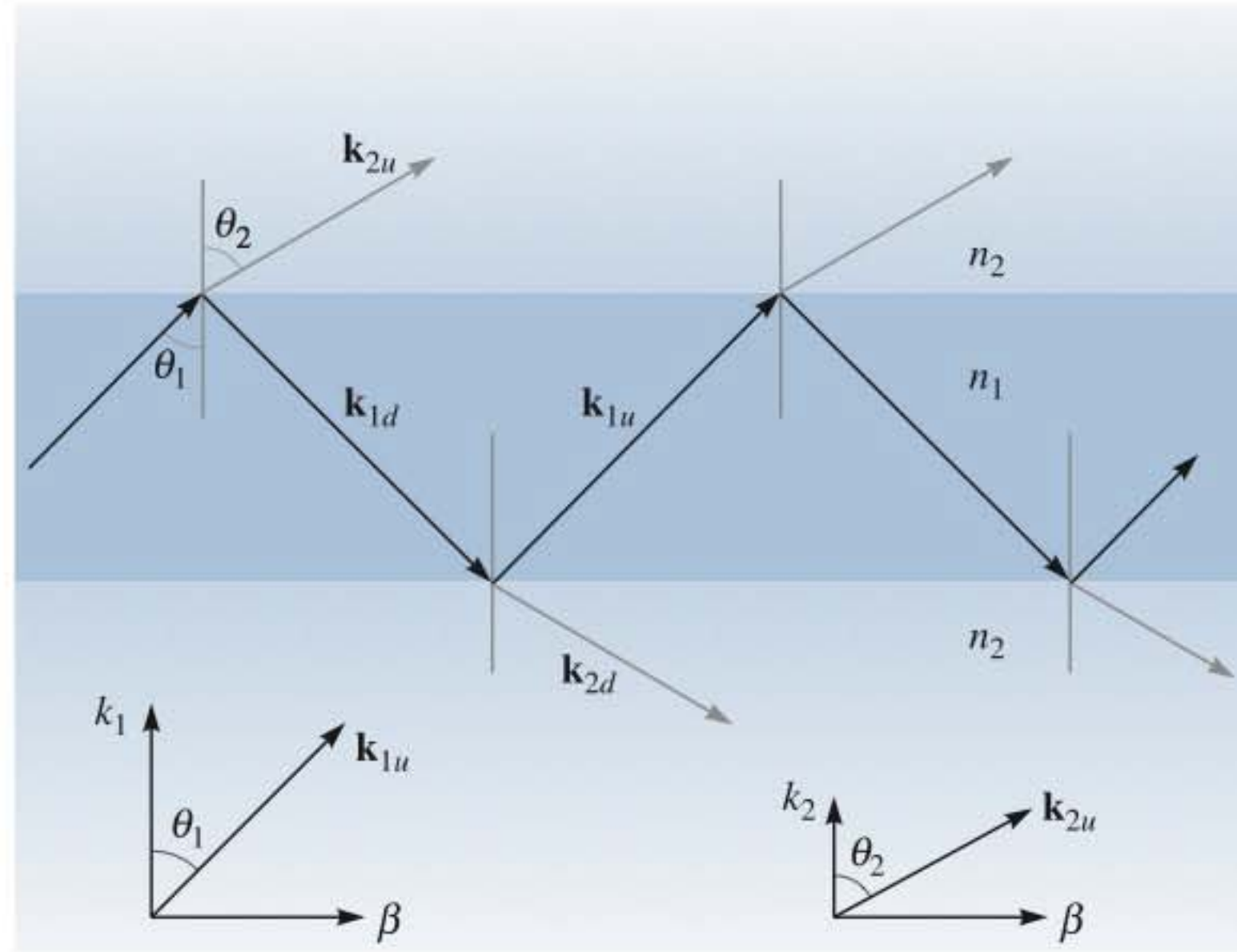



Figura 13.20 Geometria da onda plana de uma onda com fuga em um guia de onda simétrico laminado. Para um modo guiado, reflexão total ocorre no interior, e os componentes em x de $\mathbf{k}_{2u}$ e $\mathbf{k}_{2d}$ são imaginários.

Conforme discutido na Seção 12.6, precisamos que as impedâncias efetivas η_{2s} ou η_{2p} sejam puramente imaginárias, zero ou infinitas se as Equações (119) ou (120) precisarem ter amplitude unitária. Sabendo disso

$$\eta_{2s} = \frac{\eta_2}{\cos\theta_2} \tag{121}$$

e

$$\eta_{2p} = \eta_2 \cos\theta_2 \tag{122}$$

a condição necessária é que cos θ_2 seja zero ou imaginário, o qual é calculado, de acordo com a Equação (75), Seção 12.6, por

$$\cos\theta_2 = \left[1 - \text{sen}^2\,\theta_2\right]^{1/2} = \left[1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \text{sen}^2\,\theta_1\right]^{1/2} \tag{123}$$

Como resultado, precisamos que

$$\theta_1 \geq \theta_c \tag{124}$$

onde o ângulo crítico é definido como

$$\text{sen}\,\theta_c = \frac{n_2}{n_1} \tag{125}$$

Agora, pela geometria da Figura 13.20, podemos construir a distribuição de campo de uma onda TE no guia utilizando superposição de ondas planas. Na região da lâmina ($-d/2 < x < d/2$), temos

$$E_{y1s} = E_0 e^{-j\mathbf{k}_{1u}\cdot\mathbf{r}} \pm E_0 e^{-j\mathbf{k}_{1d}\cdot\mathbf{r}} \qquad \left(-\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2}\right) \tag{126}$$

onde

$$\mathbf{k}_{1u} = \kappa_1 \mathbf{a}_x + \beta \mathbf{a}_z \tag{127}$$

e

$$\mathbf{k}_{1d} = -\kappa_1 \mathbf{a}_x + \beta \mathbf{a}_z \tag{128}$$

O segundo termo na Equação (126) pode ser somado ao primeiro termo ou subtraído deste, já que qualquer um dos dois casos resultaria em uma distribuição simétrica de intensidade na direção x; esse é o resultado esperado porque o guia é simétrico. Agora, utilizando $\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + z\mathbf{a}_z$, a Equação (126) se torna

$$E_{y1s} = E_0[e^{j\kappa_1 x} + e^{-j\kappa_1 x}]e^{-j\beta z} = 2E_0 \cos(\kappa_1 x)e^{-j\beta z} \tag{129}$$

para a escolha do sinal de mais na Equação (126), e

$$E_{y1s} = E_0[e^{j\kappa_1 x} - e^{-j\kappa_1 x}]e^{-j\beta z} = 2jE_0 \operatorname{sen}(\kappa_1 x)e^{-j\beta z} \tag{130}$$

se o sinal de menos for escolhido. Uma vez que $\kappa_1 = n_1 k_0 \cos\theta_1$, vemos que valores maiores de κ_1 implicam valores menores de θ_1 em uma dada frequência. Além disso, valores maiores de κ_1 resultam em um maior número de oscilações espaciais do campo elétrico na dimensão transversa, conforme mostram as Equações (129) e (130). Encontramos comportamento similar no guia de placas paralelas. No guia laminado, assim como no guia de placas paralelas, associamos modos de ordem maior com valores crescentes de κ_1.[6]

Nas regiões acima e abaixo da lâmina, as ondas se propagam de acordo com os vetores de onda $\mathbf{k}_{2u}$ e $\mathbf{k}_{2d}$ conforme mostrado na Figura 13.20. Acima da lâmina, por exemplo, $(x > d/2)$, o campo elétrico TE será da forma

$$E_{y2s} = E_{02}e^{-j\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} = E_{02}e^{-j\kappa_2 x}e^{-j\beta z} \tag{131}$$

Entretanto, $\kappa_2 = n_2 k_0 \cos\theta_2$, onde $\cos\theta_2$, dado pela Equação (123), é imaginário. Podemos então escrever

$$\kappa_2 = -j\gamma_2 \tag{132}$$

onde γ_2 é real e dado por (utilizando a Equação 123)

$$\gamma_2 = j\kappa_2 = jn_2 k_0 \cos\theta_2 = jn_2 k_0(-j)\left[\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta_1 - 1\right]^{1/2} \tag{133}$$

A Equação (131) agora se torna

$$E_{y2s} = E_{02}e^{-\gamma_2(x-d/2)}e^{-j\beta z} \qquad \left(x > \frac{d}{2}\right) \tag{134}$$

[6] Seria apropriado adicionar o subscrito no número do modo, m, a k_1, k_2, β e θ_1, já que, conforme ocorria para os guias metálicos, vamos obter valores discretos para essas grandezas. Para manter a notação simples, o subscrito m foi suprimido, e o consideraremos subentendido. Novamente, os subscritos 1 e 2 nesta seção indicam, respectivamente, as *regiões* da lâmina e da parte envolvente, e não têm nada a ver com o número do modo.

onde a variável x na Equação (131) foi substituída por $x - (d/2)$ para posicionar a intensidade do campo, E_{02}, na fronteira. Utilizando um raciocínio similar, o campo na região abaixo da superfície inferior (onde x é negativo e onde $\mathbf{k}_{2d}$ está envolvido) será

$$E_{y2s} = E_{02}e^{\gamma_2(x+d/2)}e^{-j\beta z} \qquad \left(x < -\frac{d}{2}\right) \tag{135}$$

Os campos expressos nas Equações (134) e (135) são aqueles de ondas *superficiais*. Note que eles se propagam apenas na direção z, de acordo com $e^{-j\beta z}$, mas simplesmente reduzem sua amplitude com $|x|$ crescente, de acordo com o termo $e^{-\gamma_2(x-d/2)}$ na Equação (134) e o termo $e^{\gamma_2(x-d/2)}$ na Equação (135). Essas ondas representam certa fração da potência total no modo, e assim podemos ver uma diferença fundamental entre os guias de onda dielétricos e os guias de onda metálicos: no guia dielétrico, os campos (e a potência guiada) existem por uma seção reta que se estende para além das fronteiras de confinamento, e em princípio existem por uma seção reta infinita. Em situações práticas, o decaimento exponencial dos campos acima e abaixo das fronteiras é tipicamente suficiente para tornar os campos desprezíveis em uma distância correspondente a poucas espessuras da lâmina a partir de cada fronteira.

A distribuição do campo elétrico total é composta pelo campo em todas as três regiões e está esboçada na Figura 13.21 para os primeiros modos. Dentro da lâmina, o campo é oscilatório e tem uma forma similar à do guia de onda de placas paralelas. A diferença é que os campos no guia laminado não alcançam zero nas fronteiras, mas se conectam aos campos acima e abaixo da lâmina que se esvaecem. A restrição é a de que os campos TE em cada lado da fronteira (tangentes à interface) devem se casar na fronteira. Especificamente,

$$E_{y1s}|_{x=\pm d/2} = E_{y2s}|_{x=\pm d/2} \tag{136}$$

Aplicando essa condição às Equações (129), (130), (134) e (135), temos as expressões finais para o campo elétrico TE no guia de onda simétrico laminado, para os casos de simetria par e ímpar:

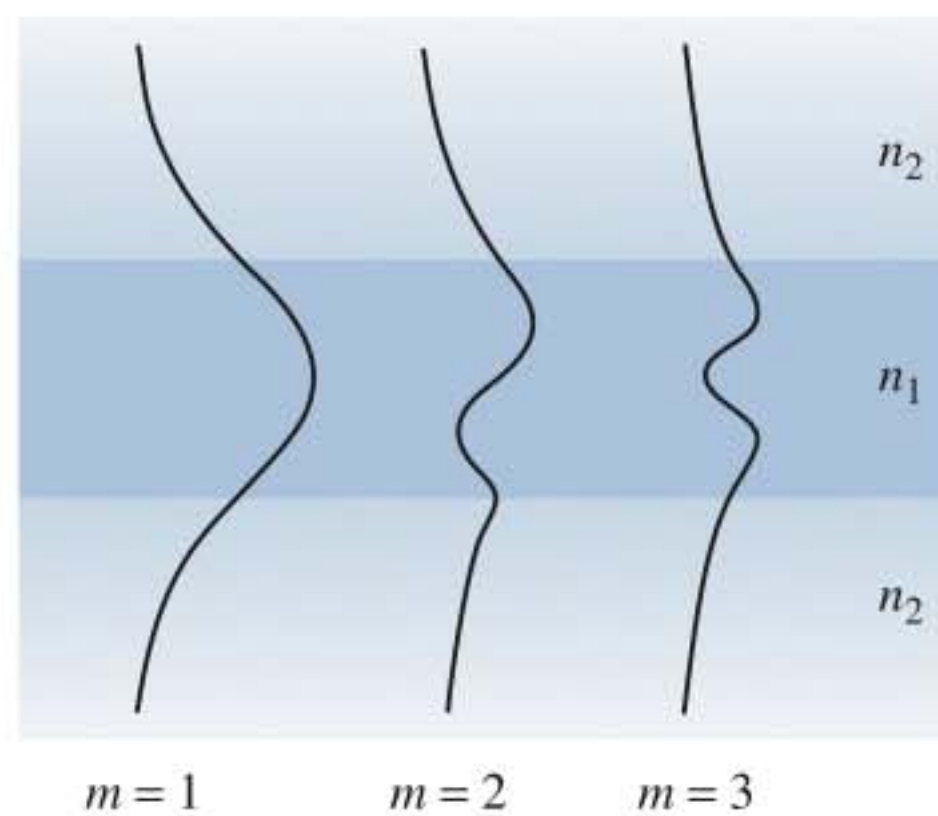



Figura 13.21 Distribuições da amplitude de campo elétrico pelo plano transversal para os três primeiros modos TE em um guia de onda simétrico laminado.

$$E_{se}(\text{TE par}) = \begin{cases} E_{0e}\cos(\kappa_1 x)e^{-j\beta z} & \left(-\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2}\right) \\ E_{0e}\cos\left(\kappa_1 \frac{d}{2}\right)e^{-\gamma_2(x-d/2)}e^{-j\beta z} & \left(x > \frac{d}{2}\right) \\ E_{0e}\cos\left(\kappa_1 \frac{d}{2}\right)e^{\gamma_2(x+d/2)}e^{-j\beta z} & \left(x < -\frac{d}{2}\right) \end{cases} \quad (137)$$

$$E_{so}(\text{TE ímpar}) = \begin{cases} E_{0o}\,\text{sen}\,(\kappa_1 x)e^{-j\beta z} & \left(-\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2}\right) \\ E_{0o}\,\text{sen}\left(\kappa_1 \frac{d}{2}\right)e^{-\gamma_2(x-d/2)}e^{-j\beta z} & \left(x > \frac{d}{2}\right) \\ -E_{0o}\,\text{sen}\left(\kappa_1 \frac{d}{2}\right)e^{\gamma_2(x+d/2)}e^{-j\beta z} & \left(x < -\frac{d}{2}\right) \end{cases} \quad (138)$$

A solução da equação de onda leva (como deveria) a resultados idênticos a esses. São sugeridas ao leitor as Referências 2 e 3 para os detalhes. O campo magnético para os modos TE consistirá em componentes em x e z, conforme ocorreu no caso do guia de placas paralelas. Finalmente, a forma dos campos do modo TM será quase a mesma dos campos do modo TE, mas com uma rotação simples de 90° na polarização dos componentes da onda plana. Logo, nos modos TM, H_y aparecerá, e terá a mesma forma que E_y para o TE, conforme apresentado nas Equações (137) e (138).

A não ser pelas diferenças nas estruturas do campo, o guia de onda dielétrico opera de uma maneira qualitativamente similar ao guia de placas paralelas. Novamente, um número finito de modos discretos será permitido em uma dada frequência, e esse número aumentará com o aumento da frequência. Modos de ordens mais altas são caracterizados por valores sucessivamente menores de θ_1.

Uma diferença importante no guia laminado ocorre no corte para qualquer modo. Sabemos que $\theta = 0$ no corte nos guias metálicos. No corte nos guias dielétricos, o ângulo da onda, θ_1, é igual ao ângulo crítico, θ_c. Então, à medida que a frequência de um dado modo é aumentada, seu valor de θ_1 aumenta para além de θ_c, de forma a manter a ressonância transversa, enquanto mantém o mesmo número de oscilações de campo no plano transversal.

Entretanto, à medida que o ângulo da onda aumenta, o caráter dos campos que se esvaem muda significativamente. Isso pode ser entendido a partir da consideração da dependência do ângulo da onda com o coeficiente de decaimento esvanecente, γ_2, conforme dado pela Equação (133). Note que à medida que θ_1 cresce (à medida que a frequência aumenta), γ_2 também aumenta, levando a uma queda mais rápida dos campos com a distância acima e abaixo da lâmina. O modo, então, se torna confinado de forma mais apertada na lâmina à medida que a frequência é aumentada. Além disso, em uma dada frequência, modos de ordens mais baixas, que possuem ângulos de onda menores, terão valores menores de γ_2 conforme indica a Equação (133). Consequentemente, quando consideramos diversos modos se propagando conjuntamente em uma frequência única, os modos de ordens mais altas carregarão uma porcentagem maior de suas potências nas regiões superior e inferior que envolvem a lâmina, quando comparados com os modos de ordens mais baixas.

As condições sob as quais os modos se propagarão podem ser determinadas pelo uso da condição de ressonância transversa, conforme fizemos para o guia de placas paralelas. Realizamos a análise da viagem transversal de ida e volta na região da lâmina da mesma maneira que fizemos na Seção 13.3, e obtemos uma equação similar à Equação (37):

$$\boxed{\kappa_1 d + \phi_{TE} + \kappa_1 d + \phi_{TE} = 2m\pi} \quad (139)$$

para ondas TE e

$$\kappa_1 d + \phi_{TM} + \kappa_1 d + \phi_{TM} = 2m\pi \tag{140}$$

para o caso TM. As Equações (139) e (140) são chamadas de *equações dos autovalores* para o guia de onda dielétrico simétrico laminado. Os defasamentos na reflexão, ϕ_{TE} e ϕ_{TM}, são as fases dos coeficientes de reflexão, Γ_s e Γ_p, dados pelas Equações (119) e (120). Esses são prontamente encontrados, mas acabam sendo funções de θ_1. Como sabemos, κ_1 também depende de θ_1, mas de uma maneira diferente que ϕ_{TE} e ϕ_{TM}. Consequentemente, as Equações (139) e (140) são *transcendentais* em θ_1, e não podem ser resolvidas na forma fechada. Em vez disso, métodos numéricos ou gráficos devem ser utilizados (ver Referências 4 ou 5). Surgindo desse processo de solução, entretanto, há uma condição de corte bastante simples para qualquer modo TE e TM:

$$k_0 d\sqrt{n_1^2 - n_2^2} \geq (m-1)\pi \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots) \tag{141}$$

Para que o modo m se propague, a Equação (141) deve ser válida. A interpretação física do número de modo m é novamente o número de meios ciclos de campo elétrico (para modos TE) ou de campo magnético (para modos TM) que ocorrem na dimensão transversal. Percebe-se que o modo de ordem mais baixa ($m = 1$) não possui corte – vai propagar da frequência zero em diante. Atingiremos, então, operação em modo único (na verdade um par único de modos TE e TM) se pudermos garantir que os modos $m = 2$ estão abaixo do corte. Utilizando a Equação (141), nossa condição de modo único será:

$$k_0 d\sqrt{n_1^2 - n_2^2} < \pi \tag{142}$$

Utilizando $k_0 = 2\pi/\lambda$, a faixa de comprimentos de onda na qual a operação em modo único ocorre é

$$\lambda > 2d\sqrt{n_1^2 - n_2^2} \tag{143}$$

EXEMPLO 13.5

Um guia de onda dielétrico simétrico laminado deve guiar luz com comprimento de onda de $\lambda = 1{,}30\ \mu$m. A espessura da lâmina deve ser $d = 5{,}00\ \mu$m, e o índice de refração do material em volta é $n_2 = 1{,}450$. Determine o índice de refração máximo permitido do material da lâmina que permitirá um modo único de operação para TE e TM.

Solução. A Equação (143) pode ser reescrita da seguinte forma

$$n_1 < \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2d}\right)^2 + n_2^2}$$

Assim,

$$n_1 < \sqrt{\left(\frac{1{,}30}{2(5{,}00)}\right)^2 + (1{,}450)^2} = 1{,}456$$

De maneira clara, as tolerâncias de fabricação são muito rígidas no momento da construção de guias dielétricos para operação de modo único.

EP13.11. Uma lâmina de vidro de 0,5 mm de espessura ($n_1 = 1{,}45$) está imersa no ar ($n_2 = 1$). A lâmina guia uma luz infravermelha de comprimento de onda $\lambda = 1{,}0\ \mu$m. Quantos modos TE e TM se propagarão?

Resp. 2.102

13.7 FIBRA ÓTICA

Fibras óticas trabalham segundo os mesmos princípios do guia de onda dielétrico laminado, exceto, é claro, pela seção reta redonda. Uma fibra *de índice degrau* é mostrada na Figura 13.10, na qual um *núcleo* de alto índice de raio a é envolvido por uma *casca* de baixo índice de raio b. A luz fica confinada ao núcleo pelo mecanismo da reflexão total, mas novamente uma fração da potência também reside na casca. Conforme encontramos no guia laminado, a potência na casca novamente se move em direção ao núcleo à medida que a frequência é aumentada. Além disso, conforme ocorre para o guia de onda laminado, a fibra suporta um modo que não apresenta corte.

A análise da fibra ótica é complexa principalmente por causa da seção reta circular e também por geralmente se tratar de um problema tridimensional. Enquanto o guia de onda laminado possuía apenas duas dimensões a serem consideradas. É possível analisar a fibra utilizando raios dentro do núcleo que refletem na fronteira da casca à medida que a luz se propaga pela fibra. Fizemos isso com o guia laminado e obtivemos resultados bem rapidamente. Entretanto, o método é difícil no caso das fibras porque os caminhos dos raios são complicados. Existem dois tipos de raios no núcleo: (1) aqueles que passam pelo eixo da fibra (eixo z), conhecidos como raios *meridionais*, e (2) aqueles que não passam pelo eixo, mas descrevem um caminho em forma de espiral à medida que se propagam ao longo do guia. Esses são conhecidos como raios *oblíquos*. A análise destes, apesar de possível, é entediante. Os modos que aparecem nas fibras podem ser associados com os tipos individuais de raios, ou com a combinação deles, mas é mais fácil obtê-los resolvendo a equação de onda diretamente. Nosso propósito nesta seção é fornecer uma primeira exposição ao problema da fibra ótica (e evitar um tratamento excessivamente longo). Para isso, vamos resolver o caso mais simples da maneira mais rápida.

A configuração de fibra mais simples é a de um índice degrau, mas com os índices do núcleo e da casca com valores bem próximos, ou seja, $n_1 \doteq n_2$. Essa é a condição de *guiamento fraco*, cujo efeito simplificador na análise é significativo. Já vimos como os valores dos índices do núcleo e da casca no guia de onda laminado precisam ser bastante próximos para que se atinja a operação monomodo ou com poucos modos. Os

fabricantes de fibras levaram esse resultado ao pé da letra, de forma que a condição de guiamento fraco atualmente é satisfeita pela maioria das fibras. Dimensões típicas de uma fibra monomodo estão entre 5 e 10 μm para o diâmetro do núcleo, com o diâmetro da casca usualmente de 125 μm. As diferenças entre os índices de refração entre o núcleo e a casca normalmente representam uma pequena fração de 1%.

O principal resultado da condição de guiamento fraco é um conjunto de modos no qual cada modo é *linearmente polarizado*. Isso significa que a luz com polarização x, por exemplo, entrará na fibra e se estabelecerá em um modo ou em um conjunto de modos que preservam a polarização em x. O campo magnético é essencialmente ortogonal a **E**, e nesse caso estaria na direção y. Os componentes em z de ambos os campos, apesar de presentes, são muito fracos para serem significativos. Os índices muito próximos do núcleo e da casca levam a caminhos para os raios que são essencialmente paralelos ao eixo do guia – desviando apenas ligeiramente. Na verdade, podemos escrever para um dado modo, $E_x \doteq \eta H_y$, quando η é aproximado como a impedância intrínseca da casca. Logo, na aproximação de guiamento fraco, os campos dos modos da fibra são tratados como ondas planas (não uniformes, é claro). A designação desses modos é $\mathrm{LP}_{\ell m}$, que significa linearmente polarizado, com parâmetros inteiros para ordem ℓ e m. O último expressa os números de variações nas duas dimensões no plano transversal circular. Especificamente ℓ, o *número de modo azimutal*, representa a metade do número de máximos (ou mínimos) de densidade de potência que ocorrem em um dado raio à medida que ϕ varia de 0 a 2π. O *número de modo radial*, m, expressa o número de máximos que ocorrem ao longo de uma linha radial (com ϕ constante) que se estende de zero até o infinito.

Apesar de podermos considerar um campo linearmente polarizado em um sistema de coordenadas cartesianas, somos obrigados a trabalhar em coordenadas cilíndricas por razões óbvias. De uma maneira que nos lembra o guia de onda retangular, é possível escrever o campo elétrico fasorial com polarização em x dentro de uma fibra cilíndrica com guiamento fraco como o produto de três funções, sendo que cada uma varia com uma das variáveis das coordenadas, ρ, ϕ e z:

$$E_{xs}(\rho, \phi, z) = \sum_i R_i(\rho)\Phi_i(\phi)\exp(-j\beta_i z) \tag{144}$$

Cada termo no somatório é um modo individual da fibra. Note que a função em z é apenas o termo de propagação, $e^{-j\beta z}$, já que estamos considerando uma fibra sem perdas infinitamente longa.

A equação de onda é a Equação (58), a qual podemos escrever para o componente de $\mathbf{E}_s$ em x considerado, mas na qual o operador Laplaciano é escrito em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial E_{xs}}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial\phi^2} + (k^2 - \beta^2)E_{xs} = 0 \tag{145}$$

onde reconhecemos que a operação $\partial^2/\partial z^2$, quando aplicada à Equação (144), leva a um fator de $-\beta^2$. Substituímos agora um termo único da Equação (144) na Equação (145) [visto que cada termo na Equação (144) deve satisfazer sozinho a equação de

onda]. Retirando o subscrito i, expandindo a derivada radial e rearranjando os termos, obtemos:

$$\underbrace{\frac{\rho^2}{R}\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{\rho}{R}\frac{dR}{d\rho} + \rho^2(k^2 - \beta^2)}_{\ell^2} = \underbrace{-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}}_{\ell^2} \tag{146}$$

Notamos que o lado esquerdo da Equação (146) varia apenas com ρ, enquanto o lado direito varia apenas com ϕ. Uma vez que as duas variáveis são independentes, conclui-se que cada lado da equação deve ser igual a uma constante. Chamando essa constante de ℓ^2, conforme mostrado, podemos escrever equações separadas para cada lado. As variáveis estão agora separadas:

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \ell^2\Phi = 0 \tag{147a}$$

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left[k^2 - \beta^2 - \frac{\ell^2}{\rho^2}\right]R = 0 \tag{147b}$$

A solução da Equação (147*a*) tem a forma do seno ou do cosseno de ϕ:

$$\Phi(\phi) = \begin{cases} \cos(\ell\phi + \alpha) \\ \text{sen}(\ell\phi + \alpha) \end{cases} \tag{148}$$

onde α é uma constante. A forma da Equação (148) determina que ℓ seja um inteiro, pois o mesmo campo modal deve ocorrer no plano transversal à medida que ϕ variar 2π radianos. Uma vez que a fibra é cilíndrica, a orientação dos eixos x e y no plano transversal não importa; assim, podemos escolher a função cosseno e fazer $\alpha = 0$. Utilizaremos então $\Phi(\phi) = \cos(\ell\phi)$.

A solução da Equação (147*b*) para obter a função radial é mais complicada. A Equação (147*b*) é uma forma da equação de Bessel, cuja solução são funções de Bessel em formas variadas. O parâmetro chave é a função $\beta_t = (k^2 - \beta^2)^{1/2}$, cujo quadrado aparece em (147*b*). Note que β_t será diferente nas duas regiões: dentro do núcleo ($\rho < a$), $\beta_t = \beta_{t1} = (n_1^2k_0^2 - \beta_2)^{1/2}$. Dentro da casca ($\rho > a$), temos $\beta_t = \beta_{t2} = (n_2^2k_0^2 - \beta_2)^{1/2}$. Dependendo das magnitudes relativas de k e β, β_t pode ser real ou imaginário. Essas possibilidades levam a duas formas de solução para a Equação (147*b*):

$$R(\rho) = \begin{cases} AJ_\ell(\beta_t\rho) & \beta_t \text{ real} \\ BK_\ell(|\beta_t|\rho) & \beta_t \text{ imaginário} \end{cases} \tag{149}$$

onde A e B são constantes. $J_\ell(\beta_t\rho)$ é a função de Bessel ordinária do primeiro tipo, de ordem ℓ e argumento $\beta_t\rho$. $K_\ell(|\beta_t|\rho)$ é a função de Bessel modificada de segundo tipo, de ordem ℓ e argumento $|\beta_t|\rho$. As primeiras duas ordens de cada uma dessas funções são ilustradas nas Figuras 13.22*a* e 13.22*b*. No nosso estudo, é necessário conhecer precisamente os pontos onde as funções J_0 e J_1 atravessam o zero. Os pontos mos-

(a)

(b)

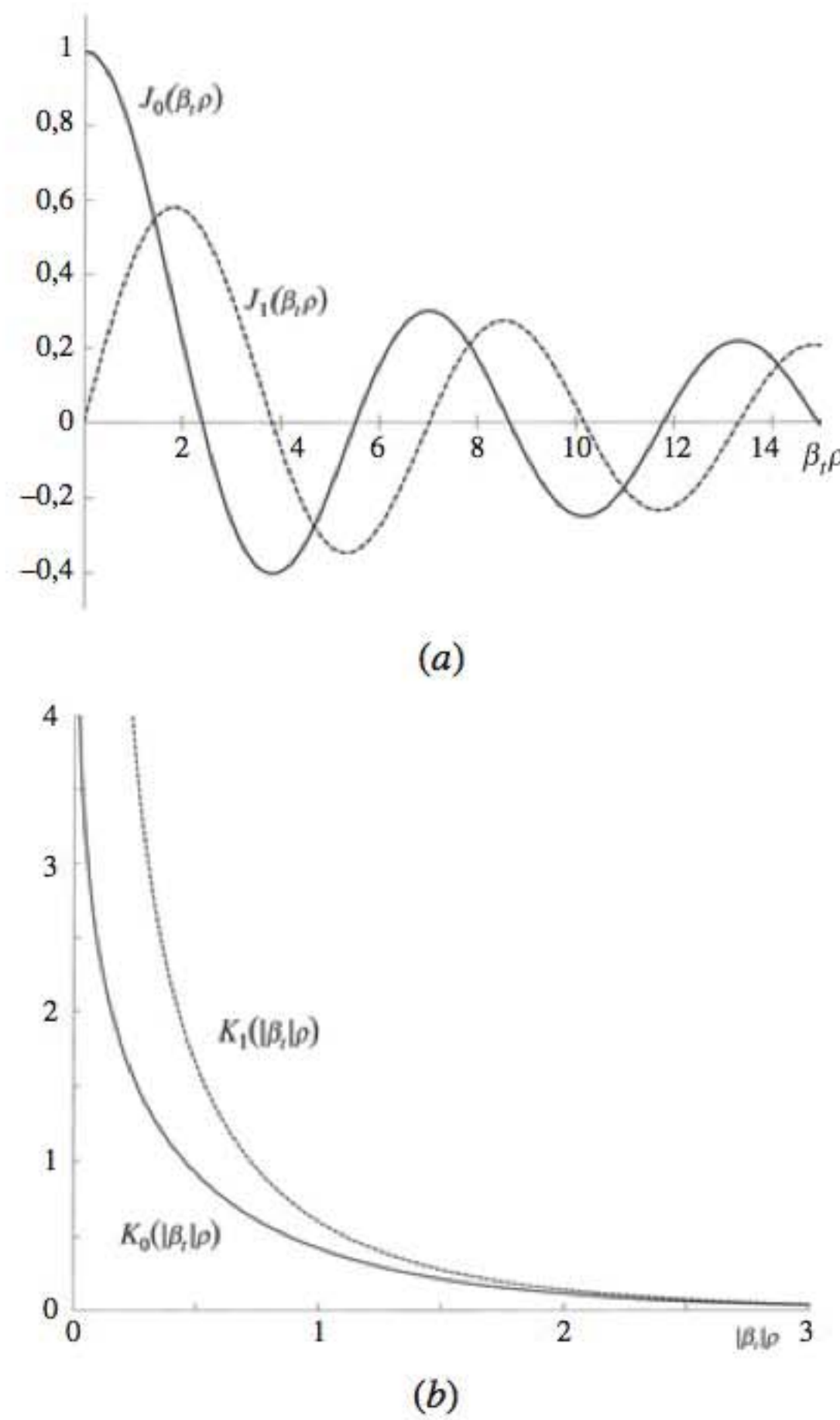



Figura 13.22 (*a*) Funções de Bessel ordinárias do primeiro tipo, de ordens 0 e 1, e argumento $\beta_t\rho$, onde β_t é real. (*b*) Funções de Bessel modificadas do segundo tipo, de ordens 0 e 1, e argumento $|\beta_t|\rho$, onde β_t é imaginário.

trados na Figura 13.22*a* são os seguintes: para J_0, os zeros são 2,405, 5,520, 8,654, 11,792 e 14,931. Já para J_1,os zeros são 0, 3,832, 7,016, 10,173 e 13,324. Outros tipos de funções de Bessel contribuiriam para as soluções na Equação (149), mas elas apresentam comportamento não físico com o raio e não são incluídas.

Em seguida, precisamos determinar qual das duas soluções é apropriada para cada região. Dentro do núcleo ($\rho < a$) esperamos obter uma solução oscilatória para o campo – cuja forma seja bem parecida com o que encontramos no guia de onda laminado. Com isso, associamos as soluções da função de Bessel ordinária a essa região fazendo com que $\beta_{t1} = (n_1^2 k_0^2 - \beta^2)^{1/2}$ seja real. Na casca ($\rho > a$), esperamos ondas superficiais que decrescem em amplitude com o aumento do raio à medida que se afasta da fronteira núcleo/casca. As funções de Bessel K proporcionam esse comportamento e serão aplicáveis se β_{t2} for imaginário. Tendo isso, podemos então escrever $|\beta_{t2}| = (\beta^2 - n_2^2 k_0^2)^{1/2}$. A amplitude do campo que diminui com o aumento do raio dentro da casca nos permite desprezar o efeito da fronteira externa da casca (em $\rho = b$), pois se presume que os campos lá são muito fracos para que essa fronteira tenha algum efeito nos campos modais.

Uma vez que β_{t1} e β_{t2} estão em unidades de m^{-1}, é conveniente normalizar essas grandezas (tornando-as adimensionais) multiplicando ambas pelo raio a do núcleo. Nossos novos parâmetros normalizados se tornam

$$u \equiv a\beta_{t1} = a\sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2} \tag{150a}$$

$$w \equiv a|\beta_{t2}| = a\sqrt{\beta^2 - n_2^2 k_0^2} \tag{150b}$$

u e w estão em analogia direta com as grandezas $\kappa_1 d$ e $\kappa_2 d$ no guia de onda laminado. Como nesses parâmetros, β é o componente em z de *ambos* $n_1 k_0$ e $n_2 k_0$ e é a constante de defasamento do modo guiado. β deve ser o mesmo em ambas as regiões de forma que as condições de fronteira para os campos sejam satisfeitas em $\rho = a$ para todo z e t.

Podemos agora construir a solução total para E_{xs} para um modo guiado único, utilizando a Equação (144) juntamente com as Equações (148), (149), (150*a*) e (150*b*):

$$E_{xs} = \begin{cases} E_0 J_\ell(u\rho/a)\cos(\ell\phi)e^{-j\beta z} & \rho \le a \\ E_0[J_\ell(u)/K_\ell(w)]K_\ell(w\rho/a)\cos(\ell\phi)e^{-j\beta z} & \rho \ge a \end{cases} \tag{151}$$

Note que fizemos o coeficiente A na Equação (149) ser igual a E_0 e $B = E_0[J_\ell(u)/K_\ell(w)]$. Essas escolhas asseguram que as expressões para E_{xs} nas duas regiões se tornem iguais em $\rho = a$, uma condição que é aproximadamente verdadeira desde que $n_1 \doteq n_2$ (a aproximação por guiamento fraco).

Novamente, a condição de guiamento fraco também permite a aproximação $H \doteq E/\eta$, com η tomado como a impedância intrínseca da casca. Obtidos $\mathbf{E}_s$ e $\mathbf{H}_s$, podemos agora encontrar a densidade média de potência do modo $LP_{\ell m}$ (ou intensidade de luz) por

$$|\langle \mathbf{S} \rangle| = \left| \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*\} \right| = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{E_{xs}H_{ys}^*\} = \frac{1}{2\eta}|E_{xs}|^2 \tag{152}$$

Usando a Equação (151) na Equação (152), a intensidade modal em W/m^2 se torna

$$I_{\ell m} = I_0 J_\ell^2\left(\frac{u\rho}{a}\right)\cos^2(\ell\phi) \qquad \rho \le a \tag{153a}$$

$$I_{\ell m} = I_0\left(\frac{J_\ell(u)}{K_\ell(w)}\right)^2 K_\ell^2\left(\frac{w\rho}{a}\right)\cos^2(\ell\phi) \qquad \rho \ge a \tag{153b}$$

onde I_0 é o valor de pico da intensidade. A função do número de modo azimutal ℓ, conforme evidente nas Equações (153*a*) e (153*b*), é determinar o número de variações de intensidade em volta do círculo $0 < \phi < 2\pi$. Ele também determina a ordem das funções de Bessel que são utilizadas. A influência do número de modo radial, m, não é imediatamente aparente nas Equações (153*a*) e (153*b*). Resumidamente, m determina a faixa de valores permitidos para u que ocorre na função de Bessel, $J(u\rho/a)$. Quanto maior o valor de m, maiores serão os valores permitidos para u. Com u maior, a função de Bessel apresenta um maior número de oscilações na faixa $0 < \rho < a$, e então mais variações de intensidade radial ocorrem com maiores valores de m. No

guia de onda laminado, o número de modo (também m) determina as faixas permitidas de κ_1. Conforme vimos na Seção 13.6, ao aumentar κ_1 em uma dada frequência o raio na lâmina se propagará mais próximo da normal (menor θ_1), e assim maiores oscilações espaciais do campo ocorrerão na direção transversal (maior m).

O passo final na análise é obter uma equação a partir da qual os valores dos parâmetros modais (u, w e β, por exemplo) possam ser determinados para uma dada frequência de operação e uma dada construção de fibra. No guia de onda laminado foram encontradas as Equações (139) e (140), utilizando-se argumentos de ressonância transversa associadas às ondas TE e TM na lâmina. Na nossa fibra, não aplicamos ressonância transversa diretamente, mas sim *implicitamente*, requerendo que todos os campos satisfaçam as condições de fronteira na interface núcleo/casca, $\rho = a$.[7] Já aplicamos condições ao campo transversal para obter a Equação (151). A condição restante é a continuidade dos componentes em z de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$. Na aproximação por guiamento fraco, desprezamos todos os componentes em z, mas os consideraremos agora para esse último exercício. Utilizando a lei de Faraday na forma pontual, a continuidade de H_{zs} em $\rho = a$ é a mesma que a continuidade do componente em z para $\nabla \times \mathbf{E}_s$, desde que $\mu = \mu_0$ (ou tenham o mesmo valor) em ambas as regiões. Especificamente,

$$(\nabla \times \mathbf{E}_{s1})_z\Big|_{\rho=a} = (\nabla \times \mathbf{E}_{s2})_z\Big|_{\rho=a} \tag{154}$$

O procedimento começa expressando-se o campo elétrico na Equação (151) com os componentes em ρ e ϕ, e depois aplicando-se a Equação (154). Esse é um procedimento extenso, deixado como um exercício (ou pode ser encontrado na Referência 5). O resultado é a equação de autovalores para os modos LP na fibra de índice degrau de guiamento fraco:

$$\frac{J_{\ell-1}(u)}{J_\ell(u)} = -\frac{w}{u}\frac{K_{\ell-1}(w)}{K_\ell(w)} \tag{155}$$

Essa equação, como as Equações (139) e (140), é transcendental, e deve ser resolvida para u e w numericamente ou graficamente. Esse exercício, em todos seus aspectos, está além do escopo da nossa abordagem. Em vez disso, iremos obter da Equação (155) as condições de corte para um dado modo e algumas propriedades do modo mais importante – aquele que não tem corte, e é, assim, o modo presente na fibra monomodo.

A solução da Equação (155) é facilitada notando-se que u e w podem ser combinados para formar um novo parâmetro independente de β o qual dependerá apenas da construção da fibra e da frequência de operação. Esse novo parâmetro, chamado de *frequência normalizada*, ou número V, é encontrado a partir das Equações (150*a*) e (150*b*):

$$V \equiv \sqrt{u^2 + w^2} = ak_0\sqrt{n_1^2 - n_2^2} \tag{156}$$

[7] Lembre-se que as equações para o coeficiente de reflexão [Equações (119) e (120)], cujo defasamento na reflexão utilizado na ressonância transversa é determinado, surgiu originalmente da aplicação das condições de fronteira para os campos.

Notamos que um aumento em V é conseguido pelo aumento do raio do núcleo, da frequência ou da diferença entre índices.

A condição de corte para um dado modo pode agora ser encontrada pela Equação (155) juntamente com a Equação (156). Para fazer isso, devemos notar que o corte em um guia dielétrico significa que a reflexão total na fronteira núcleo/casca simplesmente termina, e assim a potência começa a se propagar radialmente, afastando-se do núcleo. O efeito no campo elétrico da Equação (151) é produzir um campo na casca que não mais diminui com o aumento do raio. Isso ocorre na função de Bessel modificada, $K(w\rho/a)$, quando $w = 0$. Essa é nossa condição geral de corte, que agora aplicamos à Equação (155), cujo lado direito se torna zero quando $w = 0$. Isso leva a valores de corte para u e V (u_c e V_c), e, pela Equação (156), a $u_c = V_c$. A Equação (155) no corte se torna:

$$\boxed{J_{\ell-1}(V_c) = 0} \tag{157}$$

Para encontrar a condição de corte para um dado modo só precisamos encontrar agora o zero apropriado da função de Bessel ordinária relevante, conforme determinado pela Equação (157). Isso leva ao valor de V no corte para cada modo.

Exemplifiquemos: o modo de ordem mais baixa é o mais simples na estrutura. Com isso, não possui variações com ϕ e no máximo uma variação com ρ. Esse modo é designado, desta forma, por LP_{01}, e com $\ell = 0$, a Equação (157) dá a condição de corte como $J_{-1}(V_c) = 0$. Uma vez que $J_{-1} = J_1$ (verdadeiro apenas para a função de Bessel J_1), tomamos o primeiro zero de J_1, que é $V_c(01) = 0$. O modo LP_{01}, dessa forma, não possui corte e se propagará sozinho sem os outros modos, desde que V para a fibra seja maior que zero, mas menor que V_c para o próximo modo de ordem mais alta. Por inspeção da Figura 13.22*a*, vemos que o próximo zero da função de Bessel é 2,405 (para a função J_0). Logo, $\ell - 1 = 0$ na Equação (156), e assim $\ell = 1$ para o próximo modo de ordem mais alta. Além disso, utilizamos o menor valor de m_ℓ ($m = 1$), e assim o modo é identificado como LP_{11}. Seu corte V vale $V_c(11) = 2{,}405$. Se em vez disso $m = 2$ fosse escolhido, obteríamos o número V de corte para o modo LP_{12}. Utilizamos o próximo zero da função J_0, que é 5,520, ou $V_c(12) = 5{,}520$. Dessa maneira, o número de modo radial, m, numera os zeros da função de Bessel de ordem $\ell - 1$, tomados em ordem crescente de valores.

Quando seguimos o raciocínio que acaba de ser descrito, a condição para operação em monomodo em uma fibra de índice degrau é encontrada por

$$\boxed{V < V_c(11) = 2{,}405} \tag{158}$$

Então, utilizando a Equação (156) juntamente com $k_0 = 2\pi/\lambda$, encontramos

$$\boxed{\lambda > \lambda_c = \frac{2\pi a}{2{,}405}\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \tag{159}$$

como requisito para o comprimento de onda no espaço livre para que se atinja a operação em monomodo em uma fibra de índice degrau. A similaridade com a condição de modo único para o guia de onda laminado [Equação (143)] é aparente. O *comprimento de onda de corte*, λ_c, é aquele para o modo LP_{11}. Seu valor é tomado como uma especificação da maioria das fibras monomodo comerciais.

EXEMPLO 13.6

O comprimento de onda de corte de uma fibra de índice degrau é especificado como $\lambda_c = 1{,}20\ \mu$m. Se a fibra opera em um comprimento de onda $\lambda = 1{,}55\ \mu$m, quanto vale V?

Solução. Utilizando as Equações (156) e (159), encontramos

$$V = 2{,}405\frac{\lambda_c}{\lambda} = 2{,}405\left(\frac{1{,}20}{1{,}55}\right) = 1{,}86$$

Os perfis de intensidade dos dois primeiros modos podem ser encontrados utilizando as Equações (153*a*) e (153*b*), uma vez determinados os valores de u e w para cada modo a partir da Equação (155). Para LP_{01}, encontramos

$$I_{01} = \begin{cases} I_0 J_0^2(u_{01}\rho/a) & \rho \leq a \\ I_0\left(\frac{J_0(u_{01})}{K_0(w_{01})}\right)^2 K_0^2(w_{01}\rho/a) & \rho \geq a \end{cases} \tag{160}$$

e para LP_{11}, encontramos

$$I_{11} = \begin{cases} I_0 J_1^2(u_{11}\rho/a)\cos^2\phi & \rho \leq a \\ I_0\left(\frac{J_1(u_{11})}{K_1(w_{11})}\right)^2 K_1^2(w_{11}\rho/a)\cos^2\phi & \rho \geq a \end{cases} \tag{161}$$

As duas intensidades para um valor único de V são representadas em um gráfico em função do raio, em $\phi = 0$, na Figura 13.23. Notamos mais uma vez o menor confinamento do modo de ordem mais alta no núcleo, como aconteceu para o guia de onda laminado.

À medida que V aumenta (o que se consegue pelo aumento da frequência, por exemplo), os modos existentes se tornam confinados de forma mais restrita no núcleo, enquanto novos modos de ordens mais altas podem começar a se propagar. O comportamento do modo de ordem mais baixa com a variação de V é descrita na Figura 13.24, onde novamente notamos que o modo se torna mais restritamente confinado à medida que V aumenta. Na determinação das intensidades, gealmente deve-se resolver a Equação (155) numericamente para se obter u e w. Várias aproximações analíticas para a solução numérica exata existem, e a melhor delas é a fórmula de Rudolf-Neumann para o módulo LP_{01}, válida para a faixa $1{,}3 < V < 3{,}5$:

$$\boxed{w_{01} \doteq 1{,}1428V - 0{,}9960} \tag{162}$$

Obtido w_{01}, u_{01} pode ser encontrado a partir da Equação (156), conhecendo-se V.

Outra importante simplificação para o modo LP_{01} é a aproximação de seu perfil de intensidade pela função Gaussiana. Uma inspeção de qualquer uma das curvas de intensidade da Figura 13.24 mostra uma semelhança com uma Gaussiana, que seria expressa como

$$\boxed{I_{01} \approx I_0 e^{-2\rho^2/\rho_0^2}} \tag{163}$$

onde ρ_0, chamado de *raio do campo modal*, é definido como o raio a partir do eixo da fibra no qual a intensidade do modo cai para $1/e^2$ do seu valor no eixo. Esse raio

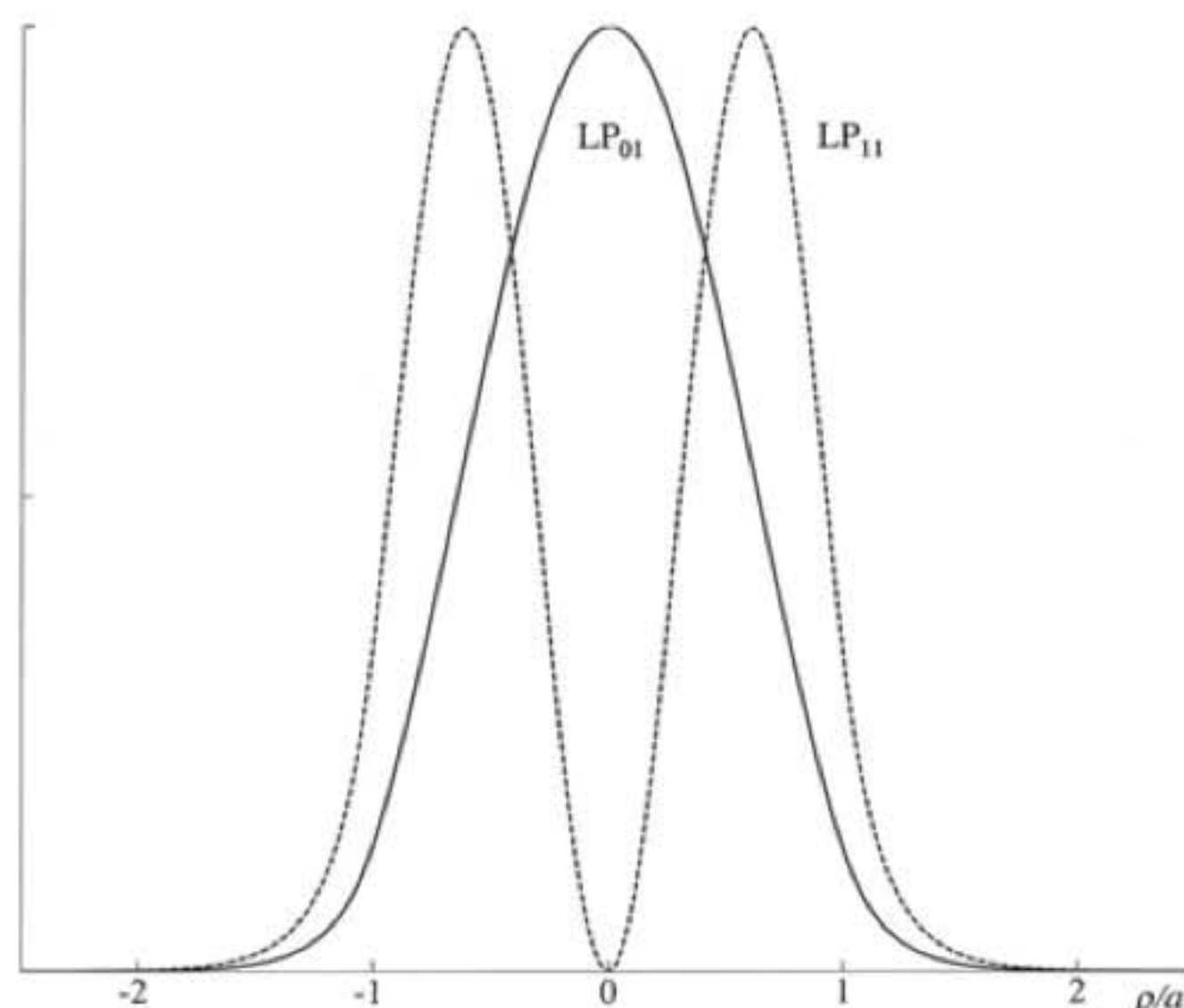



Figura 13.23 Gráfico de intensidades dadas pelas Equações (160) e (161) dos dois primeiros modos LP em uma fibra de índice degrau com guiamento fraco, em função do raio normalizado ρ/a. Ambas as funções foram calculadas na mesma frequência de operação. O confinamento relativamente fraco do modo LP_{11} comparado ao do LP_{01} é evidente.

depende da frequência, e na maioria das vezes de V. Uma aproximação similar pode ser realizada para a intensidade modal fundamental do guia simétrico laminado. Na fibra de índice degrau, o melhor ajuste entre a aproximação por Gaussiana e a intensidade modal real, conforme dada na Equação (160), é fornecido pela fórmula de Marcuse:

$$\frac{\rho_0}{a} \approx 0{,}65 + \frac{1{,}619}{V^{3/2}} + \frac{2{,}879}{V^6} \tag{164}$$

O raio do campo modal (em um comprimento de onda especificado) é uma outra especificação importante (juntamente com o comprimento de onda de corte) de fibras monomodo comerciais. É importante conhecê-lo por diversas razões: em primeiro lugar, quando se emenda ou conecta duas fibras monomodo, uma menor perda na junção será obtida caso ambas as fibras tenham o mesmo raio de campo modal e os eixos das fibras estejam precisamente alinhados. Raios diferentes ou desalinhamento dos eixos resultam no aumento das perdas, mas isso pode ser calculado e comparado via medição. A tolerância ao alinhamento (desvio permitido em relação ao alinhamento preciso dos eixos) é de certa forma relaxado se as fibras possuírem raios de campos modais maiores. Em segundo lugar, um raio de campo modal menor significa que a fibra tem menor probabilidade de sofrer perdas devido a sua dobra. Um modo livremente confinado com perdas tende a radiar mais à medida que a fibra dobra. Finalmente, o raio de campo modal é diretamente relacionado à constante de defasamento modal, β. Desde que u e w sejam conhecidos (encontrados a partir de ρ_0), β pode ser encontrado a partir da Equação (150a) ou (150b). Logo, um conhecimento de como β varia com a frequência (levando à quantificação da dispersão) pode ser encontrado medindo-se a variação no raio de campo modal com a frequência. Novamente, as Referências 4 e 5 (e as outras lá contidas) fornecem mais detalhes.

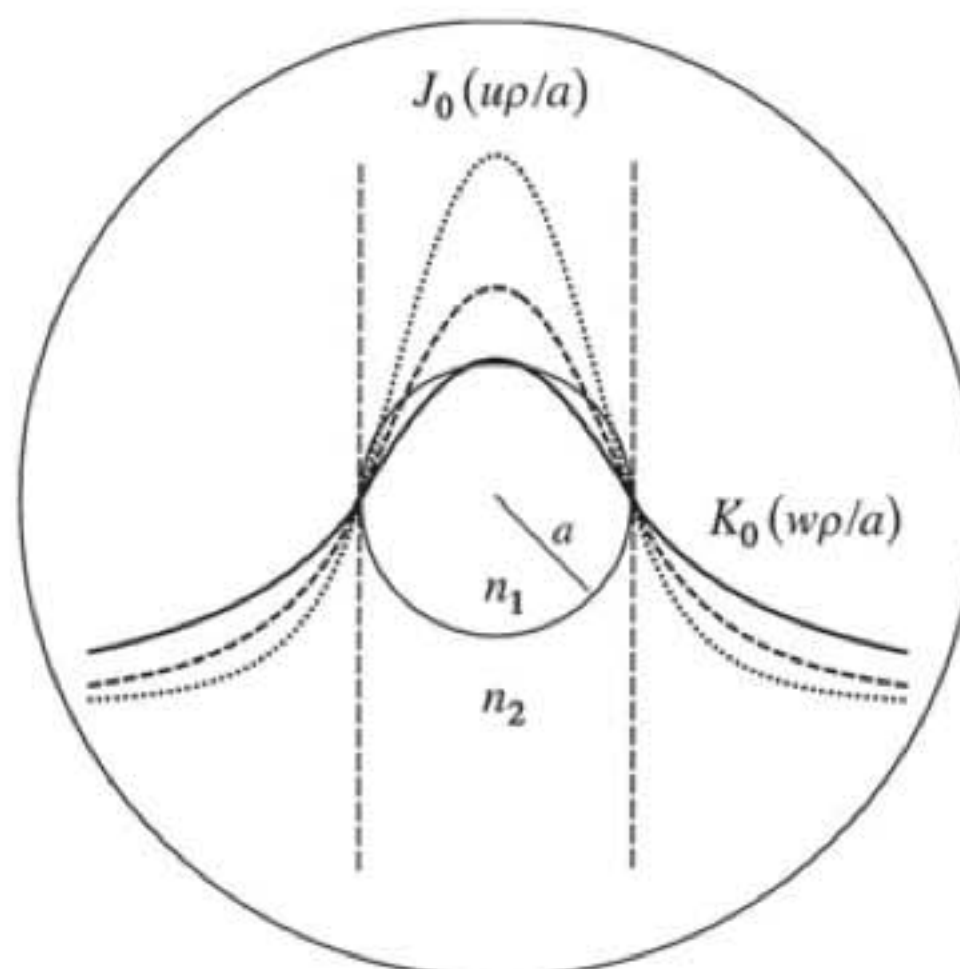



Figura 13.24 Gráfico de intensidades para o modo LP_{01} em uma fibra de índice degrau com guiamento fraco. Curvas são mostradas para $V = 1,0$ (sólida), $V = 1,2$ (tracejada) e $V = 1,5$ (pontilhada), correspondendo a aumentos de frequência nessas proporções. Linhas verticais tracejadas indicam a fronteira núcleo/casca, na qual para todos os três casos, a dependência radial de J_0 no núcleo se conecta à dependência radial de K_0 na casca, conforme demonstrado na Equação (160). A migração de potência modal em direção ao eixo da fibra com o aumento da frequência é evidente.

EP13.12. Para a fibra do Exemplo 13.6, o raio do núcleo é dado por $a = 5,0\ \mu$m. Encontre o raio de campo modal nos comprimentos de onda (*a*) 1,55 μm; (*b*) 1,30 μm.

Resp. 6,78 μm; 5,82 μm

REFERÊNCIAS

1. Weeks, W. L. *Transmission and Distribution of Electrical Energy*. New York: Harper and Row, 1981. Parâmetros de linhas para várias configurações de sistemas de transmissão e distribuição de potência são discutidos no Capítulo 2, juntamente com valores típicos para os parâmetros.
2. Edwards, T. C. *Foundations for Microstrip Circuit Design*. Chichester, N.Y.: Wiley-Interscience, 1981. Os Capítulos 3 e 4 fornecem uma abordagem excelente de linhas microfita, com muitas fórmulas de projeto.
3. Ramo, S., J. R. Whinnery, and T. Van Duzer. *Fields and Waves in Communication Electronics*. 3. ed. New York: John Wiley & Sons, 1990. Uma abordagem aprofundada sobre guias de onda de placas paralelas e retangulares é apresentada no Capítulo 8.
4. Marcuse, D. *Theory of Dielectric Optical Waveguides*. 2. ed. New York: Academic Press, 1990. Esse livro fornece uma discussão completa e muito abrangente sobre guias de onda dielétricos laminados, além de outros tipos.
5. Buck, J. A. *Fundamentals of Optical Fibers*. 2. ed. New York: Wiley-Interscience, 2004. Guias de onda dielétricos simétricos laminados e fibras de guiamento fraco são enfatizado nesse livro, escrito por um dos coautores deste.

WWW Quizzes

PROBLEMAS

13.1 Os condutores de uma linha de transmissão coaxial são de cobre ($\sigma_c = 5{,}8 \times 10^7$ S/m), e o dielétrico é o polietileno ($\epsilon_r' = 2{,}26$, $\sigma/\omega\epsilon' = 0{,}0002$). Se o raio interno do condutor externo vale 4 mm, calcule o raio do condutor interno de forma que: (*a*) $Z_0 = 50\ \Omega$; (*b*) $C = 100$ pF/m; (*c*) $L = 0{,}2$ μH/m. Considere uma linha sem perdas.

13.2 Determine *R*, *L*, *C* e *G* para um cabo coaxial com $a = 0{,}25$ mm, $b = 2{,}5$ mm, $c = 3{,}30$ mm, $\epsilon_r = 2{,}0$, $\mu_r = 1$, $\sigma_c = 1{,}0 \times 10^7$ S/m, $\sigma = 1{,}0 \times 10^{-5}$ S/m e $f = 300$ MHz.

13.3 Dois condutores de alumínio revestidos de aço são utilizados para construir uma linha de transmissão bifilar. Seja $\sigma_{Al} = 3{,}8 \times 10^7$ S/m, $\sigma_{Aço} = 5 \times 10^6$ S/m e $\mu_{Aço} = 100$ μH/m. O raio do fio de aço é de 1,27 cm e o revestimento de alumínio tem espessura de 0,127 cm. O dielétrico é o ar e a separação de centro a centro entre os fios é de 10,16 cm. Calcule *C*, *L*, *G* e *R* para a linha a 10 MHz.

13.4 Determine *R*, *L*, *C* e *G* para uma linha de transmissão bifilar, imersa em polietileno, na frequência de 800 MHz. Considere condutores de cobre de raio 0,50 mm e separação de 0,80 cm. Use $\epsilon_r = 2{,}26$ e $\sigma/(\omega\epsilon') = 4 \times 10^{-4}$.

13.5 Cada condutor de uma linha de transmissão bifilar tem raio de 0,5 mm. A separação entre condutores de centro a centro é de 0,8 cm. Considere $f = 150$ MHz, e suponha σ e σ_c iguais a zero. Encontre a constante dielétrica do meio isolante se: (*a*) $Z_0 = 300\ \Omega$; (*b*) $C = 20$ pF/m; (*c*) $v_p = 2{,}6 \times 10^8$ m/s.

13.6 A linha de transmissão da Figura 6.8 é preenchida com polietileno. Se fosse preenchida com ar, a capacitância seria de 57,6 pF/m. Considerando uma linha sem perdas, encontre *C*, *L* e Z_0.

13.7 As dimensões pertinentes para a linha de transmissão mostrada na Figura 13.2 são $b = 3$ mm e $d = 0{,}2$ mm. Os condutores e o dielétrico são não magnéticos. (*a*) Se a impedância característica da linha é de 15 Ω, calcule ϵ_r'. Considere um dielétrico sem perdas. (*b*) Considere condutores de cobre e uma operação a 2×10^8 rad/s. Se $RC = GL$, determine a tangente de perdas do dielétrico.

13.8 Uma linha de transmissão construída com condutores perfeitos e um dielétrico de ar deve ter uma dimensão máxima de 8 mm para a sua seção reta. A linha será utilizada em altas frequências. Especifique suas dimensões se ela for: (*a*) uma linha bifilar com $Z_0 = 300\ \Omega$; (*b*) uma linha plana com $Z_0 = 15\ \Omega$; (*c*) uma linha coaxial de 72 Ω que tem um condutor externo de espessura igual a zero.

13.9 Uma linha microfita deve ser construída utilizando um dielétrico sem perdas para o qual $\epsilon_r' = 7{,}0$. Se a linha deve apresentar uma impedância característica de 50 Ω, determine: (*a*) $\epsilon_{r,\text{ efetiva}}$; (*b*) w/d.

13.10 Duas linhas do tipo microfita são fabricadas de tal forma que uma conecta-se à outra nas extremidades em uma lâmina de 2 mm de espessura de niobato de lítio ($\epsilon_r' = 4{,}8$). A linha 1 tem 4 mm de largura. A linha 2 (infelizmente)

foi fabricada com uma largura de 5 mm. Determine a potência de perdas em dB para as ondas transmitidas através da junção.

13.11 Um guia de onda de placas paralelas é conhecido por ter um comprimento de onda de corte, para os modos TE e TM, $m = 1$ de $\lambda_{c1} = 4{,}1$ mm. O guia é operado em um comprimento de onda $\lambda = 1{,}0$ mm. Quantos modos se propagam?

13.12 Uma guia de placas paralelas deve ser construído para operação apenas no modo TEM na faixa de frequências $0 < f < 3$ GHz. O dielétrico entre as placas deve ser o Teflon ($\epsilon'_r = 2{,}1$). Determine a separação máxima d permitida entre as placas.

13.13 Sabe-se que um guia de onda de placas paralelas sem perdas propaga os modos TE e TM, $m = 2$, em frequências tão baixas quanto 10 GHz. Se a separação entre as placas é de 1 cm, determine a constante dielétrica do meio entre as placas.

13.14 Um guia de placas paralelas com $d = 1$ cm é feito com vidro ($n = 1{,}45$) entre as placas. Se a frequência de operação é de 32 GHz, quais modos se propagarão?

13.15 Para o guia do Problema 13.14 e na frequência de 32 GHz, determine a diferença entre os atrasos de grupo do modo de ordem mais alta (TE ou TM) e do modo TEM. Considere uma distância propagada de 10 cm.

13.16 Sabe-se que a frequência de corte dos modos TE e TM, $m = 1$, em um guia de placas paralelas preenchido com ar, vale $f_{c1} = 7{,}5$ GHz. O guia é utilizado com um comprimento de onda $\lambda = 1{,}5$ cm. Encontre a velocidade de grupo dos modos TE e TM, $m = 2$.

13.17 Um guia de placas paralelas é parcialmente preenchido com dois dielétricos sem perdas (Figura 13.25) onde $\epsilon'_{r1} = 4{,}0$, $\epsilon'_{r2} = 2{,}1$ e $d = 1$ cm. Em certa frequência, descobre-se que o modo TM_1 se propaga pelo guia sem sofrer nenhuma perda por reflexão na interface do dielétrico. (*a*) Encontre essa frequência. (*b*) O guia está operando em um modo TM único na frequência encontrada na parte (*a*)? *Dica*: Você se lembra do ângulo de Brewster?

13.18 No guia da Figura 13.25 é dado que os modos $m = 1$, que se propagam da esquerda para a direita, se refletem totalmente na interface, de forma que nenhuma potência é transmitida na região de constante dielétrica ϵ'_{r2}. (*a*) Determine a faixa de frequências na qual isso ocorrerá. (*b*) A resposta encontrada para a parte (*a*) de alguma forma está relacionada à frequência de corte para os modos $m = 1$ em cada região? *Dica*: Você se lembra do ângulo crítico?

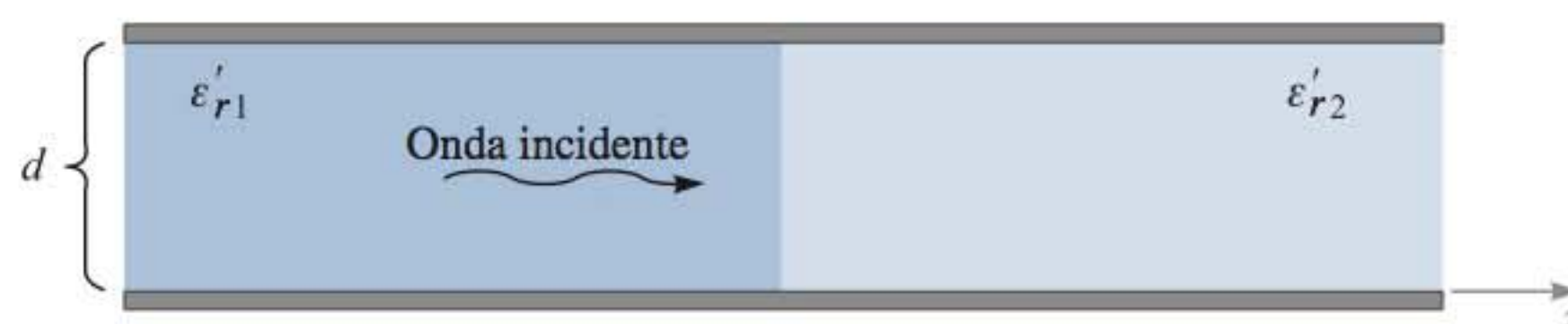



Figura 13.25 Ver Problemas 13.17 e 13.18.

13.19 Um guia de onda retangular tem dimensões $a = 6$ cm e $b = 4$ cm. (*a*) Em qual faixa de frequências o guia irá operar em modo único? (*b*) Em qual faixa de frequências o guia irá suportar *ambos* os modos TE_{10} e TE_{01} e nenhum outro mais?

13.20 Dois guias de onda retangulares estão unidos ponta com ponta. Os guias possuem dimensões idênticas, onde $a = 2b$. Um guia está preenchido com ar. O outro está preenchido com um dielétrico sem perdas caracterizado por ϵ_r'. (*a*) Determine o valor máximo permitido para ϵ_r' de forma que uma operação em modo único possa ser assegurada simultaneamente em *ambos* os guias em alguma frequência. (*b*) Escreva uma expressão para a faixa de frequências na qual uma operação monomodo ocorrerá em ambos os guias. Sua resposta deve considerar ϵ_r', as dimensões do guia (conforme necessário) e outras constantes conhecidas.

13.21 Um guia de onda retangular preenchido com ar deve ser construído para uma operação em monomodo em 15 GHz. Especifique as dimensões do guia, *a* e *b*, de forma que a frequência de projeto seja 10% mais alta que a frequência de corte para o modo TE_{10}, enquanto é 10% mais baixa que a frequência de corte para o próximo modo de ordem mais alta.

13.22 Utilizando a relação $\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\{\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*\}$ e as Equações (106) a (108), mostre que a densidade média de potência no modo TE_{10} em um guia de onda retangular é dada por

$$\langle S \rangle = \frac{\beta_{10}}{2\omega\mu} E_0^2 \,\mathrm{sen}^2\,(\kappa_{10} x)\mathbf{a}_z \ \mathrm{W/m^2}$$

13.23 Integre o resultado do Problema 13.22 pela seção reta do guia, $0 < x < a$, $0 < y < b$, para mostrar que a potência média em watts transmitida ao longo do guia é dada por

$$P_{\mathrm{med}} = \frac{\beta_{10} ab}{4\omega\mu} E_0^2 = \frac{ab}{4\eta} E_0^2 \,\mathrm{sen}\,\theta_{10} \ \mathrm{W}$$

Onde $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ e θ_{10} é o ângulo associado ao modo TE_{10}. Interprete.

13.24 Mostre que o parâmetro de dispersão de grupo, $d^2\beta/d\omega^2$, para um dado modo em um guia de onda de placas paralelas ou retangular é dado por

$$\frac{d^2\beta}{d\omega^2} = -\frac{n}{\omega c}\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2\right]^{-3/2}$$

onde ω_c é a frequência angular de corte para o modo em questão [note que a forma para a derivada primeira já foi encontrada, resultando na Equação (57)].

13.25 Considere um pulso limitado por transformada de frequência central $f = 10$ GHz, de largura total $2T = 1{,}0$ ns. O pulso se propaga em um guia retangular sem perdas monomodo que é preenchido com ar e no qual a frequência de operação de 10 GHz vale 1,1 vezes a frequência de corte do modo TE_{10}. Utilizando o resultado do Problema 13.24, determine o comprimento do

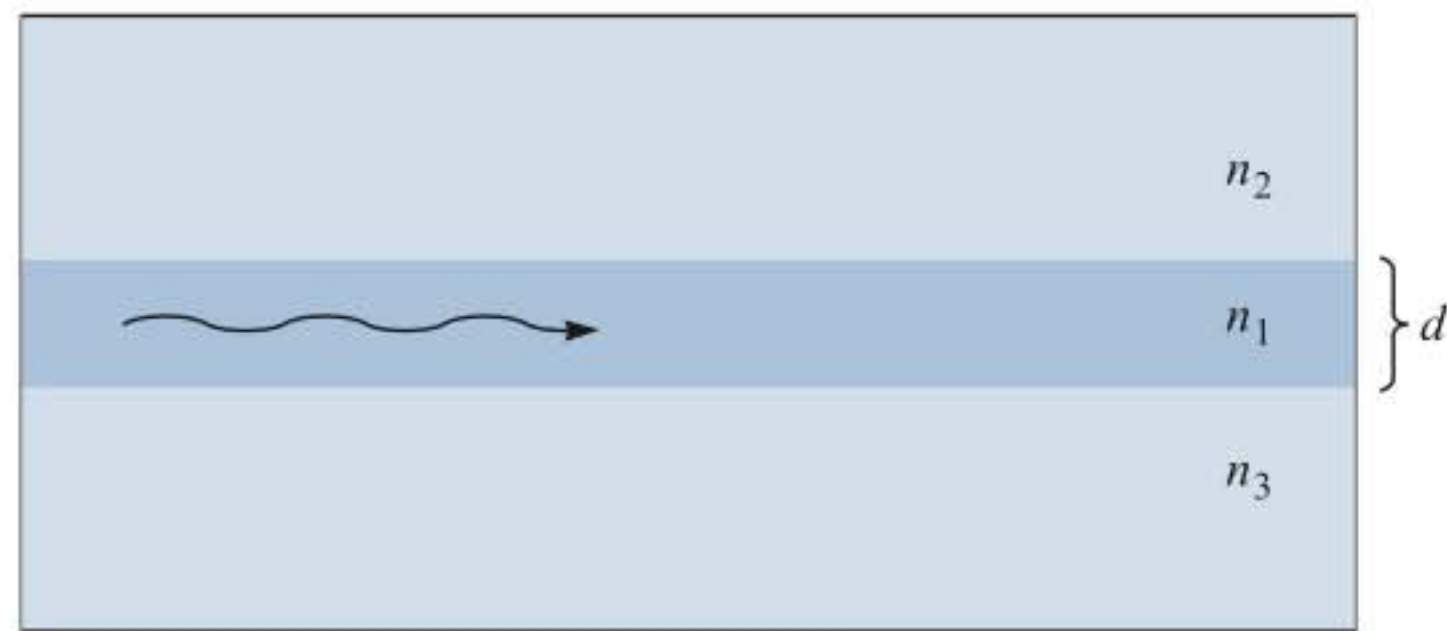



Figura 13.26 Ver Problema 13.29.

guia necessário para que o pulso se alargue para duas vezes o seu valor inicial. Qual passo simples pode ser tomado para reduzir o alargamento do pulso nesse guia, enquanto se mantém a mesma largura inicial do pulso? Informações adicionais para esse problema são encontradas na Seção 12.6.

13.26 Um guia de onda dielétrico simétrico laminado tem uma espessura da lâmina $d = 10\ \mu$m, com $n_1 = 1{,}48$ e $n_2 = 1{,}45$. Se o comprimento de onda de operação vale $\lambda = 1{,}3\ \mu$m, quais modos se propagarão?

13.27 Sabe-se que um guia de onda simétrico laminado suporta apenas um único par de modos TE e TM em um comprimento de onda $\lambda = 1{,}55\ \mu$m. Se a espessura da lâmina vale 5 μm, qual é o valor máximo de n_1 se $n_2 = 3{,}30$?

13.28 Em um guia de onda simétrico laminado, $n_1 = 1{,}50$, $n_2 = 1{,}45$ e $d = 10\ \mu$m. (*a*) Qual é a velocidade de fase de modo $m = 1$, TE ou TM, no corte? (*b*) Como seu resultado para a parte (*a*) mudará considerando modos de ordem mais alta (se é que mudarão)?

13.29 Um guia de onda *assimétrico* laminado é mostrado na Figura 13.26. Neste caso, as regiões acima e abaixo da lâmina possuem índices de refração diferentes, onde $n_1 > n_3 > n_2$. (*a*) Escreva, utilizando os índices apropriados, uma expressão para o ângulo de onda θ_1 menor possível que um modo guiado pode ter. (*b*) Escreva uma expressão para a velocidade de fase máxima que um modo guiado pode ter nessa estrutura, utilizando parâmetros dados ou conhecidos.

13.30 Sabe-se que uma fibra ótica de índice degrau possui modo único em comprimentos de onda $\lambda > 1{,}2\ \mu$m. Outra fibra deve ser fabricada a partir dos mesmos materiais, mas deve apresentar modo único em comprimentos de onda $\lambda > 0{,}63\ \mu$m. Em qual porcentagem o raio do núcleo da nova fibra diferirá do antigo? Ele deve ser maior ou menor?

13.31 O raio do campo modal é maior ou menor que o raio do núcleo de uma fibra de índice degrau monomodo?

13.32 O raio do campo modal de uma fibra de índice degrau corresponde a 4,5 μm no comprimento de onda no espaço livre $\lambda = 1{,}30\ \mu$m. Se o comprimento de onda de corte é especificado como $\lambda_c = 1{,}20\ \mu$m, encontre o raio do campo modal em $\lambda = 1{,}55\ \mu$m.

14

Radiação Eletromagnética e Antenas

Estamos acostumados com a ideia de que os mecanismos de perdas em dispositivos elétricos, incluindo linhas de transmissão e guias de onda, estão associados aos efeitos resistivos, nos quais energia elétrica é transformada em calor. Consideramos também os campos elétrico e magnético variáveis no tempo como totalmente confinados em um guia de onda ou circuito. De fato, o confinamento é raramente completo e a energia eletromagnética *radiará* do dispositivo para o meio ao redor em algum grau. A radiação pode causar um efeito indesejado, pois ela representa um mecanismo de perda de energia adicional, ou também porque um dispositivo pode receber sinais indesejados da região onde está inserido. Por outro lado, uma antena bem projetada corresponde a uma interface eficiente entre ondas guiadas e ondas no espaço livre, uma vez que, nesse caso, o objetivo é justamente radiar ou receber energia eletromagnética. Em cada caso, é importante entender a radiação, para que possa ser usada de forma efetiva ou ser reduzida ao mínimo possível. Neste capítulo, nosso objetivo é estabelecer um entendimento sobre este fenômeno e explorar diversos exemplos práticos de projeto de antenas. ■

14.1 PRINCÍPIOS BÁSICOS DE RADIAÇÃO: O DIPOLO HERTZIANO

O ponto essencial deste capítulo é a afirmação de que *qualquer* distribuição de corrente variável no tempo radiará energia eletromagnética. Nossa primeira tarefa será, então, encontrar os campos que radiam de uma fonte específica que varia no tempo. Este problema é diferente de qualquer outro que exploramos anteriormente. Na discussão de ondas e campos no interior de meios e nos guias de ondas apenas a movimentação da onda no meio foi investigada, e as fontes dos campos não foram consideradas. No Capítulo 11, encontramos a distribuição de corrente em um condutor ao relacioná-la às intensidades consideradas dos campos elétrico e magnético na superfície do condutor. Embora seja possível associar a fonte de corrente ao campo, isso não é muito prático para nossos objetivos, pois os condutores foram considerados infinitos em pelo menos uma dimensão.

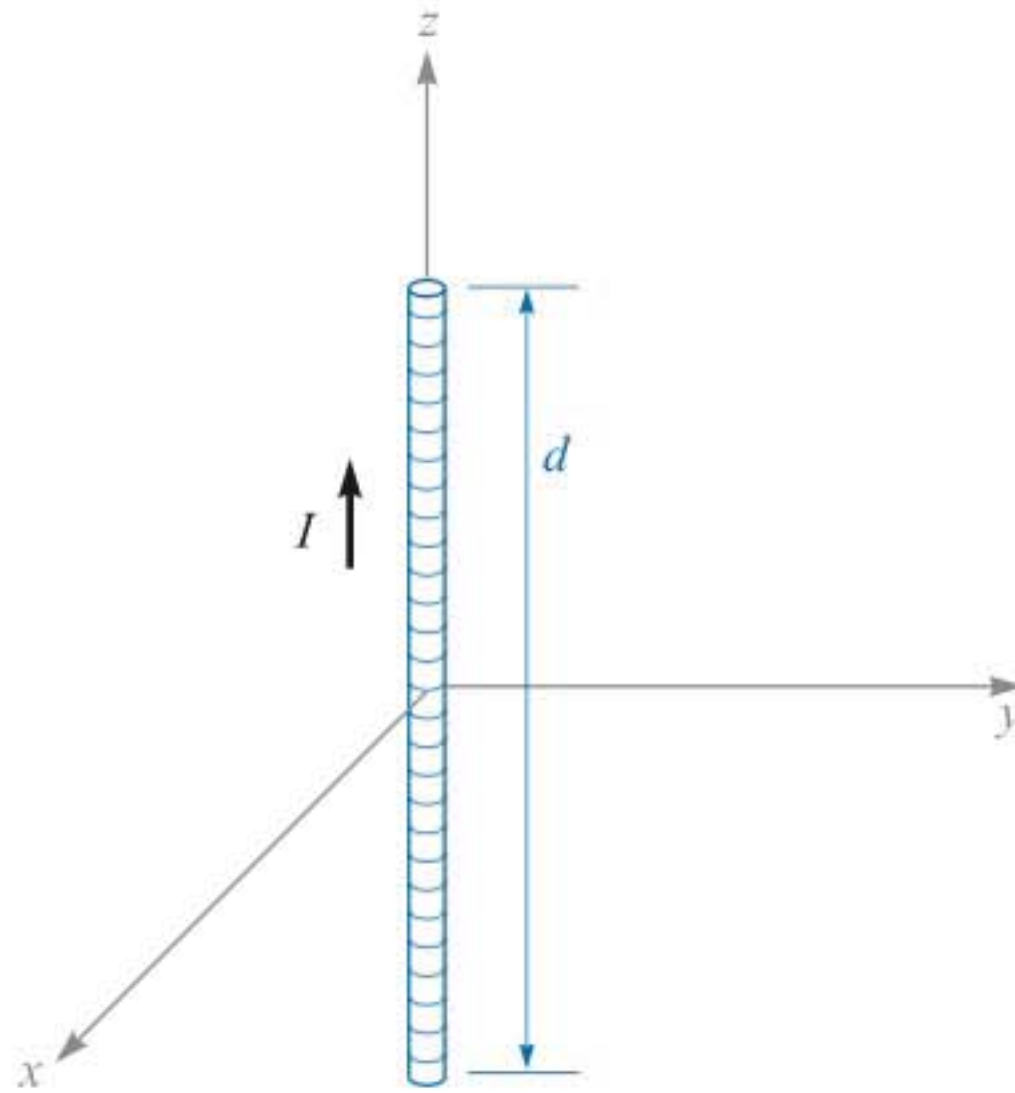



Figura 14.1 Um filamento diferencial de corrente de comprimento d é percorrido por uma corrente $I(t) = I_0 \cos \omega t$.

Começamos o estudo por um filamento de corrente de seção reta infinitesimalmente pequena, de comprimento diferencial, posicionado dentro de um meio infinito sem perdas, especificado por uma permeabilidade magnética μ e uma permissividade elétrica ϵ (ambas reais); mais tarde, estenderemos de maneira simples os resultados para dimensões maiores que um comprimento de onda. O filamento diferencial é posicionado com seu centro na origem e orientado ao longo do eixo z, como mostrado na Figura 14.1. O sentido positivo da corrente é tomado no sentido de $\mathbf{a}_z$. Consideramos que uma corrente uniforme, $I(t) = I_0 \cos \omega t$, flui nesse pequeno comprimento d; a existência dessa corrente implicaria a existência de cargas variáveis no tempo e de amplitudes instantâneas opostas em cada lado do fio. Por esta razão, o fio é denominado um *dipolo elementar* ou *dipolo de Hertz*. Essa definição difere da definição mais geral de uma antena dipolo, a qual usaremos posteriormente neste capítulo.

O primeiro passo é a aplicação da expressão do potencial vetor magnético retardado, conforme apresentado na Seção 9.5,

$$\mathbf{A} = \int \frac{\mu\, I[t - R/v]\, d\mathbf{L}}{4\pi R} \tag{1}$$

onde I é uma função do tempo retardado $t - R/v$.

Quando uma frequência única é utilizada para alimentar a antena, v é a velocidade de fase da onda naquela frequência, no meio onde o elemento de corrente está imerso, e é dado por $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$. Uma vez que não é necessária nenhuma integração para o filamento muito pequeno aqui considerado, temos

$$\boxed{\mathbf{A} = \frac{\mu\, I[t - R/v]\, d}{4\pi R}\mathbf{a}_z} \tag{2}$$

Apenas o componente em z de $\mathbf{A}$ está presente, pois a corrente está apenas na direção $\mathbf{a}_z$. Em qualquer ponto P, a uma distância R da origem, o potencial vetor é retardado de R/v e, então, usamos

$$I[t - R/v] = I_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{R}{v}\right)\right] = I_0 \cos[\omega t - kR] \tag{3}$$

onde o número de onda no meio sem perdas é $k = \omega/v = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$. Na forma fasorial, a Equação (3) torna-se

$$I_s = I_0 e^{-jkR} \tag{4}$$

onde a amplitude da corrente, I_0, é considerada real (como será ao longo do capítulo). Incorporando a Equação (4) na Equação (2), encontramos o fasor do potencial retardado:

$$\mathbf{A}_s = A_{zs}\,\mathbf{a}_z = \frac{\mu I_0 d}{4\pi R} e^{-jkR}\,\mathbf{a}_z \tag{5}$$

Utilizando um sistema de coordenadas misto (por enquanto), vamos substituir R pelo r minúsculo do sistema de coordenadas esféricas e, então, determinar quais componentes esféricos serão representados por A_{zs}. Usando as projeções como ilustrado na Figura 14.2, determinamos

$$A_{rs} = A_{zs}\cos\theta \tag{6a}$$

$$A_{\theta s} = -A_{zs}\,\text{sen}\,\theta \tag{6b}$$

e, em consequência,

$$A_{rs} = \frac{\mu I_0 d}{4\pi r}\cos\theta\, e^{-jkr} \tag{7a}$$

$$A_{\theta s} = -\frac{\mu I_0 d}{4\pi r}\,\text{sen}\,\theta\, e^{-jkr} \tag{7b}$$

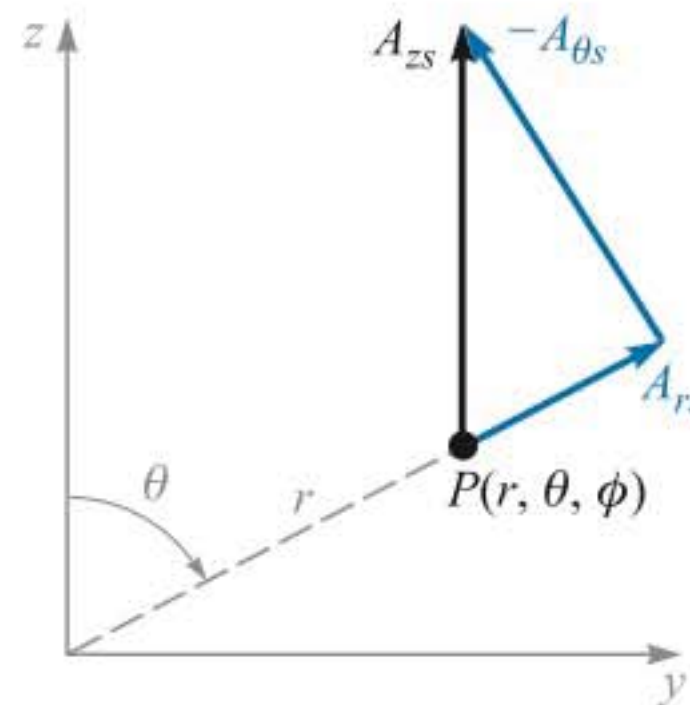



Figura 14.2 A decomposição de A_{zs} em $P(r, \theta, \phi)$ nos dois componentes esféricos A_{rs} e $A_{\theta s}$. O esboço é arbitrariamente desenhado no plano $\phi = 90°$.

A partir desses dois componentes do potencial vetor magnético em P podemos encontrar $\mathbf{B}_s$ ou $\mathbf{H}_s$ da definição de $\mathbf{A}_s$,

$$\mathbf{B}_s = \mu \mathbf{H}_s = \nabla \times \mathbf{A}_s \tag{8}$$

Considerando as derivadas parciais indicadas, conforme especificado pelo operador rotacional em coordenadas esféricas, somos capazes de separar a Equação (8) em seus três componentes esféricos, dos quais somente o componente em ϕ é diferente de zero:

$$H_{\phi s} = \frac{1}{\mu r} \frac{\partial}{\partial r}(r A_{\theta s}) - \frac{1}{\mu r} \frac{\partial A_{rs}}{\partial \theta} \tag{9}$$

Substituindo as Equações (7a) e (7b) na Equação (9), determinamos o campo magnético:

$$H_{\phi s} = \frac{I_0 d}{4\pi} \operatorname{sen} \theta \, e^{-jkr} \left(j \frac{k}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \tag{10}$$

O campo elétrico associado com a Equação (10) é encontrado a partir de uma das equações de Maxwell – especificamente a forma pontual da lei circuital de Ampère quando aplicada à região circunvizinha (onde correntes de condução e de convecção não existem). Na forma fasorial, esta é a Equação (23) do Capítulo 11, exceto por considerarmos aqui um meio sem perdas de permissividade ϵ:

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = j\omega\epsilon \mathbf{E}_s \tag{11}$$

Usando a Equação (11), expandimos o rotacional em coordenadas esféricas, considerando a existência de somente um componente em ϕ de $\mathbf{H}_s$. Os componentes do campo elétrico resultante são:

$$E_{rs} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(H_{\phi s} \operatorname{sen} \theta) \tag{12a}$$

$$E_{\theta s} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left(-\frac{1}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r}(r H_{\phi s}) \tag{12b}$$

Então, substituindo a Equação (10) nas Equações (12a) e (12b) encontramos:

$$E_{rs} = \frac{I_0 d}{2\pi} \eta \cos \theta \, e^{-jkr} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{jkr^3} \right) \tag{13a}$$

$$E_{\theta s} = \frac{I_0 d}{4\pi} \eta \operatorname{sen} \theta \, e^{-jkr} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{jkr^3} \right) \tag{13b}$$

onde a impedância intrínseca é, como sempre, $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$.

As Equações (10), (13a) e (13b) correspondem às expressões dos campos que nos propusemos a encontrar. O próximo passo é interpretá-las. Inicialmente, notamos que o fator e^{-jkr} aparece em cada componente. Este termo descreve uma onda esférica, propagando para fora da origem no sentido positivo de r, com uma constante de fase $k = 2\pi/\lambda$. O termo λ é o comprimento de onda, conforme medido no meio. Aqui existem complicações adicionais causadas pelos termos entre parênteses, que

são funções complexas de r, que aparecem em todas as três equações. Esses termos podem ser expressos na forma polar (intensidade e fase), o que leva às seguintes versões modificadas das três equações de campo para o dipolo Hertziano:

$$H_{\phi s} = \frac{I_0 kd}{4\pi r}\left[1 + \frac{1}{(kr)^2}\right]^{1/2} \operatorname{sen}\theta \, \exp\left[-j(kr - \delta_\phi)\right] \tag{14}$$

$$E_{rs} = \frac{I_0 d}{2\pi r^2}\,\eta\left[1 + \frac{1}{(kr)^2}\right]^{1/2} \cos\theta \, \exp\left[-j(kr - \delta_r)\right] \tag{15}$$

$$E_{\theta s} = \frac{I_0 kd}{4\pi r}\,\eta\left[1 - \frac{1}{(kr)^2} + \frac{1}{(kr)^4}\right]^{1/2} \operatorname{sen}\theta \, \exp\left[-j(kr - \delta_\theta)\right] \tag{16}$$

onde os termos de fase adicional são

$$\delta_\phi = \operatorname{tg}^{-1}[kr] \tag{17a}$$

$$\delta_r = \operatorname{tg}^{-1}[kr] - \frac{\pi}{2} \tag{17b}$$

e

$$\delta_\theta = \operatorname{tg}^{-1}\left[kr\left(1 - \frac{1}{(kr)^2}\right)\right] \tag{18}$$

Nas Equações (17) e (18), o valor principal é sempre tomado no momento da avaliação da tangente inversa. Isso significa que as fases, como expressas nas Equações (17) e (18), ocorrerão dentro da faixa $\pm\pi/2$, à medida que kr varia entre zero e infinito. Suponha que uma única frequência (valor de k) seja escolhida e que os campos sejam observados em um instante de tempo fixo. Considere a observação do campo ao longo de um caminho no sentido crescente de r, no qual oscilações espaciais serão vistas à medida que r variar. Como resultado dos termos de fase nas Equações (17) e (18), o período de oscilação mudará com r crescente. Podemos demonstrar isso ao considerar o componente H_ϕ como uma função de r sob as seguintes condições:

$$I_0 d = 4\pi \qquad \theta = 90^\circ \qquad t = 0$$

Usando $k = 2\pi/\lambda$, a Equação (14) torna-se

$$H_{\phi s} = \frac{2\pi}{\lambda r}\left[1 + \left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right)^2\right]^{1/2} \exp\left\{-j\left[\frac{2\pi r}{\lambda} - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)\right]\right\} \tag{19}$$

A parte real da Equação (19) fornece o campo instantâneo real em $t = 0$:

$$\mathcal{H}_\phi(r, 0) = \frac{2\pi}{\lambda r}\left[1 + \left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right)^2\right]^{1/2} \cos\left[\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right) - \frac{2\pi r}{\lambda}\right] \tag{20}$$

Utilizaremos em seguida a identidade cos $(a - b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$, em adição à cos $(\operatorname{tg}^{-1} x) = 1/\sqrt{1+x^2}$ e sen $(\operatorname{tg}^{-1} x) = x/\sqrt{1+x^2}$. Com esses, a Equação (20) é simplificada para

$$\mathcal{H}_\phi = \frac{1}{r^2}\left[\cos\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right) + \frac{2\pi r}{\lambda}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)\right] \tag{21}$$

Alguns pontos importantes surgem quando estuda-se a Equação (21). Em primeiro lugar, em distâncias r que são da ordem de um comprimento de onda, a expressão consiste em duas funções senoidais que têm o mesmo período, mas a amplitude do segundo termo aumenta com o aumento de r. Isso ocasiona um comportamento não senoidal significativo no qual o campo, como uma função de r/λ, oscilará, mas com periodicidade não uniforme e com amplitudes positiva e negativa que diferem em cada ciclo. Em segundo lugar, em distâncias r muito maiores que um comprimento de onda, o segundo termo da Equação (21) domina e a variação do campo com r aproxima-se de uma senoide pura. Em consequência, podemos dizer que para todos os propósitos práticos a onda em grandes distâncias, onde $r >> \lambda$, é uma onda plana uniforme que possui uma variação senoidal com a distância (e, de fato, com o tempo) e um comprimento de onda bem definido. Essa onda, evidentemente, transporta potência para fora da antena diferencial.

Continuando a investigação das Equações (10), (13*a*) e (13*b*), vamos agora dar uma olhada mais cuidadosa nas expressões que contêm os termos variáveis, tais como $1/r^3$, $1/r^2$ e $1/r$. Nos pontos muito próximos do elemento de corrente, o termo $1/r^3$ deve ser dominante. No exemplo numérico que usamos, os valores relativos dos termos em $1/r^3$, $1/r^2$ e $1/r$ na expressão de $E_{\theta s}$ são aproximadamente 250, 16 e 1, respectivamente, quando r é 1 cm. A variação do campo elétrico com $1/r^3$ deve nos lembrar do campo *eletrostático* do dipolo (Capítulo 4). O desenvolvimento desse conceito é assunto do Problema 14.4. Os termos de campo próximo representam uma energia armazenada em um campo reativo (capacitivo), e não contribuem para a potência radiada; similarmente, o termo com o inverso do quadrado na expressão de $H_{\phi s}$ é importante apenas na região muito próxima do elemento de corrente. Ele corresponde ao campo de *indução* do elemento c.c., como dado pela lei de Biot-Savart (Problema 14.5).

Em distâncias correspondentes a 10 ou mais comprimentos de onda a partir do elemento de corrente, o produto é $kr = 2\pi r/\lambda > 20\pi$, e os campos simplificam-se drasticamente. Nas Equações (14) a (16), os termos entre colchetes $1/(kr)^2$ e $1/(kr)^4$ podem ser considerados muito menores que a unidade e, assim, podem ser desprezados. Além disso, todas as fases [Equações (17) e (18)] aproximam-se de $\pi/2$. Esse efeito é também observado nas Equações (10), (13*a*) e (13*b*), nas quais todos os termos, exceto o que varia com o inverso da distância ($1/r$), podem ser desprezados. Em tais distâncias, nas quais $kr >> 1$ (equivalentemente, $r >> \lambda$), dizemos que estamos no *campo distante* ou na *região distante*. Os termos de campo restantes que têm a dependência de $1/r$ são os campos *radiados*; isso produz um campo E_{rs} aproximadamente nulo, direcionando à existência de somente $E_{\theta s}$ e $H_{\phi s}$. Assim, na região distante:

$$E_{rs} \doteq 0$$

$$E_{\theta s} = j\frac{I_0 kd}{4\pi r}\,\eta\,\operatorname{sen}\theta\, e^{-jkr} \tag{22}$$

$$H_{\phi s} = j\frac{I_0 kd}{4\pi r}\operatorname{sen}\theta\, e^{-jkr} \tag{23}$$

A relação entre esses campos evidentemente é a mesma de uma onda plana uniforme, na qual uma onda esférica em expansão se aproxima, a grandes distâncias da fonte (altos valores de r, e sobre regiões onde $1/r$ é aproximadamente constante). Especificamente,

$$E_{\theta s} = \eta H_{\phi s} \qquad (kr >> 1 \text{ ou } r >> \lambda) \tag{24}$$

A variação de ambos os campos de radiação com o ângulo polar θ é a mesma. Os campos são máximos no plano equatorial (plano xy) do elemento de corrente e atingem zero nas extremidades do elemento. A variação com o ângulo pode ser mostrada construindo-se um gráfico de um *padrão vertical* ou um padrão no plano E (considerando uma orientação vertical do elemento de corrente). O plano E é simplesmente o plano coordenado que contém o campo elétrico e que, em nosso caso, é qualquer superfície de ϕ constante no sistema de coordenadas esféricas. A Figura 14.3 mostra um gráfico do plano E da Equação (22) em coordenadas polares, em que a intensidade relativa de $E_{\theta s}$ é construída em função de θ para um r constante. O comprimento do vetor mostrado na figura representa a intensidade de E_θ, normalizado para a unidade em $\theta = 90°$. O comprimento do vetor é justamente $|\text{sen } \theta|$, e à medida que θ varia, a ponta do vetor traça um círculo, como mostra a figura.

Um padrão horizontal, ou *padrão do plano H*, pode também ser construído para este ou para outros sistemas de antenas mais complicados. Neste caso, este padrão mostraria a variação da intensidade de campo com ϕ. O plano H do elemento de corrente (o plano que contém o campo magnético) é qualquer plano normal ao eixo z. Como E_θ não é função de ϕ, o gráfico do plano H seria, simplesmente, um círculo centrado na origem.

EP14.1. Uma antena curta com uma distribuição uniforme de corrente colocada no ar tem $I_0 d = 3 \times 10^{-4}$ A · m e $\lambda = 10$ cm. Encontre $|E_{\theta s}|$ em $\theta = 90°$, $\phi = 0°$ e $r =$: (*a*) 1 cm; (*b*) 2 cm; (*c*) 20 cm; (*d*) 200 cm; (*e*) 2 m.

Resp. 125 V/m; 25 V/m; 2,8 V/m; 0,28 V/m; 0,028V/m

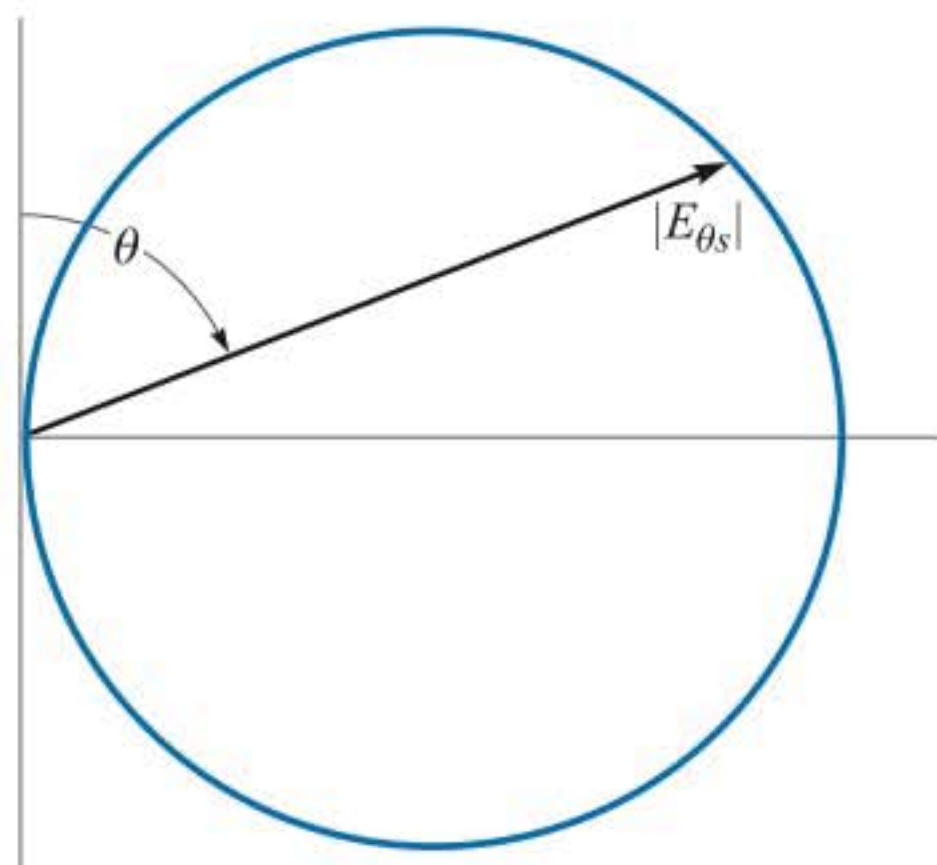



Figura 14.3 O gráfico polar do padrão no plano *E* de um elemento de corrente vertical. O pico da amplitude de $E_{\theta s}$ é representado em função do ângulo polar θ em distância r constante. O lugar geométrico é um círculo.

14.2 ESPECIFICAÇÕES DE ANTENAS

É importante descrever e quantificar totalmente a radiação de uma antena geral. Para fazer isso, necessitamos de novos conceitos e definições.

Com o objetivo de avaliar a potência radiada, a média temporal do vetor de Poynting deve ser encontrada [Equação (77), Capítulo 11]. No presente caso, essa média torna-se

$$< \mathbf{S} > = \frac{1}{2} \mathcal{R}e\{E_{\theta s} H^*_{\phi s}\} \mathbf{a}_r \quad \mathrm{W/m^2} \tag{25}$$

Substituindo as Equações (22) e (23) na Equação (25), obtemos a média temporal da intensidade do vetor de Poynting:

$$| < \mathbf{S} > | = S_r = \frac{1}{2} \left(\frac{I_0 k d}{4\pi r} \right)^2 \eta \, \mathrm{sen}^2 \theta \tag{26}$$

Desta, encontramos a média temporal da potência que atravessa a superfície de uma esfera de raio r, centrada na antena:

$$P_r = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} S_r r^2 \, \mathrm{sen}\, \theta d\theta d\phi = 2\pi \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{I_0 k d}{4\pi} \right)^2 \eta \int_0^{\pi} \mathrm{sen}^3 \theta \, d\theta \tag{27}$$

A integral é avaliada e substituímos $k = 2\pi/\lambda$. Também consideramos o meio como o espaço livre, onde $\eta = \eta_0 \doteq 120\pi$. Finalmente, obtemos:

$$P_r = 40\pi^2 \left(\frac{I_0 d}{\lambda} \right)^2 \quad \mathrm{W} \tag{28}$$

Esta é a mesma potência média que seria dissipada por um resistor de resistência R_{rad} alimentado por uma corrente senoidal de amplitude I_0 na ausência de qualquer radiação, onde

$$P_r = \frac{1}{2} I_0^2 R_{\mathrm{rad}} \tag{29}$$

Denominamos essa resistência efetiva como a *resistência de radiação* da antena. Para a antena diferencial, tem-se

$$R_{\mathrm{rad}} = \frac{2P_r}{I_0^2} = 80\pi^2 \left(\frac{d}{\lambda} \right)^2 \tag{30}$$

Se considerarmos que o comprimento diferencial vale 0,01λ, por exemplo, R_{rad} valerá aproximadamente 0,08 Ω. Essa pequena resistência é provavelmente comparável à resistência *ôhmica* de uma antena prática (provendo uma medida da potência dissipada na forma calor), e assim a eficiência da antena poderia ser insatisfatoriamente baixa. Um casamento efetivo com a fonte torna-se muito difícil de ser obtido, pois a reatância de entrada de uma antena eletricamente curta é muito maior em amplitude que a resistência de entrada R_{rad}.

A avaliação da potência resultante da antena, de acordo com a Equação (27), envolve a integração do vetor de Poynting sobre uma casca esférica de raio presumivelmente grande, e tal que a antena corresponda a uma fonte pontual no centro da esfera. Em vista disso, um novo conceito de densidade de potência pode ser introduzido. Este envolve a potência transportada no interior de um cone muito fino com seu vértice na localização da antena. O eixo do cone estende-se ao longo de uma linha radial, e assim o cone intercepta a superfície esférica sobre a qual a integral na Equação (27) é avaliada. Aquela porção da área da esfera que o cone intercepta terá área A. Definimos o ***ângulo sólido*** do cone da seguinte maneira: se $A = r^2$, onde r é o raio da esfera, definimos que o cone possui um ângulo sólido, Ω, igual ao *esterorradiano* (sr).[1] Como a área total da esfera é $4\pi r^2$, vemos que o ângulo sólido contido no interior da esfera é 4π esterorradiano.

Como consequência dessa definição, a área diferencial sobre a superfície esférica pode ser expressa por um ângulo sólido diferencial, em:

$$dA = r^2 \, d\Omega \tag{31}$$

A área total da esfera pode, então, ser expressa como uma integral sobre o ângulo sólido ou, equivalentemente, por uma integral usando coordenadas esféricas:

$$A_{resultante} = 4\pi r^2 = \int_0^{4\pi} r^2 d\Omega \; = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi \tag{32}$$

da qual identificamos o ângulo sólido diferencial expresso em coordenadas esféricas:

$$\boxed{d\Omega = \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi} \tag{33}$$

EP14.2. Um cone está centrado no eixo z positivo com seu vértice na origem. O ângulo do cone em coordenadas esféricas é θ_1. (*a*) Se o cone subtende 1 sr de ângulo sólido, determine θ_1. (*b*) Se $\theta_1 = 45°$, determine o ângulo sólido subtendido.

Resp. 32,8°, $\pi\sqrt{2}$

Podemos expressar, em seguida, a intensidade do vetor de Poynting conforme a Equação (26), em unidades de potência por ângulo sólido. Para fazer isso, multiplicamos a densidade de potência em Watts/m^2 na Equação (26) pela área da esfera englobada em 1 esterorradiano – a qual é r^2. O resultado, conhecido como a *intensidade de radiação*, é

$$\boxed{K(\theta, \phi) = r^2 S_r \quad \text{W/Sr}} \tag{34}$$

Para o dipolo Hertziano, a intensidade de radiação é independente de ϕ, e teríamos [usando a Equação (26)]:

$$K(\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{I_0 k d}{4\pi}\right)^2 \eta \operatorname{sen}^2\theta \quad \text{W/Sr} \tag{35}$$

[1] Esta definição é relacionada à do radiano, na qual o comprimento do arco de um círculo, traçado pela mudança de um ângulo de um radiano, é o raio do círculo, r.

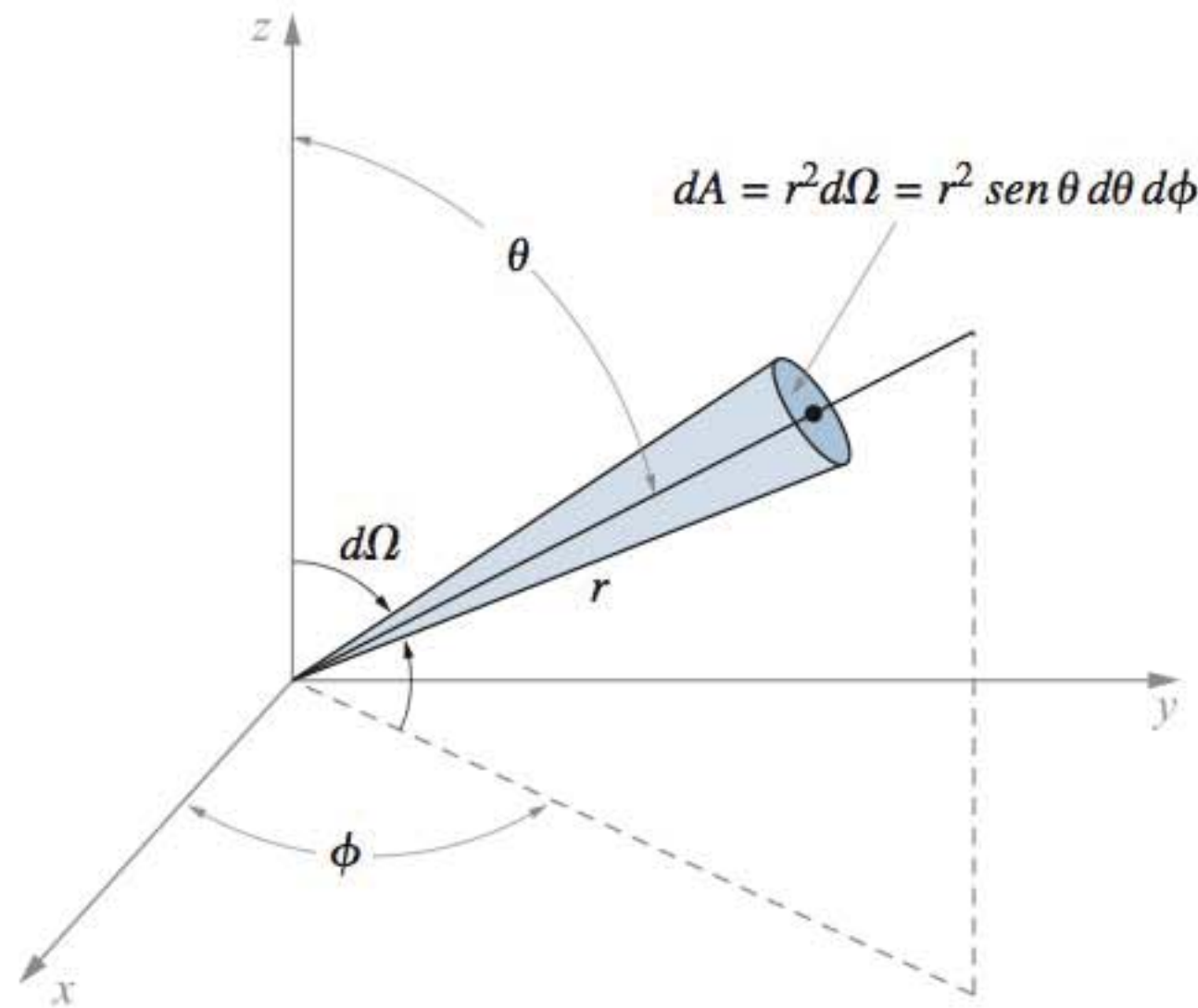



Figura 14.4 Um cone que tem ângulo sólido diferencial, $d\Omega$, subtende a área diferencial (hachurada) sobre a superfície de uma esfera de raio r. Esta área, dada por $dA = r^2 d\Omega$, também pode ser expressa em nosso mais familiar sistema de coordenadas esféricas como $dA = r^2 \text{sen}\,\theta d\theta d\phi$.

Assim, no caso geral, a potência total radiada é

$$P_r = \int_0^{4\pi} K d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} K(\theta, \phi) \,\text{sen}\,\theta d\theta d\phi \quad \text{W} \tag{36}$$

a qual, para o dipolo Hertziano, gera o mesmo resultado encontrado na Equação (28).

A vantagem de usar a intensidade de radiação para a densidade de potência é a independência que essa grandeza tem em relação ao raio. Isto é verdade, contudo, somente se a densidade de potência original exibe uma dependência de $1/r^2$. De fato, *todas* as antenas possuem essa dependência funcional em relação ao raio na região de campo distante, onde para uma distância grande o suficiente a antena parece uma fonte pontual de potência. Considerando que o meio circunvizinho não absorve potência, a integral do vetor de Poynting sobre uma esfera fechada com um raio de *qualquer* valor deve gerar o mesmo resultado. Esse fato demanda uma dependência com o inverso do quadrado do raio para a densidade de potência. Com a dependência radial removida, pode-se concentrar na dependência angular da densidade de potência expressa por K, e isso será significativamente diferente entre antenas diferentes.

Um caso especial de uma fonte de potência é um *radiador isotrópico*, definido por ter uma intensidade de radiação *constante* (isto é, $K = K_{isotrópico}$ é independente de θ e de ϕ). Isso resulta em uma relação simples entre K e a potência total radiada:

$$P_r = \int_0^{4\pi} K_{isotrópico}\, d\Omega = 4\pi K_{isotrópico} \Rightarrow K_{isotrópico} = P_r/4\pi \quad \text{(radiador isotrópico)} \tag{37}$$

Geralmente, K *variará* com o ângulo, gerando mais intensidade em algumas direções do que em outras. Ele é útil para comparar a intensidade de radiação em uma dada direção com aquela que ocorreria se a antena fosse radiar *a mesma potência resultante*

isotropicamente. A função diretividade, $D(\theta, \phi)$, faz exatamente isso.[2] Utilizando as Equações (36) e (37), podemos escrever a diretividade:

$$D(\theta, \phi) = \frac{K(\theta, \phi)}{K_{isotrópico}} = \frac{K(\theta, \phi)}{P_r/4\pi} = \frac{4\pi K(\theta, \phi)}{\oint K \, d\Omega} \tag{38}$$

De interesse particular, na maior parte dos casos, é o máximo valor da diretividade, D_{max}, a qual é algumas vezes chamada simplesmente de D (sem dependência de θ e ϕ indicada):

$$D = D_{max} = \frac{4\pi K_{max}}{\oint K \, d\Omega} \tag{39}$$

na qual a máxima intensidade de radiação, K_{max}, geralmente ocorrerá em mais do que um conjunto de valores de θ e ϕ. Tipicamente, a diretividade é expressa em decibéis, segundo a definição:

$$D_{dB} = 10 \log_{10}(D_{max}) \quad \text{dB} \tag{40}$$

EXEMPLO 14.1

Determine a diretividade do dipolo Hertziano.

Solução. Utilizamos as Equações (35) e (28), com $k = 2\pi/\lambda$ e $\eta = \eta_0 = 120\pi$ na expressão:

$$D(\theta, \phi) = \frac{4\pi K(\theta, \phi)}{P_r} = \frac{2\pi \left(\frac{I_0 d}{2\lambda}\right)^2 120\pi \,\text{sen}^2 \theta}{40\pi^2 \left(\frac{I_0 d}{\lambda}\right)^2} = \frac{3}{2} \,\text{sen}^2 \theta$$

O máximo desse resultado, ocorrendo em $\theta = \pi/2$, é:

$$D_{max} = \frac{3}{2} \quad \text{ou, em decibéis:} \quad D_{dB} = 10 \log_{10}\left(\frac{3}{2}\right) = 1{,}76 \text{ dB}$$

EP14.3. Qual é a diretividade em dB de uma fonte de potência na origem que radia: (*a*) uniformemente, no semiespaço superior, mas nada no semiespaço inferior, (*b*) em todo o espaço com uma densidade de potência com dependência de $\cos^2 \theta$, (*c*) em todo o espaço com uma dependência $|\cos^n \theta|$?

Resp. 3; 4,77; $10 \log_{10}(n + 1)$

[2] Em tempos passados (e em textos mais antigos), a função diretividade era denominada *ganho diretivo*. Este último termo foi descartado pelo *Antenna Standards Committee do IEEE Antennas and Propagation Society*, em favor do termo "diretividade". Detalhes são encontrados em IEEE Std 145-1993.

Normalmente é desejável ter um dispositivo com uma diretividade muito maior do que a encontrada para o dipolo Hertziano. Uma das implicações de uma baixa diretividade (e um problema com a antena curta) é o fato de a potência ser radiada em uma faixa angular ampla no plano E. Na maior parte dos casos, é desejado confinar a potência em uma faixa estreita, ou em uma pequena *largura de feixe*, aumentando, assim, a diretividade. A *largura de feixe de 3 dB* é definida como a separação entre os dois ângulos nos quais a diretividade cai para a metade de seu valor máximo. Para o dipolo Hertziano e usando o resultado $D(\theta, \phi)$ do exemplo anterior, a largura de feixe será entre os dois valores de θ de cada lado de 90°, nos quais $\text{sen}^2\,\theta = 1/2$, ou $|\text{sen}\,\theta| = 1/\sqrt{2} = 0{,}707$. Esses dois valores são 45° e 135°, representando uma largura de feixe de 3 dB de 135° – 45° = 90°. Vemos que o uso de uma antena mais longa direciona a uma largura de feixe mais estreita e a uma resistência de radiação maior. No plano H, a radiação é uniforme em todos os valores de ϕ, não importando qual comprimento é utilizado. É necessário usar múltiplas antenas em um *arranjo** com o objetivo de estreitar o feixe no plano H.

Baseamos diversas definições na potência média total radiada pela antena, P_r. É desejável, contudo, distinguir a potência radiada da potência de *entrada* que é suprida à antena, P_{entrada}. É provável que P_{entrada} seja um pouco maior que P_r devido às perdas resistivas dos materiais condutores que compõem a antena. Para vencer essa resistência, uma maior amplitude da tensão de entrada seria necessária para gerar uma amplitude de corrente, I_0, onde todos os cálculos de potência foram baseados. O *ganho* da antena é definido nesse caminho para acomodar essa diferença.[3]

Especificamente, suponha que a antena em questão fosse radiar isotropicamente *toda* a potência elétrica que é suprida a ela, a qual corresponde a P_{entrada}. A intensidade de radiação seria simplesmente $K_s = P_{\text{entrada}}/4\pi$. O ganho é definido como a razão da intensidade de radiação real em uma direção especificada, K_s:

$$G(\theta, \phi) = \frac{K(\theta, \phi)}{K_s} = \frac{4\pi\, K(\theta, \phi)}{P_{\text{entrada}}} \tag{41}$$

Note que o termo $4\pi\, K(\theta, \phi)$ seria a potência radiada de uma antena isotrópica, cuja intensidade de radiação (neste caso, constante) é $K(\theta, \phi)$. Logo, o ganho expressa a razão da potência radiada de uma antena e da potência de entrada, como *se a antena fosse radiar isotropicamente* com uma constante K, avaliada em ângulos θ e ϕ selecionados. Usando a Equação (38), podemos relacionar a diretividade ao ganho:

$$D(\theta, \phi) = \frac{4\pi\, K(\theta, \phi)}{P_r} = \frac{P_{\text{entrada}}}{P_r}\, G(\theta, \phi) = \frac{1}{\eta_r} G(\theta, \phi) \tag{42}$$

onde η_r é a *eficiência de radiação* da antena, definida como a razão entre a potência radiada e a potência de entrada. Outras formas de escrever essa equação são:

[3] O ganho da antena definido aqui é algumas vezes denominado de ganho de potência.

* N. de T.: Arranjo ou *conjunto*.

$$\eta_r = \frac{P_r}{P_{\text{entrada}}} = \frac{G(\theta, \phi)}{D(\theta, \phi)} = \frac{G_{\max}}{D_{\max}} \tag{43}$$

a qual expressa η_r como o máximo ganho dividido pela máxima diretividade.

14.3 DIPOLO MAGNÉTICO

Um dispositivo interessante relacionado de forma próxima ao dipolo Hertziano é a antena de *dipolo magnético*. Mostrada na Figura 14.5, a antena consiste em uma espira de corrente circular de raio a, centrado na origem e no plano xy. A corrente na espira é senoidal, dada por $I(t) = I_0 \cos \omega t$, como no caso do dipolo Hertziano. Embora seja possível determinar os campos para essa antena iniciando com os potenciais retardados, como na seção anterior, existe um caminho muito mais fácil.

Primeiro, devemos notar que a corrente circulante implica a existência de um campo elétrico circulante que sobrepõe o fio e que tem a mesma dependência temporal. Com isso, pode-se simplesmente substituir o fio por um campo elétrico circular que pode ser caracterizado como $\mathbf{E}(a, t) = E_0(a)\cos(\omega t)\mathbf{a}_\phi$. Tal alteração deveria substituir a corrente de condução por corrente de deslocamento, a qual não terá efeito nas soluções dos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ no meio. Em seguida, suponha que possamos substituir o campo elétrico por um campo magnético, novamente da forma $\mathbf{H}(a, t) = H_0 \cos(\omega t)\mathbf{a}_\phi$. Esse é o campo magnético que seria gerado pelo dipolo Hertziano no raio a, no plano xy, que permite obter a solução para a corrente na espira mediante o procedimento que descreveremos a seguir.

Começamos com as equações de Maxwell em um meio sem fontes ($\rho_v = 0$ e $\mathbf{J} = \mathbf{0}$):

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{44a}$$

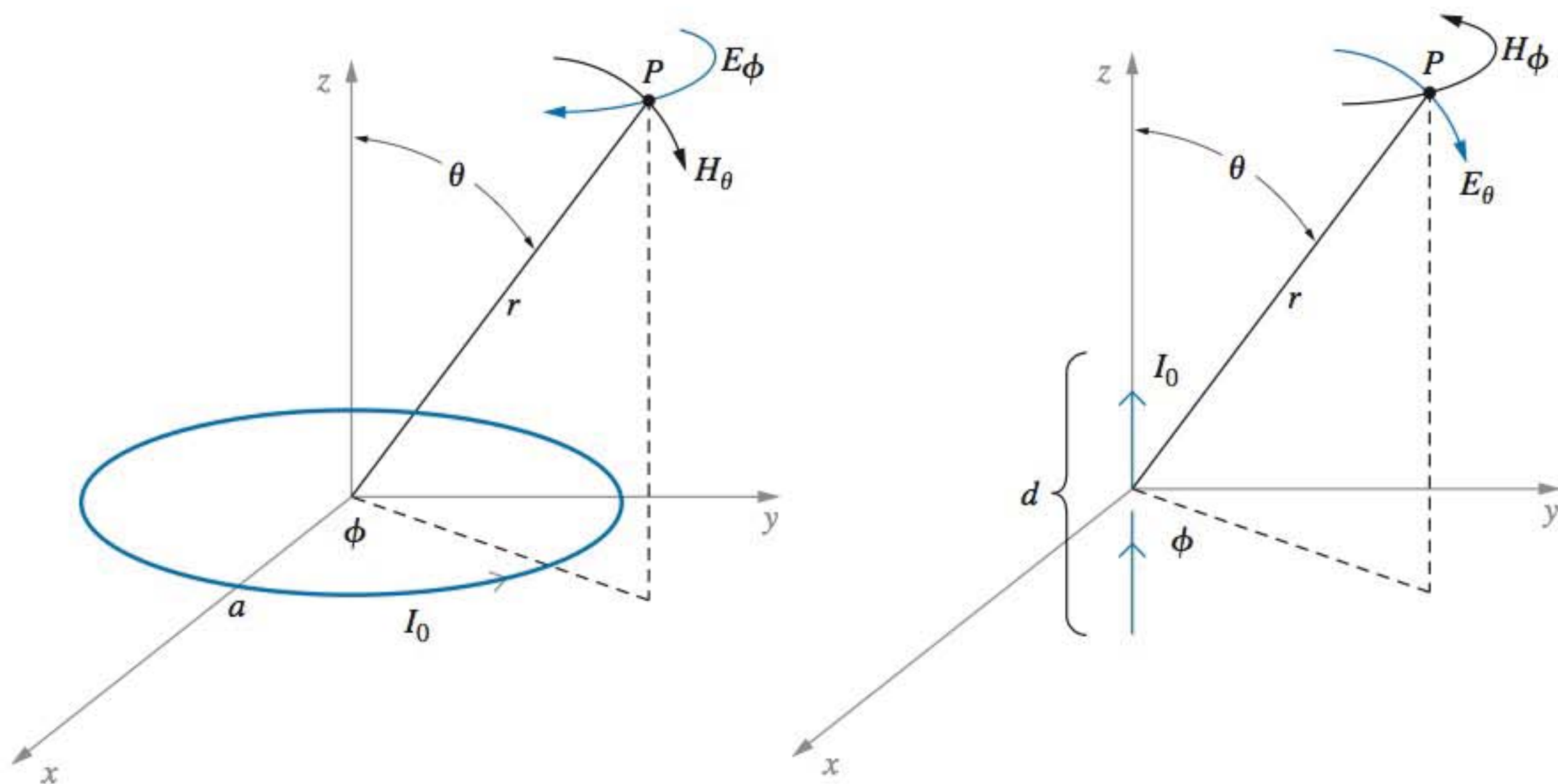



Figura 14.5 Antenas dipolo magnética (esquerda) e elétrica são estruturas duais, produzindo padrões de campos idênticos, com as funções de **E** e **H** intercambiadas.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{44b}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{44c}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \tag{44d}$$

Por inspeção, vemos que as equações poderiam ser inalteradas se substituíssemos **E** por **H**, **H** por –**E**, ϵ por μ e μ por ϵ. Isso ilustra o conceito de *dualidade* em eletromagnetismo. O fato de que o campo *elétrico* da espira de corrente terá a mesma forma funcional do campo *magnético* do dipolo elétrico significa que, com as substituições anteriores, podemos construir os campos da corrente na espira diretamente dos resultados do dipolo elétrico. É devido a essa dualidade entre as soluções de campo dos dois dispositivos que o nome *antena dipolo magnético* é aplicado ao dispositivo constituído por uma espira de corrente.

Antes de fazer as substituições, devemos relacionar as correntes e geometrias dos dois dispositivos. Para fazer isso, considere primeiro o resultado do dipolo elétrico estático do Capítulo 4, na Equação (35). Podemos enfatizar esse resultado ao encontrar o campo elétrico no eixo z ($\theta = 0$). Determinamos

$$\mathbf{E}|_{\theta=0} = \frac{Qd}{2\pi\epsilon z^3}\,\mathbf{a}_z \tag{45}$$

Agora, podemos estudar o campo magnético da espira de corrente encontrado sobre o eixo z, no qual uma corrente estacionária, I_0, está presente. Esse resultado pode ser obtido usando a lei de Biot-Savart:

$$\mathbf{H}|_{\theta=0} = \frac{\pi a^2 I_0}{2\pi z^3}\,\mathbf{a}_z \tag{46}$$

A corrente associada com uma carga variando no tempo de forma harmônica no dipolo elétrico, $Q(t)$, é

$$I_0 = \frac{dQ}{dt} = j\omega Q \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{I_0}{j\omega} \tag{47}$$

Se substituirmos a Equação (47) na Equação (45) e d por $j\omega\epsilon(\pi a^2)$, veremos que a Equação (45) é transformada na Equação (46). Realizamos essas substituições, juntamente com **H** por **E**, $-$**E** por **H**, ϵ por μ e μ por ϵ, nas Equações (14), (15) e (16). Os resultados são

$$E_{\phi s} = -j\frac{\omega\mu(\pi a^2)I_0 k}{4\pi r}\left[1 + \frac{1}{(kr)^2}\right]^{1/2} \operatorname{sen}\theta \, \exp\left[-j(kr - \delta_\phi)\right] \tag{48}$$

$$H_{rs} = j\frac{\omega\mu(\pi a^2)I_0}{2\pi r^2}\,\frac{1}{\eta}\left[1 + \frac{1}{(kr)^2}\right]^{1/2} \cos\theta \, \exp\left[-j(kr - \delta_r)\right] \tag{49}$$

$$H_{\theta s} = j\frac{\omega\mu(\pi a^2)I_0 k}{4\pi r}\,\frac{1}{\eta}\left[1 - \frac{1}{(kr)^2} + \frac{1}{(kr)^4}\right]^{1/2} \operatorname{sen}\theta \, \exp\left[-j(kr - \delta_\theta)\right] \tag{50}$$

onde δ_r, δ_θ e δ_ϕ são definidos nas Equações (17) e (18). No campo distante ($kr >> 1$), $E_{\phi s}$ e $H_{\theta s}$ sobrevivem, e são simplificados até ficarem próximos das Equações (22)

e (23). Esse processo de explorar a dualidade em eletromagnetismo é um método muito eficiente que pode ser aplicado em diversas situações.

14.4 ANTENAS FILAMENTARES

Além de fornecer introspecções sobre os fundamentos de radiação, os resultados do dipolo Hertziano proveem uma base na qual os campos associados com antenas mais complicadas podem ser deduzidos. Nesta seção, esta metodologia é aplicada a problemas mais práticos de antenas filamentares de qualquer comprimento. Determinaremos que para um dado comprimento de onda, mudanças no comprimento da antena promoverão variações dramáticas no padrão de radiação (bem como em seu controle). Notaremos também melhoramentos na diretividade e na eficiência quando utilizarmos certos comprimentos da antena.

O arranjo básico é mostrado na Figura 14.6. De uma forma simplista, é possível dizer que a antena é formada pela dobra de dois fios de uma linha de transmissão aberta nas extremidades, a qual forma um ângulo de 90°. O ponto do meio, no qual as dobras ocorrem, é conhecido como ponto de *alimentação*. A corrente, originalmente presente, persiste e está instantaneamente fluindo na mesma direção nas seções inferior e superior da antena. Se a corrente é senoidal, uma onda estacionária é estabelecida nos fios da antena, com zeros ocorrendo nas extremidades do fio em $z = \pm \ell$. Uma antena simétrica desse tipo é chamada de *dipolo*.

A distribuição de corrente real em uma antena linear fina é muito próxima da forma senoidal. A corrente é zero em cada extremidade e atinge valor máximo a um quarto de comprimento de onda de cada extremidade, e a corrente continua a variar dessa maneira em direção ao centro. Dessa forma, a corrente no centro, será muito pequena para uma antena cujo comprimento, 2ℓ, é um número inteiro de comprimentos

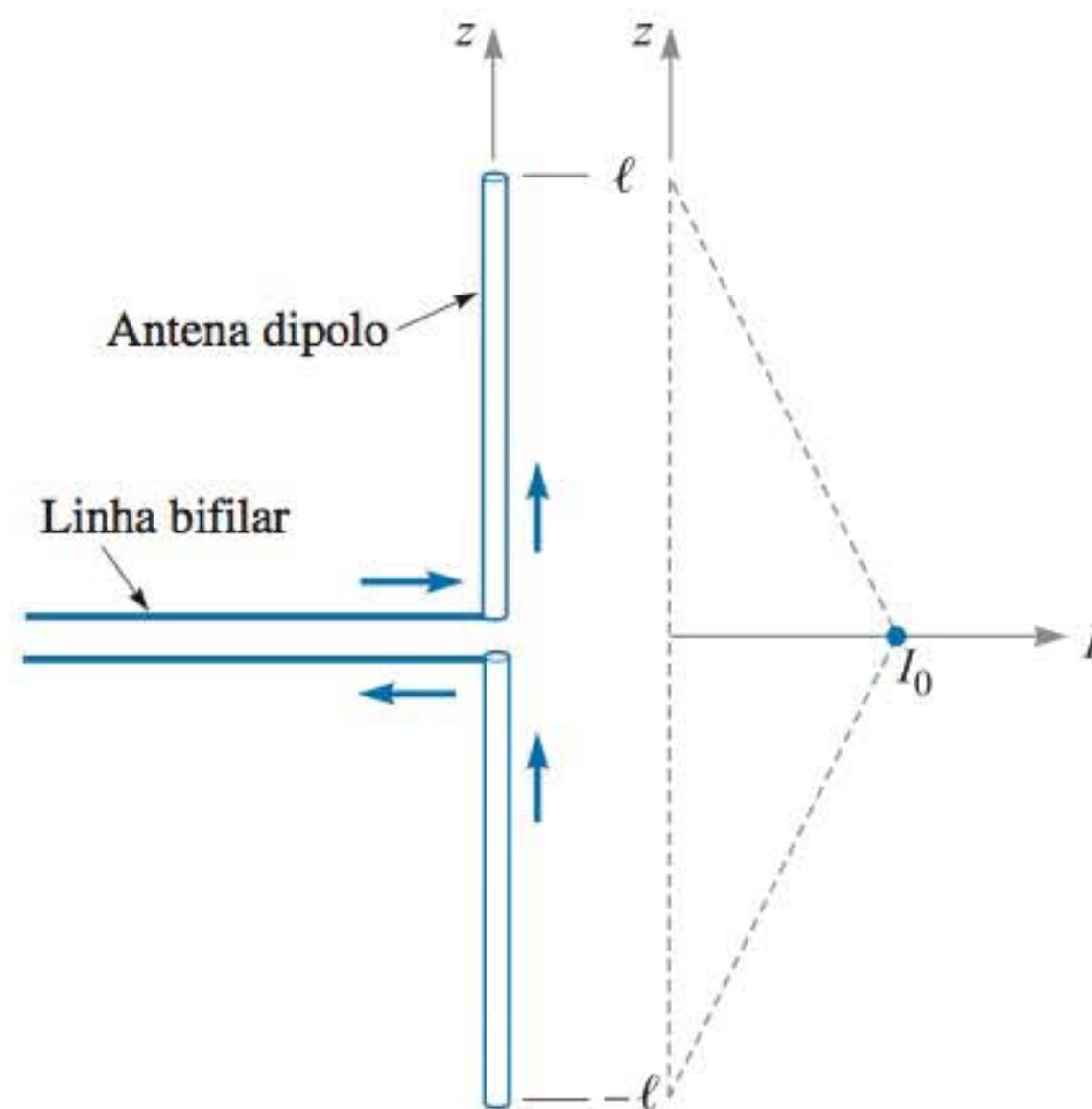



Figura 14.6 Uma antena dipolo fina alimentada senoidalmente por uma linha bifilar. A distribuição da amplitude da corrente, mostrada no desenho adjacente, é aproximadamente linear se o comprimento total da antena for suficientemente menor que metade do comprimento de onda. Amplitude de corrente atinge máximo no ponto central (alimentação).

de onda, mas será igual ao máximo encontrado em qualquer ponto na antena se o comprimento da mesma for um múltiplo ímpar de meio comprimento de onda.

Em uma antena curta, onde 2ℓ é suficientemente menor que metade do comprimento de onda, vemos apenas a primeira porção da onda senoidal. A amplitude da corrente cresce de forma aproximadamente linear, de zero nas extremidades até um valor máximo no centro, como indicado na Figura 14.6. O espaçamento entre fios no ponto de alimentação é pequeno e produz efeitos desprezíveis. A aproximação da antena curta (na qual uma variação linear da corrente com o comprimento é considerada) é razoável para antenas que possuem um comprimento total menor que aproximadamente um décimo do comprimento de onda.

Uma extensão simples dos resultados do dipolo Hertziano pode ser realizada no regime de antena curta ($\ell < \lambda/20$). Se esse for o caso, os efeitos de propagação podem ser desprezados. Isto é, consideramos que os sinais que chegam a qualquer ponto de campo P, vindos das duas extremidades da antena, estão em fase. A corrente média ao longo da antena é $I_0/2$, onde I_0 é a corrente injetada nos terminais centrais. Logo, as intensidades dos campos elétrico e magnético corresponderão à metade dos valores dados nas Equações (22) e (23), e não existem mudanças nos padrões vertical e horizontal. A potência será um quarto de seu valor anterior, e assim a resistência de radiação será também um quarto do valor dado pela Equação (30). A importância da antena cresce à medida que seu comprimento é aumentado, mas os efeitos de propagação devem ser incluídos.

Para antenas mais longas, a distribuição de corrente é tratada da mesma maneira que a distribuição de uma linha de transmissão de extremidade aberta, na qual propaga uma onda TEM. Essa será uma onda estacionária na qual o fasor de corrente é dado por

$$I_s(z) \doteq I_0 \operatorname{sen}(kz) \tag{51}$$

onde a extremidade aberta está localizada em $z = 0$. Também para uma onda TEM na linha de transmissão, a constante de fase será $\beta = k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$. Quando a linha é dobrada para formar a antena, o eixo z é rotacionado para a orientação vertical com $z = 0$ ocorrendo no ponto de alimentação. A corrente na Equação (51) é então modificada para

$$I_s(z) \doteq \left\{ \begin{array}{ll} I_0 \operatorname{sen} k(\ell - z) & (z > 0) \\ I_0 \operatorname{sen} k(\ell + z) & (z < 0) \end{array} \right\} = I_0 \operatorname{sen} k(\ell - |z|) \tag{52}$$

A estratégia aqui é considerar a antena como composta por uma pilha de dipolos Hertzianos, cada um com comprimento dz (Figura 14.7). A amplitude de corrente em cada Hertziano é determinada segundo sua posição z ao longo do comprimento, e é dada pela Equação (52). A zona distante de cada Hertziano pode então ser escrita usando a Equação (22), adequadamente modificada. Escrevemos isto como uma contribuição de campo *diferencial* em um ponto distante r' e um ângulo em coordenadas esféricas, θ':

$$dE_{\theta s} = j\,\frac{I_s(z)\,k\,dz}{4\pi r'}\,\eta \operatorname{sen}\theta'\, e^{-jkr'} \tag{53}$$

As coordenadas r' e θ' são, de fato, referenciadas em relação ao centro do Hertziano, com sua posição z ao longo do comprimento da antena. Necessitamos referenciar essas coordenadas locais em relação à origem, que está no ponto de alimentação

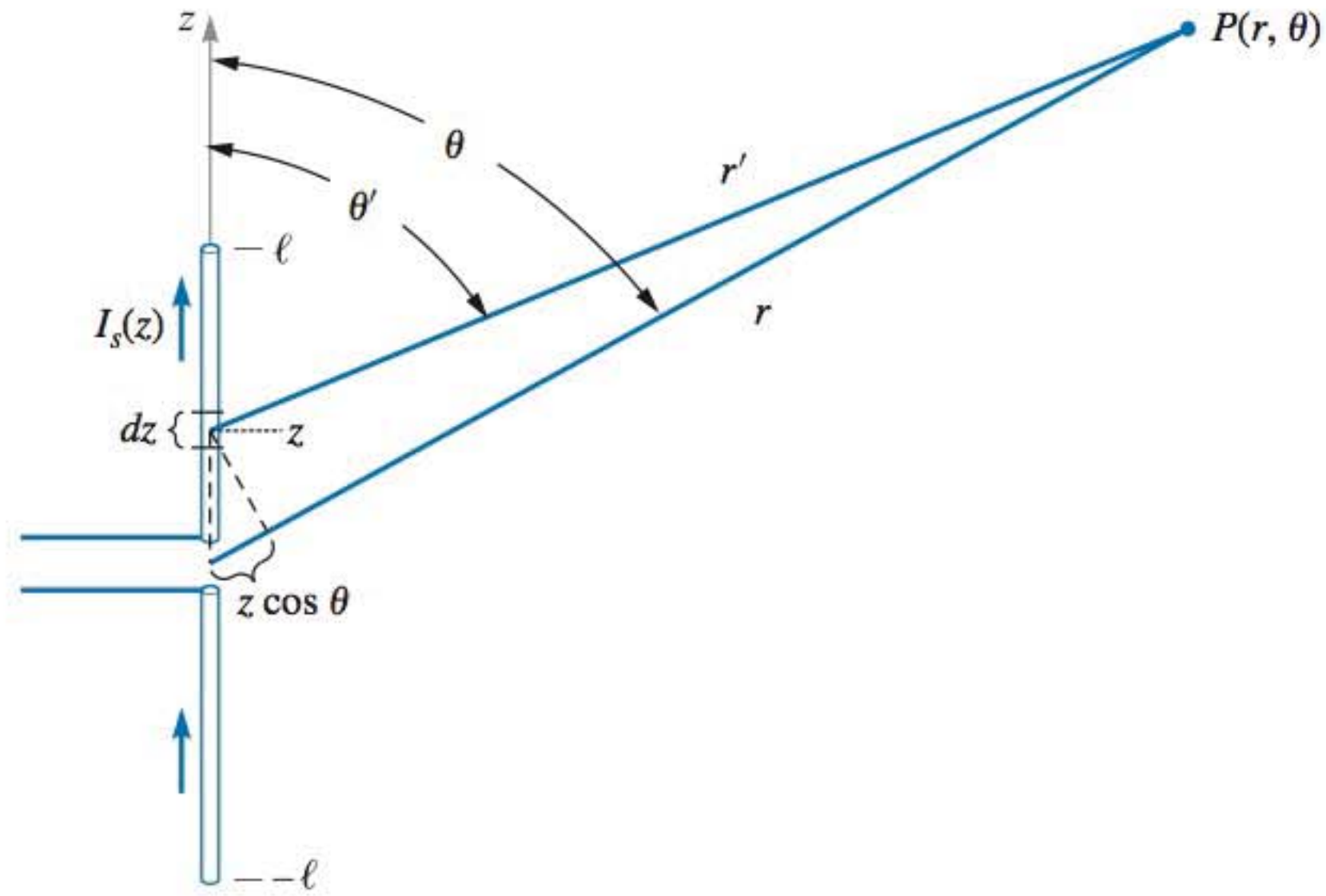



Figura 14.7 Uma antena dipolo pode ser representada como uma pilha de dipolos Hertzianos, cujos fasores individuais de corrente são dados por $I_s(z)$. Um dipolo Hertziano é mostrado na localização z e tem comprimento dz. Quando o ponto de observação P está na região distante, as linhas de distância r e r' são aproximadamente paralelas, de tal forma que diferem em comprimento por $z \cos\theta$.

da antena. Para fazer isso, utilizamos os mesmos métodos usados para analisar o dipolo elétrico estático, conforme apresentado na Seção 4.7. Considerando a Figura 14.7, percebemos que é possível escrever a relação entre a distância r' do Hertziano na localização z e a distância r da origem ao mesmo ponto como

$$r' \doteq r - z\cos\theta \tag{54}$$

onde, no campo distante, $\theta' \doteq \theta$, e as linhas de distâncias r' e r são aproximadamente paralelas. A Equação (53) é então modificada para

$$dE_{\theta s} = j\frac{I_s(z)\,k\,dz}{4\pi r}\,\eta \operatorname{sen}\theta\, e^{-jk(r - z\cos\theta)} \tag{55}$$

Note que ao obter a Equação (55) a partir da Equação (53), aproximamos $r' \doteq r$ no denominador, uma vez que o uso da Equação (54) ocasiona pouca diferença quando consideramos variações na *amplitude* com z e θ. O termo exponencial na Equação (55) *inclui* a Equação (54) porque variações leves em z ou θ terão grande impacto na fase.

O campo elétrico total na região distante, na posição (r, θ), será a soma de todas as contribuições dos dipolos Hertzianos ao longo do comprimento da antena, a qual se torna a integral:

$$\begin{aligned} E_{\theta s}(r,\theta) &= \int dE_{\theta s} = \int_{-\ell}^{\ell} j\frac{I_s(z)\,k\,dz}{4\pi r}\,\eta \operatorname{sen}\theta\, e^{-jk(r-z\cos\theta)} \\ &= \left[j\frac{I_0\,k}{4\pi r}\,\eta \operatorname{sen}\theta\, e^{-jkr} \right] \int_{-\ell}^{\ell} \operatorname{sen} k(\ell - |z|)\, e^{jkz\cos\theta}\,dz \end{aligned} \tag{56}$$

Para avaliar a última integral, primeiro expressamos o termo exponencial complexo pelo seno e pelo cosseno usando a identidade de Euler. Denotando o termo entre colchetes externos à integral como A, escrevemos:

$$E_{\theta s}(r,\theta) = A\int_{-\ell}^{\ell} \underbrace{\operatorname{sen} k(\ell - |z|)}_{par}\underbrace{\cos(kz\cos\theta)}_{par} + j\,\underbrace{\operatorname{sen} k(\ell - |z|)}_{par}\underbrace{\operatorname{sen}(kz\cos\theta)}_{ímpar}\,dz$$

na qual a paridade par ou ímpar de cada termo está indicada. A parte imaginária do integrando, consistindo no produto das funções par e ímpar, produz um termo com paridade resultante ímpar. Assim, ele integra a zero para os limites simétricos de $-\ell$ a ℓ. Isto deixa assim a parte real, cuja integral pode ser expressa sobre a faixa positiva de z e ainda ser simplificada por meio das identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned}
E_{\theta s}(r,\theta) &= 2A\int_0^{\ell} \operatorname{sen} k(\ell - z)\cos(kz\cos\theta)\,dz \\
&= A\int_0^{\ell} \operatorname{sen}[k(\ell - z) + kz\cos\theta] + \operatorname{sen}[k(\ell - z) - kz\cos\theta]\,dz \\
&= A\int_0^{\ell} \operatorname{sen}[kz(\cos\theta - 1) + k\ell] - \operatorname{sen}[kz(\cos\theta + 1) - k\ell]\,dz
\end{aligned}$$

A última integral é direta e avaliada como

$$E_{\theta s}(r,\theta) = 2A\left[\frac{\cos(k\ell\cos\theta) - \cos(k\ell)}{k\operatorname{sen}^2\theta}\right]$$

Reincorporando a expressão para A, o resultado final é

$$E_{\theta s}(r,\theta) = j\frac{I_0\eta}{2\pi r}e^{-jkr}\left[\frac{\cos(k\ell\cos\theta) - \cos(k\ell)}{\operatorname{sen}\theta}\right] = E_0\,F(\theta)\left[\frac{e^{-jkr}}{r}\right] \tag{57}$$

onde identificamos a amplitude do campo

$$E_0 = j\frac{I_0\eta}{2\pi} \tag{58}$$

Ainda na Equação (57), os termos envolvendo θ e ℓ são isolados para formar a *função padrão* do plano E para a antena dipolo:

$$F(\theta) = \left[\frac{\cos(k\ell\cos\theta) - \cos(k\ell)}{\operatorname{sen}\theta}\right] \tag{59}$$

Essa importante função, quando normalizada, é o padrão do plano E da antena dipolo. Ela explicitamente mostra como escolhas do comprimento do dipolo afetam a dependência em relação a θ do padrão e, em última análise, determinam a dependência sobre ℓ do ganho diretivo, diretividade e potência radiada para uma dada corrente.

Gráficos da intensidade de $F(\theta)$ no plano E são mostrados nas Figuras 14.8*a* e 14.8*b* para diversos comprimentos do dipolo. Nestes, o plano xz é escolhido, embora

(a) (b)

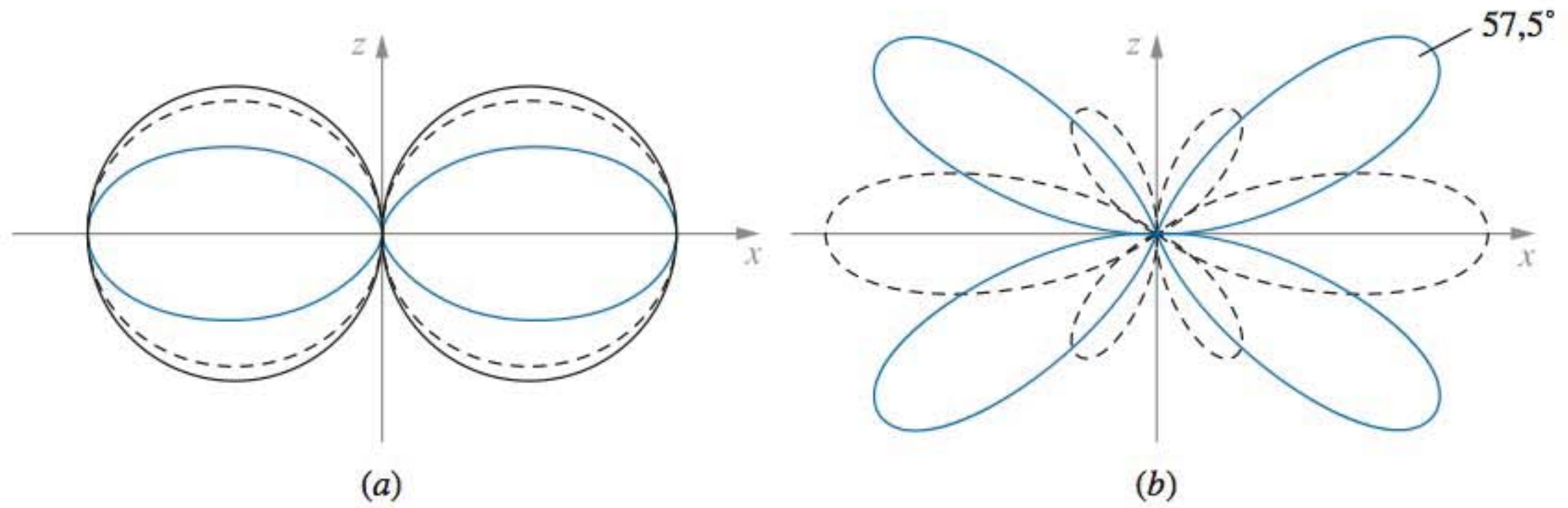



Figura 14.8 Gráficos do plano *E*, normalizados para máximos iguais a 1,0, encontrados de $F(\theta)$ para antenas dipolo cujos comprimentos totais, 2ℓ, são de (*a*) $\lambda/16$ (sólida preta), $\lambda/2$ (pontilhada) e λ (azul) e (*b*) $1{,}3\lambda$ (pontilhada) e 2λ (azul). Em (*a*), a tendência de estreitamento do feixe é evidente à medida que o comprimento aumenta (ou à medida que o comprimento de onda diminui). Note que as curvas de $\lambda/16$ são aproximadamente circulares e, assim, aproximam-se do padrão do dipolo Hertziano. Em comprimentos que excedem um comprimento de onda, lóbulos laterais começam a se desenvolver, como exibido nos menores feixes no padrão de $1{,}3\lambda$ em (*b*). À medida que o comprimento aumenta, os lóbulos crescem para formar os quatro lóbulos principais simetricamente dispostos da antena de 2λ, onde o lóbulo no primeiro quadrante é máximo em $\theta = 57{,}5°$. Os lóbulos principais ao longo de x que estavam presentes na antena de $1{,}3\lambda$ diminuem com o crescimento do comprimento e se anulam completamente quando o comprimento alcança 2λ.

os resultados sejam os mesmos em qualquer plano que contenha o eixo z. Os gráficos mostram uma tendência em direção a feixes de radiação mais estreitos à medida que o comprimento aumenta, mas até o ponto nos quais máximos secundários, ou *lóbulos laterais*, desenvolvem-se para todos os comprimentos da antena (2ℓ) que excedem um comprimento de onda.

A presença dos lóbulos laterais normalmente não é conveniente, principalmente porque eles representam potência radiada em outras direções que não correspondem ao feixe principal ($\theta = 90°$). Assim, a potência no lóbulo lateral provavelmente não atingirá o receptor desejado. Além disso, as direções dos lóbulos laterais mudarão com o comprimento de onda e, portanto, concederão um espalhamento angular para um sinal radiado que obviamente se expandirá com a crescente largura de banda do sinal. Estes problemas são evitados pelo uso de comprimentos de antenas menores do que um comprimento de onda.

A intensidade de radiação pode agora ser encontrada para a antena dipolo por meio da utilização da Equação (34), juntamente com a Equação (25):

$$K(\theta) = r^2 S_r = \frac{1}{2}\mathcal{R}e\left\{E_{\theta s} H_{\phi s}^*\right\} r^2$$

onde $H_{\phi s} = E_{\theta s}/\eta$. Substituindo a Equação (57), obtemos

$$\boxed{K(\theta) = \frac{\eta I_0^2}{8\pi^2}[F(\theta)]^2 = \frac{15\, I_0^2}{\pi}[F(\theta)]^2 \qquad \text{W/Sr}} \tag{60}$$

Na última igualdade, considera-se o espaço livre, no qual $\eta = \eta_0 = 120\pi$. A potência radiada total é a integral da intensidade de radiação sobre todos os ângulos sólidos, ou

$$P_r = \int_0^{4\pi} K \, d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} K(\theta) \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\phi \tag{61}$$

Novamente considerando o espaço livre, temos

$$\boxed{P_r = 30 \, I_0^2 \int_0^{\pi} [F(\theta)]^2 \operatorname{sen} \theta \, d\theta \quad \text{W}} \tag{62}$$

Usando esse resultado, expressões para a diretividade e resistência de radiação podem ser encontradas. Da Equação (42), e usando as Equações (60) e (62), a diretividade no espaço livre é

$$D(\theta) = \frac{4\pi \, K(\theta)}{P_r} = \frac{2[F(\theta)]^2}{\int_0^{\pi} [F(\theta)]^2 \operatorname{sen} \theta \, d\theta} \tag{63}$$

cujo valor máximo é

$$\boxed{D_{\max} = \frac{2 \, [F(\theta)]^2_{\max}}{\int_0^{\pi} [F(\theta)]^2 \operatorname{sen} \theta \, d\theta}} \tag{64}$$

Finalmente, a resistência de radiação será

$$\boxed{R_{\text{radiação}} = \frac{2 P_r}{I_0^2} = 60 \int_0^{\pi} [F(\theta)]^2 \operatorname{sen} \theta \, d\theta} \tag{65}$$

EXEMPLO 14.2

Escreva a função padrão específica e avalie a largura do feixe, diretividade e resistência de radiação de um dipolo de meia onda.

Solução. O termo "meia onda" refere-se ao comprimento total, no qual $2\ell = \lambda/2$, ou $\ell = \lambda/4$. Em consequência, $k\ell = (2\pi/\lambda)\,(\lambda/4) = \pi/2$, o qual é substituído na Equação (59):

$$F(\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\operatorname{sen} \theta} \tag{66}$$

A intensidade dessa função é plotada como a curva pontilhada na Figura 14.8*a*. Seus máximos (iguais a 1) ocorrem em $\theta = \pi/2, 3\pi/2$, enquanto os nulos ocorrem em $\theta =$ 0 e π. A largura do feixe é encontrada pela avaliação das soluções de

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Numericamente, verificamos que os dois ângulos sobre cada lado do máximo em $\theta =$ 90° que satisfazem a equação anterior são $\theta_{1/2} = 51°$ e 129°. A largura de feixe de meia potência é, portanto, $129° - 51° = 78°$.

Diretividade e resistência de radiação são, então, determinadas por meio das Equações (64) e (65), onde a integral de $[F(\theta)]^2$ pode ser realizada numericamente. Os resultados são $D_{max} = 1{,}64$ (ou 2,15 dB) e $R_{\text{radiação}} = 73\ \Omega$.

EP14.4. Avalie a porcentagem da máxima densidade de potência encontrada na direção $\theta = 45°$ para antenas dipolo de comprimentos totais: (*a*) $\lambda/4$, (*b*) $\lambda/2$, (*c*) λ.

Resp. 45,7%; 38,6%; 3,7%

No dipolo de meia onda, a amplitude de corrente da onda estacionária é máxima no ponto de alimentação; assim, diz-se que a antena está operando *em ressonância*. Como resultado, a impedância do ponto de alimentação, um quarto do comprimento de onda na frente das extremidades abertas, seria *em princípio* puramente real[4] e igual à resistência de radiação de 73 Ω, considerando uma antena sem perdas. Essa é a motivação primária para usar dipolos de meia onda, uma vez que eles fornecem uma impedância próxima do casamento com linhas de transmissão convencionais (cujas impedâncias características são da mesma ordem de grandeza).

Na verdade, pelo fato de a antena ser basicamente uma linha de transmissão dobrada, o dipolo de meia onda não se comporta como uma seção ideal de quarto de onda de uma linha de transmissão, como poderia suspeitar-se ao considerar as discussões da Seção 14.1. Uma parte reativa apreciável da impedância de entrada provavelmente estará presente, mas a dimensão de meio comprimento de onda é muito próxima do comprimento no qual a reatância é nula. Métodos de avaliação de reatância estão além do escopo de nosso tratamento, mas são considerados em detalhes na Referência 1. Para um dipolo fino sem perdas, de comprimento $\lambda/2$, a impedância de entrada seria $Z_{\text{entrada}} = 73 + jX$, onde X é próximo de 40 Ω. A reatância de entrada é extremamente sensível em relação ao comprimento da antena e pode ser reduzida a zero mediante uma leve redução do comprimento total, abaixo de $\lambda/2$, fazendo com que a parte real praticamente não seja afetada. Um comportamento similar é visto em dipolos que possuem comprimentos múltiplos de $\lambda/2$, mas nestes as resistências de radiação são consideravelmente maiores, produzindo assim um casamento mais pobre de impedância. Em dipolos com comprimentos entre múltiplos de meio comprimento de onda, reatâncias de entrada podem ser muito maiores (próximas a $j600\ \Omega$) e tornar-se sensíveis à espessura do fio, além do comprimento. Na prática, ao conectar a alimentação por uma linha de transmissão, a reatância de entrada pode ser zerada pela redução do comprimento ou pelo uso de técnicas de casamento, como as que foram discutidas no Capítulo 10.

Gráficos de diretividade e resistência de radiação, como funções do comprimento da antena, são mostrados na Figura 14.9. A diretividade aumenta modestamente com o comprimento, enquanto a resistência de radiação alcança um máximo local em um comprimento entre $3\lambda/4$ e λ. Em comprimentos maiores, picos adicionais em $R_{\text{radiação}}$ ocorrem em níveis maiores, mas o desempenho é comprometido pela presença de

[4] Imagine metade de uma rotação ($\lambda/4$) ao redor da carta de Smith do ponto do circuito aberto em direção ao gerador, onde, com perda presente, a posição extrema estaria no eixo real negativo.

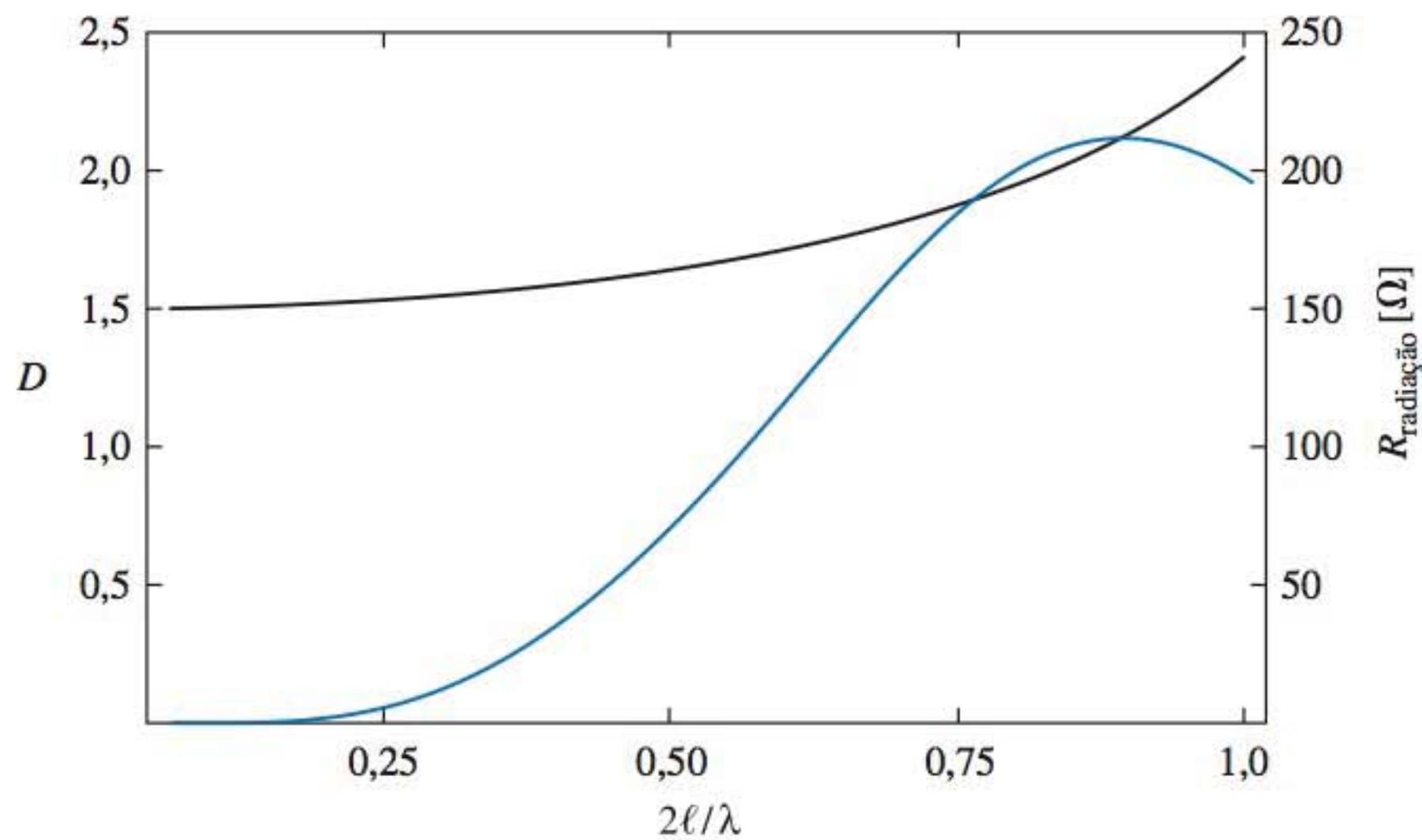



Figura 14.9 Gráficos de diretividade (preto) e resistência de radiação (azul) como funções do comprimento total da antena, expresso em comprimentos de onda.

lóbulos laterais. Novamente, utiliza-se os dipolos de meia onda, pois o comportamento de único lóbulo é assegurado sobre uma ampla largura de banda espectral, enquanto a resistência de radiação (73 Ω) está próxima da impedância de linhas de transmissão padronizadas, usadas para alimentar a antena.

Como um exercício final em antenas filamentares, consideremos a operação de uma antena *monopolo*. Essa é metade de um dipolo mais um plano perfeitamente condutor, como mostrado na Figura 14.10*a*. O método das imagens, discutido na Seção 5.5, provê a imagem mostrada na Figura 14.10*b*, de tal forma que o monopolo e sua imagem formam um dipolo. Logo, todas as equações de campo que pertencem ao dipolo aplicam-se diretamente para o semiespaço superior. Portanto, o vetor de Poynting também é o mesmo, acima do plano, mas a integração para encontrar a potência radiada total é realizada somente no hemisfério que envolve o semiespaço superior.

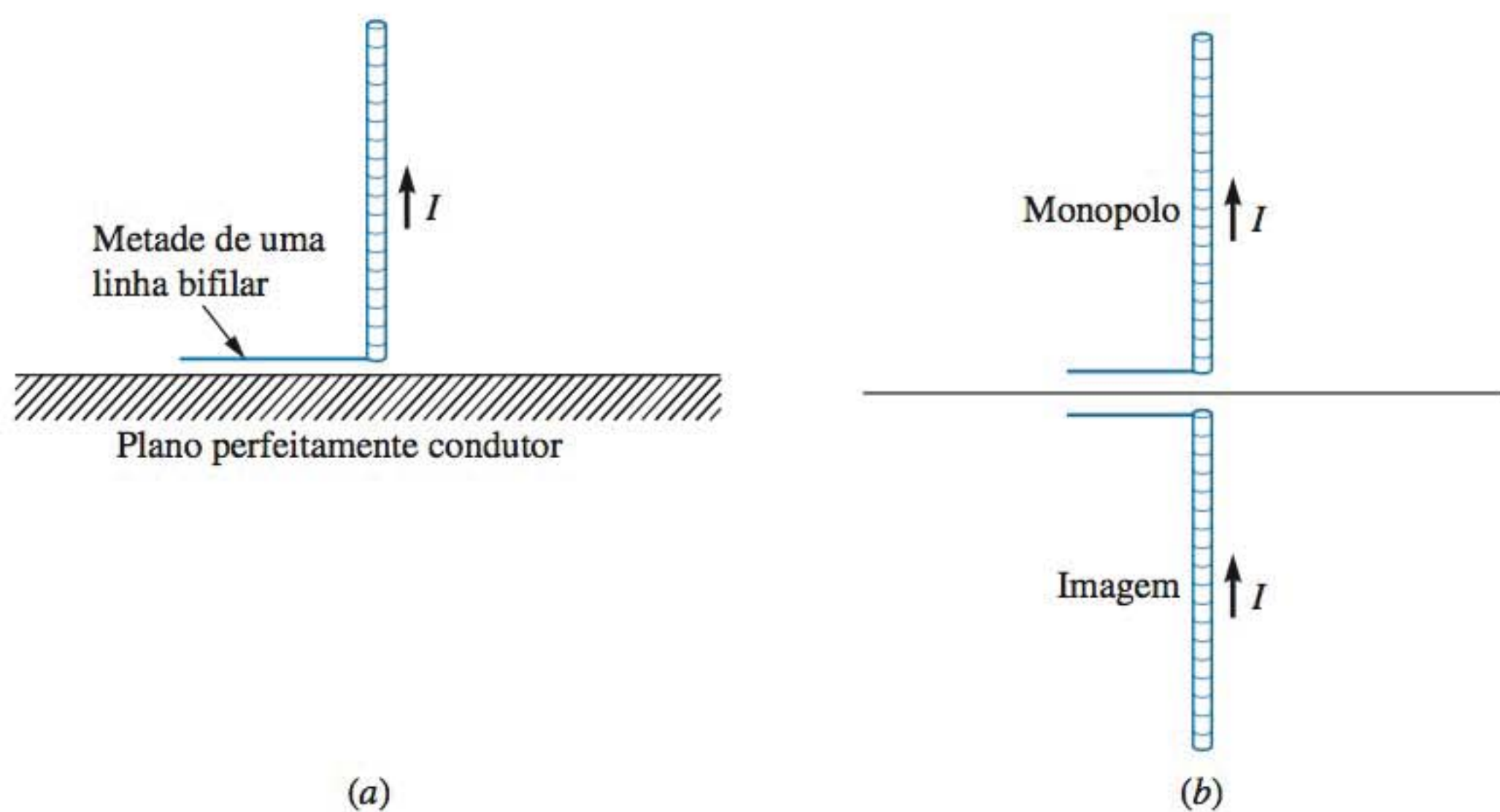



Figura 14.10 (*a*) Um monopolo ideal está sempre associado com um plano perfeitamente condutor. (*b*) O monopolo mais sua imagem formam um dipolo.

Assim, a potência radiada e a resistência de radiação para o monopolo correspondem à metade dos valores correspondentes do dipolo. Como exemplo, um monopolo de um quarto de onda (apresentando um dipolo de meia onda quando a imagem é incluída) produz uma resistência de radiação de $R_{\text{radiação}} = 36{,}5\ \Omega$.

Antenas monopolo podem ser alimentadas por um cabo coaxial abaixo do plano, com seu centro condutor conectado à antena por meio de um pequeno orifício e com seu condutor externo conectado ao plano. Se a região abaixo do plano for inacessível ou inconveniente, o cabo pode ser colocado no topo do plano, e seu condutor externo, conectado a ele. Exemplos de aplicação desse tipo de antena podem ser encontrados em torres de radiodifusão AM (Amplitude Modulation) e em sistemas de comunicação de rádio de curta distância.

EP14.5. A antena monopolo da Figura 14.10*a* tem comprimento $d/2 = 0{,}080$ m e conduz uma distribuição triangular de corrente para a qual a corrente de alimentação I_0 vale 16,0 A, em uma frequência de 375 MHz, no espaço livre. No ponto $P(r = 400\text{m}, \theta = 60°, \phi = 45°)$ encontre: (*a*) $H_{\phi s}$; (*b*) $E_{\theta s}$; (*c*) a amplitude de $\mathcal{P}_r$.

Resp. $j1{,}7$ mA/m; $j0{,}65$ V/m; 1,1 mW/m^2

14.5 ARRANJOS DE DOIS ELEMENTOS

Nesta seção, apresentamos o problema de estabelecer um melhor controle das propriedades direcionais da radiação de antenas. Embora algum controle de diretividade seja obtido mediante o ajuste do comprimento de uma antena filamentar, esses resultados somente aparecem como alterações no padrão do plano *E*. O padrão do plano *H* sempre permanece um círculo (sem variação em ϕ), enquanto uma única antena vertical filamentar for usada. Ao utilizarmos múltiplos elementos em um *arranjo* (ou conjunto), pode se obter um aperfeiçoamento significativo na diretividade, determinada nos planos *E* e *H*. Nosso objetivo nesta seção é fornecer a base para a análise de arranjos pela consideração de um caso simples, considerando dois elementos. Os

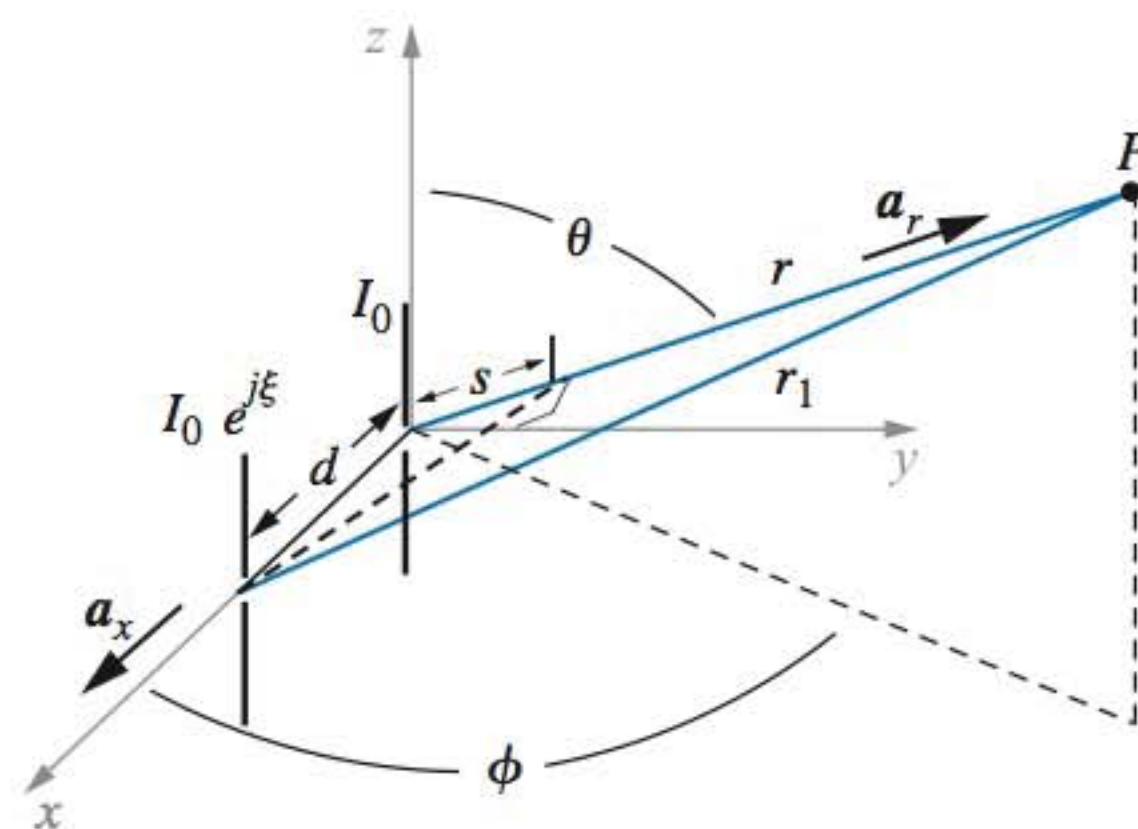



Figura 14.11 A antena filamentar original em *z*, com seu centro na origem, está agora próxima de uma segunda antena paralela, cruzando o eixo *x*, em uma distância *d*. A segunda antena transporta a mesma amplitude de corrente da primeira, mas com um deslocamento de fase constante, ξ. Os campos são observados no ponto *P*.

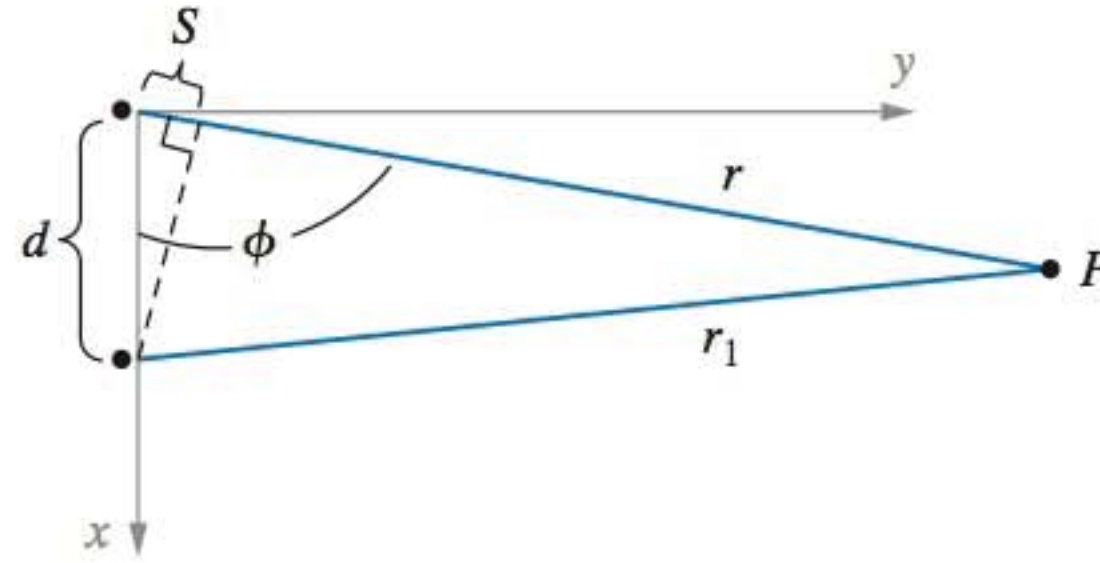



Figura 14.12 Vista do topo do arranjo da Figura 14.11 (olhando para baixo no plano *xy*). Na aproximação de campo distante, as linhas azuis são essencialmente paralelas e $r_1 \doteq r - s$.

métodos resultantes são prontamente aplicados a configurações de múltiplos elementos.

A configuração básica é mostrada na Figura 14.11. Temos nossa antena original com sua alimentação na origem e orientada ao longo do eixo z. Uma segunda antena, idêntica e paralela à primeira, está posicionada em d sobre o eixo x. As duas transportam a mesma corrente, de amplitude I_0 (levando à amplitude E_0 do campo distante), mas permitimos que a corrente na segunda antena exiba uma diferença na constante de fase, ξ, em relação à corrente da primeira antena. O ponto de observação do campo distante, P, é posicionado em coordenadas esféricas, (r, θ, ϕ). Deste ponto, as antenas parecem próximas o bastante, de tal forma que (1) as linhas radiais, r e r_1, são essencialmente paralelas, e (2) as direções do campo elétrico em P são as mesmas (ao longo de $\mathbf{a}_\theta$). Usando a Equação (57), podemos escrever o campo total em P, sabendo que a presença da segunda antena no eixo x introduzirá uma dependência em relação a ϕ no campo que anteriormente não estava presente:

$$E_{\theta P}(r, \theta, \phi) = E_0\, F(\theta) \left[\frac{e^{-jkr}}{r} + \frac{e^{j\xi}\, e^{-jkr_1}}{r_1} \right] \tag{67}$$

Em seguida, podemos expressar a distância da segunda antena r_1 até P pela distância em relação à primeira antena r (também o raio em coordenadas esféricas), notando que na aproximação de campo distante temos

$$r_1 \doteq r - s$$

onde s é um comprimento do triângulo retângulo formado pela projeção do segmento de linha perpendicular entre a segunda antena e a linha radial r, como mostrado na Figura 14.11 e na Figura 14.12. O comprimento, s, é a projeção da separação das antenas, d, na linha radial r, e é encontrado por

$$s = d\, \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_r = d \operatorname{sen} \theta \cos \phi \tag{68}$$

Em consequência,

$$r_1 \doteq r - d \operatorname{sen} \theta \cos \phi \tag{69}$$

No campo distante, a distância, d sen cos ϕ, é muito pequena quando comparada a r, o que permite desprezar a diferença entre r e r_1 considerando a intensidade na Equação (67) (de forma que $1/r_1 \doteq 1/r$). Como sabemos com base nos estudos de

dipolo, a diferença não pode ser desprezada ao se considerar a fase na Equação (67), uma vez que ela é muito sensível a leves mudanças em r. Com essas considerações em mente, a Equação (67) torna-se

$$E_{\theta P}(r,\theta,\phi) = \frac{E_0\,F(\theta)}{r}\left[e^{-jkr} + e^{j\xi}\,e^{-jk(r-d\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi)}\right] \tag{70}$$

a qual é simplificada para

$$E_{\theta P}(r,\theta,\phi) = \frac{E_0\,F(\theta)}{r}e^{-jkr}\left[1 + e^{j\psi}\right] \tag{71}$$

onde

$$\psi = \xi + kd\ \mathrm{sen}\,\theta\cos\phi \tag{72}$$

ψ é a diferença de fase resultante entre os dois campos das antenas observada em $P(r, \theta, \phi)$. A Equação (71) pode ser adicionalmente simplificada por meio de uma fatoração do termo $e^{j\psi/2}$ para obter

$$E_{\theta P}(r,\theta,\phi) = \frac{2E_0\,F(\theta)}{r}e^{-jkr}e^{j\psi/2}\cos(\psi/2) \tag{73}$$

da qual podemos determinar a amplitude do campo

$$|E_{\theta P}(r,\theta,\phi)| = \sqrt{E_{\theta P}E^*_{\theta P}} = \frac{2E_0}{r}|F(\theta)||\cos(\psi/2)| \tag{74}$$

A Equação (74) demonstra o importante princípio da *multiplicação de padrão* que se aplica a arranjos de antenas idênticas. Especificamente, a intensidade no campo total consiste no produto da função da intensidade do padrão (ou *fator de elemento*) para as antenas individuais $|F(\theta)|$ e a intensidade normalizada do *fator de arranjo*, dada por $|\cos(\psi/2)|$. O fator de arranjo é frequentemente denotado por

$$A(\theta,\phi) = \cos(\psi/2) = \cos\left[\tfrac{1}{2}(\xi + kd\ \mathrm{sen}\,\theta\cos\phi)\right] \tag{75}$$

A Equação (74), então, torna-se

$$|E_{\theta P}(r,\theta,\phi)| = \frac{2E_0}{r}|F(\theta)|\,|A(\theta,\phi)| \tag{76}$$

Esse princípio pode ser estendido para arranjos de múltiplos elementos mediante modificação apropriada do fator de arranjo, conforme verificaremos posteriormente. A suposição base é que os elementos individuais do arranjo são essencialmente desacoplados. Isso quer dizer que induzem correntes desprezíveis entre si. Com acoplamento apreciável, o problema é mais complicado, e a multiplicação de padrão não pode ser usada.

No padrão de campo expresso na Equação (76), o plano E (ou dependência com θ) é primariamente determinado pelos elementos individuais, ou por $|F(\theta)|$. É no plano H onde o efeito do arranjo é mais forte. De fato, a principal razão para o uso de

arranjos dessa configuração é permitir o controle do padrão do plano H. No plano H ($\theta = \pi/2$), as Equações (75) e (76) fornecem a dependência do campo em relação a ϕ

$$E_{\theta P}(r, \pi/2, \phi) \propto A(\pi/2, \phi) = \cos\left[\tfrac{1}{2}(\xi + kd\cos\phi)\right] \tag{77}$$

O padrão do plano H depende das escolhas da fase relativa da corrente, ξ, e do espaçamento entre os elementos, d.

EXEMPLO 14.3

Investigue o padrão do plano H quando as correntes estão em fase ($\xi = 0$).

Solução. Com $\xi = 0$, a Equação (77) torna-se

$$A(\pi/2, \phi) = \cos\left[\frac{kd}{2}\cos\phi\right] = \cos\left[\frac{\pi d}{\lambda}\cos\phi\right]$$

Este alcança um máximo em $\phi = \pi/2$ e $3\pi/2$, ou ao longo da direção normal ao plano das antenas (o eixo y). Isso ocorre independentemente da escolha de d, e assim o arranjo é referido como um arranjo de radiação perpendicular ao eixo da antena (*broadside array*). Agora, ao escolher $d = \lambda/2$, obtemos $A = \cos\,[(\pi/2)\cos\phi]$, que torna-se zero em $\phi = 0$ e π (ao longo do eixo x), e temos feixes principais únicos ao longo do eixo y positivo e negativo. Quando d aumenta além de $\lambda/2$, máximos adicionais (lóbulos laterais) surgem à medida que ϕ é variado, mas zeros ainda ocorrem no eixo x se d é determinado para múltiplos ímpares de $\lambda/2$.

O *broadside array* do exemplo anterior pode ser considerado como o caso mais simples. Um comportamento mais interessante ocorre quando uma diferença de fase que não seja zero existe entre as duas correntes e os ajustes podem ser realizados na fase e no espaçamento do elemento.

EXEMPLO 14.4

Determine as condições necessárias para estabelecer um arranjo de radiação longitudinal ao eixo da antena (*endfire array*), no qual a máxima radiação é direcionada ao longo do eixo x.

Solução. Considerando $\phi = 0$ ou π na Equação (77) e estabelecendo que a equação obtenha um máximo, teremos a condição:

$$A = \cos\left[\frac{\xi}{2} \pm \frac{\pi d}{\lambda}\right] = \pm 1$$

ou

$$\frac{\xi}{2} \pm \frac{\pi d}{\lambda} = m\pi$$

onde m é um inteiro que inclui 0, e onde o sinal positivo dentro dos colchetes se aplica para $\phi = 0$, e o negativo, para $\phi = \pi$. Um caso de interesse prático ocorre quando $m = 0$, $d = \lambda/4$ e $\xi = -\pi/2$, que satisfaz a condição anterior quando o sinal positivo é escolhido. Por fim, a Equação (77) torna-se

$$A(\pi/2, \phi) = \cos\left[\frac{\pi}{4}(\cos\phi - 1)\right]$$

Essa função tem máximo em $\phi = 0$ e alcança zero em $\phi = \pi$. Criamos, assim, um arranjo que radia em um *único* lóbulo principal ao longo do eixo x positivo. Isso pode ser entendido ao perceber que o atraso de fase da corrente no elemento em $x = d$ compensa os atrasos de fase que surgem do atraso devido à propagação entre o elemento na origem e aquele em $x = d$. Portanto, o segundo elemento de radiação está precisamente em fase com a radiação do primeiro elemento. Assim, os dois campos interferem de forma construtiva e propagam juntamente na direção crescente de x. Na direção inversa, a radiação da antena em $x = d$ chega à origem para encontrar π radianos defasados com a radiação do elemento em $x = 0$. Os dois campos, dessa forma, interferem de forma destrutiva e nenhuma radiação ocorre na direção negativa de x.

EP14.6. Na configuração *broadside array* do Exemplo 14.3, o espaçamento do elemento é alterado para $d = \lambda$. Determine (a) a razão das intensidades emitidas nas direções $\phi = 0$ e 90° no plano H, (b) as direções (valores de ϕ) dos feixes principais no padrão do plano H e (c) as localizações (valores de ϕ) dos zeros no padrão do plano H.

Resp. 1; (0, ± 90°, 180°); (± 45°, ±135°)

EP14.7. Na configuração *endfire array* do Exemplo 14.4, determine as direções (valores de ϕ) para os feixes principais no plano H se o comprimento de onda for diminuído de $\lambda = 4d$ para: (a) $\lambda = 3d$, (b) $\lambda = 2d$ e (c) $\lambda = d$.

Resp. ± 41,4°; ± 45°; ±75,5°

14.6 ARRANJOS LINEARES UNIFORMES

Nesta seção, expandimos nosso estudo sobre arranjos para arranjos com mais de dois elementos. Ao fazer isto, mais opções são dadas ao projetista, que permitem melhorar a diretividade e, possivelmente, aumentar a largura de banda da antena, por exemplo. Um tratamento completo deste assunto requer um livro inteiro. Aqui, contudo, consideraremos somente o caso de arranjos lineares uniformes para exemplificar os métodos de análises e apresentar alguns dos resultados chave.

A configuração de arranjo linear uniforme é mostrada na Figura 14.13. O arranjo é linear porque os elementos são dispostos ao longo de uma linha reta (o eixo x, neste caso). O arranjo é uniforme devido ao fato de que todos os elementos são idênticos, possuem espaçamento igual, d, e transportam a mesma amplitude de corrente I_0. Além disso, a progressão na fase da corrente, de elemento para elemento, é dada por um valor constante, ξ. O fator normalizado do conjunto para um arranjo de dois elementos pode ser expresso pela Equação (71) como:

$$|A(\theta, \phi)| = |A_2(\theta, \phi)| = |\cos(\psi/2)| = \frac{1}{2}\left|1 + e^{j\psi}\right| \tag{78}$$

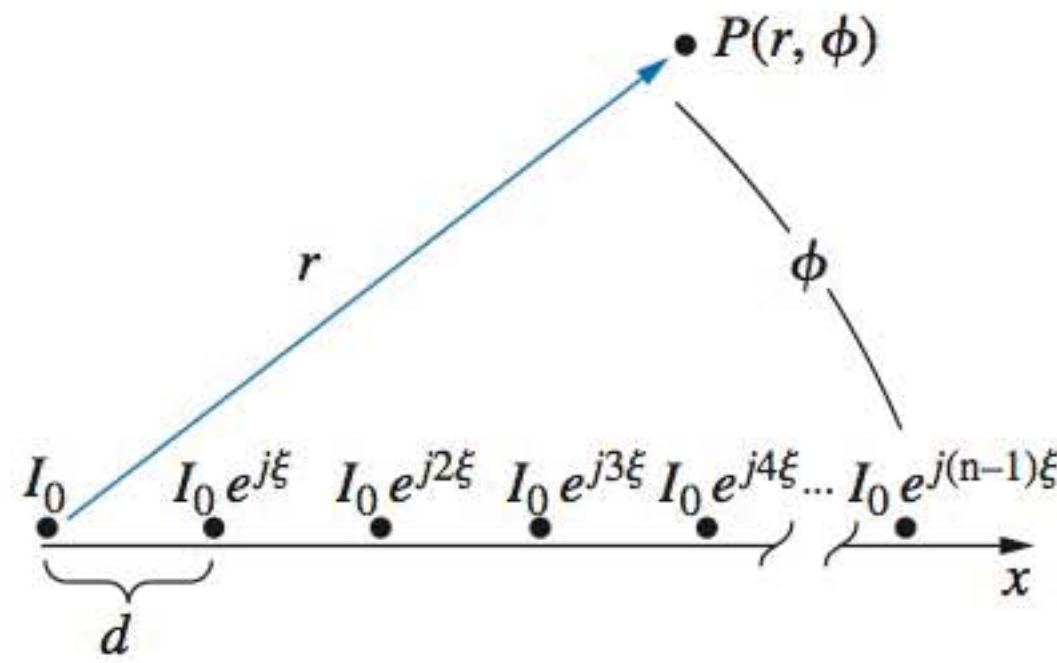



Figura 14.13 Diagrama no plano H de um arranjo linear uniforme de n dipolos, dispostos ao longo do eixo x, e com dipolos individuais orientados ao longo de z (para fora da página). Todos os elementos possuem espaçamento igual, d, e transportam amplitudes iguais de corrente, I_0. Um deslocamento de fase de corrente, ξ, ocorre entre elementos adjacentes. Campos são avaliados na região distante no ponto P, onde os dipolos parecem estar agrupados na origem.

onde o subscrito 2 é aplicado a A para indicar que a função se aplica aos dois elementos. O fator de arranjo para um arranjo linear de n elementos, como esboçado na Figura 14.13, é uma extensão direta da Equação (78), e torna-se

$$|A_n(\theta, \phi)| = |A_n(\psi)| = \frac{1}{n}\left|1 + e^{j\psi} + e^{j2\psi} + e^{j3\psi} + e^{4\psi} + \ldots + e^{j(n-1)\psi}\right| \qquad (79)$$

Com os elementos dispostos ao longo do eixo x, como mostrado na Figura 14.13, temos $\psi = \xi + kd \operatorname{sen}\theta \cos\phi$, como antes. A progressão geométrica que envolve a Equação (79) pode ser expressa na forma fechada

$$|A_n(\psi)| = \frac{1}{n}\frac{\left|1 - e^{jn\psi}\right|}{\left|1 - e^{j\psi}\right|} = \frac{1}{n}\frac{\left|e^{jn\psi/2}\left(e^{-jn\psi/2} - e^{jn\psi/2}\right)\right|}{\left|e^{j\psi/2}\left(e^{-j\psi/2} - e^{j\psi/2}\right)\right|} \qquad (80)$$

No lado mais à direita da Equação (80), reconhecemos as identidades de Euler para a função seno no numerador e no denominador, o que leva finalmente a

$$|A_n(\psi)| = \frac{1}{n}\frac{|\operatorname{sen}(n\psi/2)|}{|\operatorname{sen}(\psi/2)|} \qquad (81)$$

O campo elétrico na região distante para um arranjo de n dipolos pode ser expresso por A_n pela expansão do resultado na Equação (76). Escrevendo $|A_n(\psi)| = |A_n(\theta, \phi)|$, temos

$$|E_{\theta P}(r, \theta, \phi)| = \frac{nE_0}{r}\,|F(\theta)|\;|A_n(\theta, \phi)| \qquad (82)$$

demonstrando, novamente, o princípio de multiplicação de padrões, no qual temos uma nova função do arranjo que pertence ao arranjo linear.

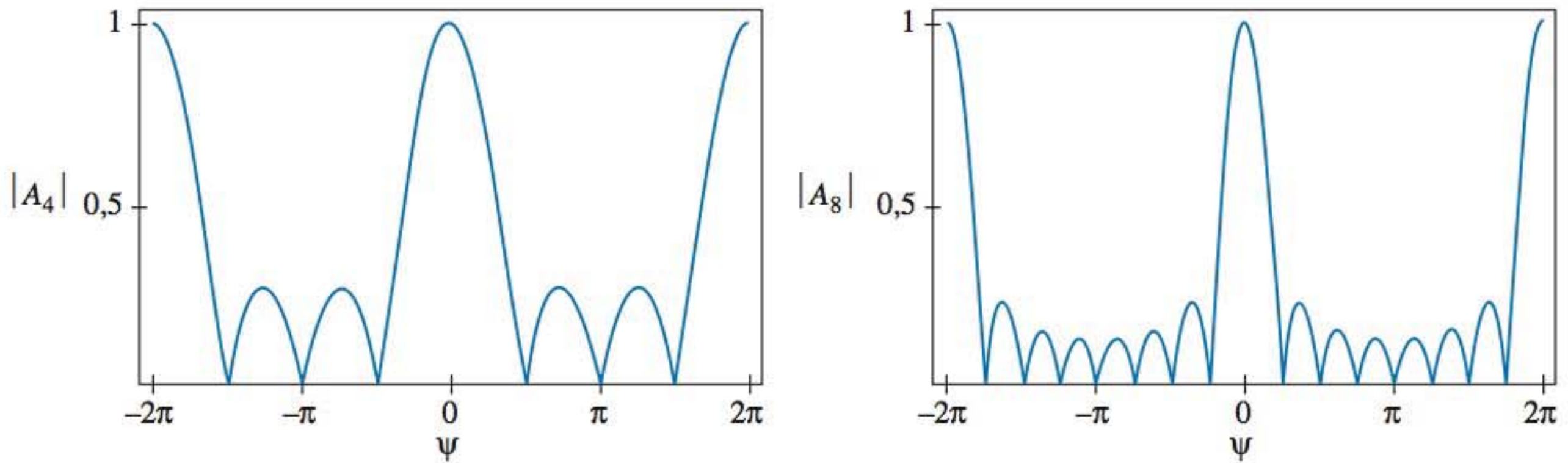



Figura 14.14 $|A_n(\psi)|$ avaliada da Equação (81) na faixa $-2\pi < \psi < 2\pi$ para casos onde o número de elementos, n, é (*a*) 4 e (*b*) 8.

Gráficos da Equação (81) são mostrados na Figura 14.14 para casos onde $n = 4$ e $n = 8$. Note que as funções sempre possuem máximo igual a 1 quando $\psi = 2\,m\pi$, onde m é um inteiro que inclui o zero. Esses máximos principais correspondem aos feixes principais do padrão do arranjo. O efeito de aumentar o número de elementos é estreitar os lóbulos principais e produzir mais máximos secundários (lóbulos laterais).

Para ver como o padrão do arranjo é formatado, é necessário interpretar a função do arranjo, Equação (81), com relação à variação angular no plano H. Nesse plano (onde $\theta = \pi/2$), temos $\psi = \xi + kd \cos\phi$. Então, sabendo que ϕ varia de 0 a 2 π radianos, cos ϕ variará entre ± 1, e verificaremos que ψ estará na faixa

$$\xi - kd \leq \psi \leq \xi + kd \tag{83}$$

Escolhas da fase da corrente, ξ, e do espaçamento da antena, d, determinam a faixa de valores de ψ que aparecerão no padrão real do arranjo. Isso pode levar, em alguns casos, a uma faixa mais estreita em ψ que pode ou não incluir um máximo principal. A fase da corrente determina o valor central de ψ e o espaçamento da antena determina a variação máxima de ψ que ocorre em torno do valor central à medida que o ângulo azimutal ϕ é variado.

Como discutido na Seção 14.5, um *broadside array* tem feixes principais que ocorrem perpendicularmente ao plano do arranjo (em $\phi = \pi/2,\ 3\pi/2$). A condição para isso é que o máximo principal, $\psi = 0$, ocorra nestes ângulos. Em consequência, escrevemos

$$\psi = 0 = \xi + kd \cos(\pi/2) = \xi$$

e então determinamos $\xi = 0$ para obter um *broadside array*. Neste caso, a Equação (83) dá $-kd < \psi < kd$. Assim, o valor central de ψ é zero e, então, o máximo principal está incluído no padrão. No plano H, e com $\xi = 0$, temos que $\psi = kd \cos\phi$. O ponto $\psi = 0$ sempre ocorrerá em $\phi = \pi/2$ e $3\pi/2$, e isso será verdadeiro independentemente da escolha do espaçamento do elemento, d. O efeito de aumentar d é o de expandir a faixa de ψ que resulta quando ϕ varia em sua faixa de 0 a 2π. Logo, para um dado número de antenas, o feixe principal será mais estreito, mas mais lóbulos laterais estarão presentes no padrão quando o espaçamento do elemento for aumentado.

Um *endfire array* requer um máximo principal ao longo do eixo x. No plano H, podemos escrever, portanto

$$\psi = 0 = \xi + kd\cos(0) = \xi + kd$$

ou $\xi = -kd$ para obter operação *endfire* com um máximo ocorrendo no eixo x positivo. Isso pode ou não resultar em um feixe principal no eixo x negativo.

EXEMPLO 14.5

Para arranjos de quatro e oito elementos, selecione a fase da corrente e o espaçamento do elemento que fornecerão operação *endfire* unidirecional, na qual o feixe principal existe na direção $\phi = 0$, enquanto radiação não ocorre na direção $\phi = \pi$, nem nas direções de *broadside* ($\phi = \pm\pi/2$).

Solução. Desejamos $\psi = 0$ quando $\phi = 0$. Logo, de $\psi = \xi + kd\cos\phi$, requeremos que $0 = \xi + kd$ ou que $\xi = -kd$. Usando quatro ou oito elementos, obtemos da Equação (81) ou da Figura 14.14 que zeros ocorrerão quando $\psi = \pm\pi/2$ e $\pm\pi$. Portanto, se escolhermos $\xi = -\pi/2$ e $d = \lambda/4$, obtemos $\psi = -\pi/2$ em $\phi = \pi/2, 3\pi/2$, e $\psi = -\pi$ em $\phi = \pi$. Assim, temos $\psi = -(\pi/2)(1 - \cos\phi)$. Gráficos polares das funções de arranjo resultantes são mostrados nas Figuras 14.15*a* e 14.15*b*. Novamente, a mudança de quatro para oito elementos tem o efeito de diminuir a largura do feixe principal, enquanto aumenta o número de lóbulos laterais de um para três, neste caso. Se um número ímpar de elementos for usado com as escolhas aqui consideradas na fase e no espaçamento, um lóbulo lateral pequeno estará presente na direção $\phi = \pi$.

Geralmente, pode-se escolher a fase da corrente e o espaçamento do elemento para estabelecer o feixe principal em qualquer direção. Escolhendo o máximo principal em $\psi = 0$, podemos escrever

$$\psi = 0 = \xi + kd\cos\phi_{\max} \quad \Rightarrow \quad \cos\phi_{\max} = -\frac{\xi}{kd}$$

de maneira que a direção do feixe principal pode ser alterada pela variação da fase da corrente.

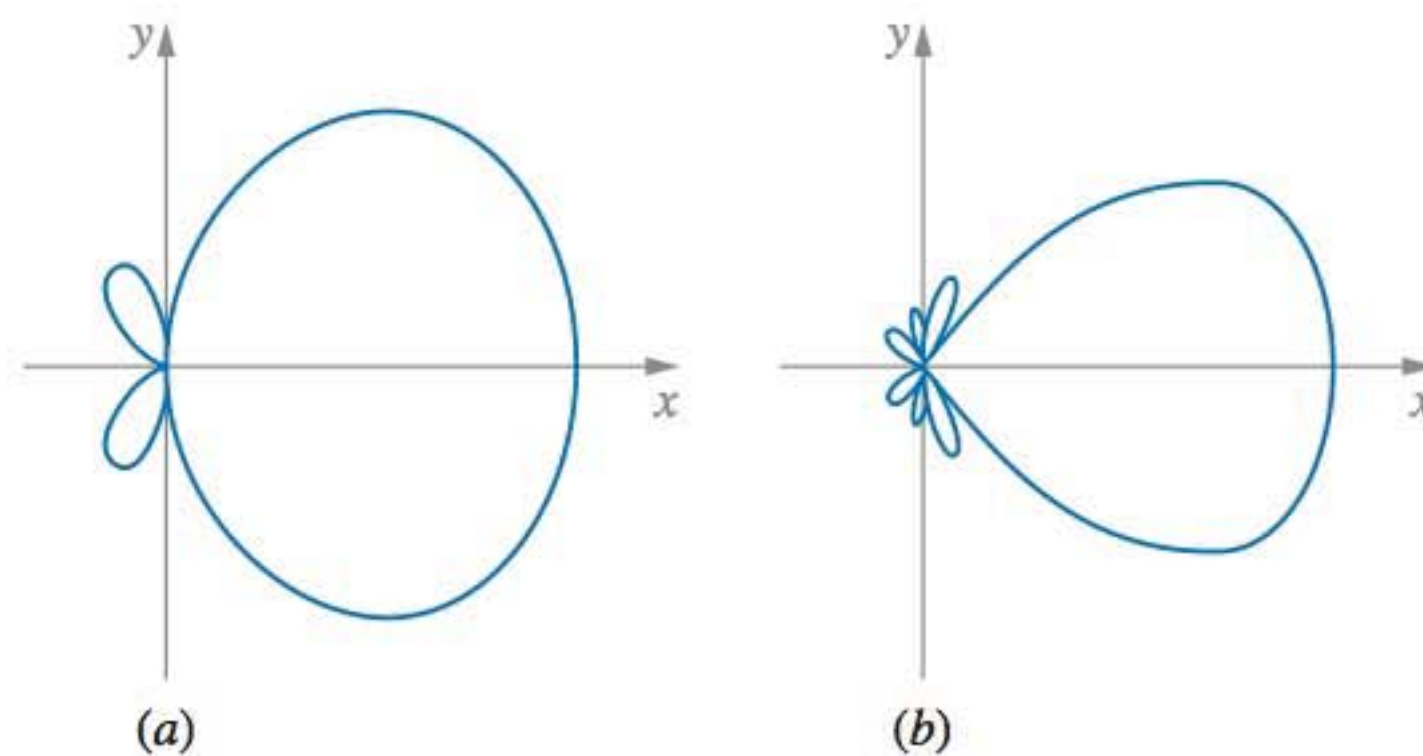



Figura 14.15 Gráficos no plano H de arranjos com espaçamento entre elementos de $d = \lambda/4$ e fase de corrente $\xi = -\pi/2$ para: (*a*) quatro elementos e (*b*) oito elementos.

EP14.8. Em um arranjo *endfire* com dipolo linear, no qual $\xi = -kd$, qual é o espaçamento mínimo entre elementos d, em comprimentos de onda, que resulta em operação bidirecional, na qual intensidades iguais ocorrem no plano H em $\phi = 0$ e $\phi = \pi$?

Resp. $d = \lambda/2$

EP14.9. Para um arranjo com dipolo linear, com espaçamento entre elementos $d = \lambda/4$, qual é a fase da corrente, ξ, que resultará em um feixe principal na direção de (*a*) $\phi = 30°$; (*b*) $\phi = 45°$.

Resp. $-\pi\sqrt{3}/4$; $-\pi\sqrt{2}/4$

14.7 ANTENAS COMO RECEPTORES

Nesta seção, voltamos nossa atenção para outro aspecto fundamental de uma antena, qual seja, sua utilização como um meio para detectar, ou receber, a radiação que se origina de uma fonte distante. Abordaremos esse problema por meio de um estudo de um sistema transmissor-receptor de antena. Esse é composto de duas antenas, juntamente com seus suportes eletrônicos, que desempenham as funções intercambiáveis de transmissor e detector.

A Figura 14.16 mostra um exemplo de um arranjo transmissor-receptor no qual as duas antenas estão acopladas; juntas, elas compõem uma rede linear de duas portas. A tensão V_1 e a corrente I_1 na antena da esquerda afetam a tensão e a corrente (V_2 e I_2) da antena à direita – e vice-versa. Esse acoplamento é quantificado mediante parâmetros de impedância, Z_{12} e Z_{21}. As equações que governam o sistema assumem as seguintes formas

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \tag{84a}$$

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \tag{84b}$$

Z_{11} e Z_{22} são as impedâncias de entrada das antenas 1 e 2 quando cada antena é isolada e utilizada como um transmissor ou, de forma equivalente, se as duas antenas estão suficientemente afastadas uma da outra. As partes reais de Z_{11} e Z_{22} estarão associadas com as resistências de radiação, supondo que as perdas ôhmicas em todos os

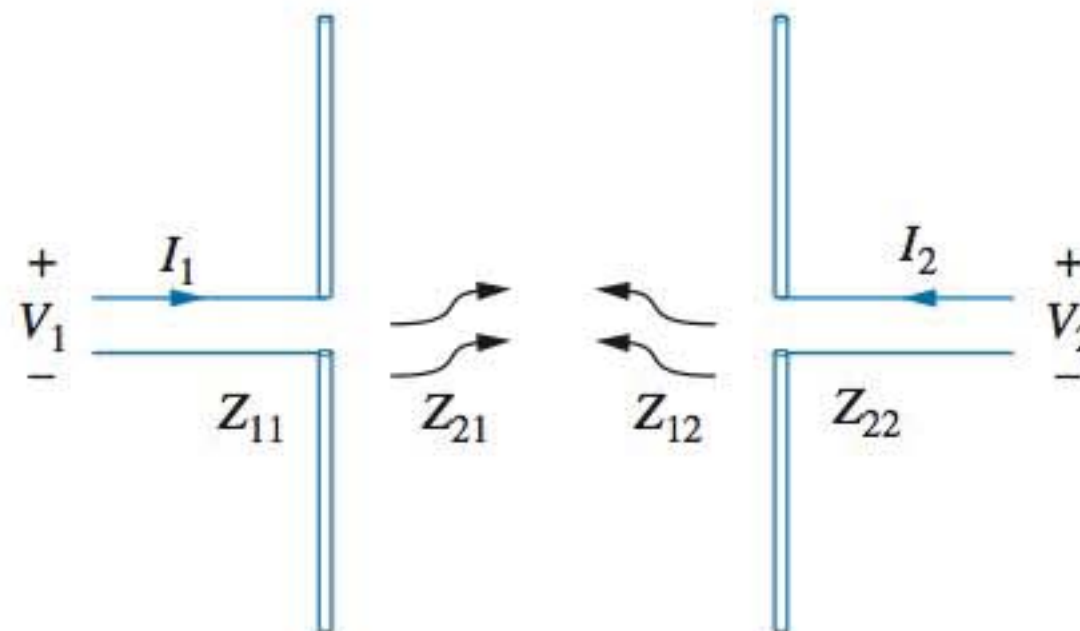



Figura 14.16 Um par de antenas acopladas, demonstrando as Equações (84*a*) e (84*b*).

condutores e todas as perdas dos objetos vizinhos sejam reduzidas a zero. Consideramos isso, além da operação na região distante, como verdadeiro. As impedâncias mútuas, Z_{12} e Z_{21}, dependem do espaçamento e da orientação relativa entre as antenas, bem como das características do meio onde o sistema está inserido. Uma propriedade crucial de tais impedâncias em um meio linear é a igualdade de ambas. Essa propriedade é a personificação do *teorema da reciprocidade*. Dessa forma,

$$\boxed{Z_{12} = Z_{21}} \tag{85}$$

Introspecções adicionais podem ser encontradas pela inversão das Equações (84*a*) e (84*b*) e pela consideração dos parâmetros de admitância, Y_{ij}:

$$I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \tag{86a}$$

$$I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \tag{86b}$$

onde, novamente, o teorema da reciprocidade mostra que $Y_{12} = Y_{21}$.

Suponha que os terminais da antena 2 sejam curto-circuitados. Assim, $V_2 = 0$. Nesse caso, a Equação (86*b*) fornece $I_2' = Y_{21}V_1'$; o apóstrofo denota a condição de uma antena curto-circuitada. Como alternativa, poderíamos curto-circuitar a antena 1, resultando em $I_1'' = Y_{12}V_2''$ (com as aspas indicando condições com a antena 1 curto-circuitada). Devido à reciprocidade, segue que

$$\boxed{\frac{V_2''}{I_1''} = \frac{V_1'}{I_2'}} \tag{87}$$

A Equação (87) pode ser aplicada independentemente do posicionamento relativo e orientação das duas antenas. Sabemos que em uma dada direção cada antena transmitirá uma densidade de potência, cujo valor é determinado pelo padrão de radiação da antena. Além disso, esperamos verificar que a corrente criada na antena receptora depende da orientação da antena. Portanto, existe um *padrão de recepção* que a antena receptora apresenta ao sinal recebido pela mesma. Para uma orientação relativa fixa entre as duas antenas, com a antena 1 como a transmissora, e a antena 2 curto-circuitada, uma razão V_1'/I_2' será obtida. Essa razão dependerá da orientação relativa, que por sua vez dependerá do padrão de radiação da antena 1 e do padrão de recepção da antena 2. Se os papéis forem invertidos, e assim o transmissor se tornar o receptor, e com a antena 1 curto-circuitada, uma razão V_2''/I_1'' será obtida da Equação (87), semelhante à anterior. A conclusão a que devemos chegar é que a forma como a antena receptora *aceita* potência será determinada por seu padrão de *radiação*. Isso significa, por exemplo, que a direção do feixe principal no padrão de radiação da antena receptora corresponde à direção em que é mais sensível aos sinais que estão chegando. *Os padrões de radiação e de recepção de qualquer antena são os mesmos.*

Em seguida, consideramos um caso mais geral de transmissão, no qual a antena receptora supre potência a uma carga. A antena 1 (Figura 14.16) serve como o transmissor, enquanto a antena 2 é o receptor onde a carga está conectada. Uma suposição primária é afirmar que as antenas estão distantes o suficiente uma da outra de tal forma que somente o acoplamento direto (por meio de Z_{21}) será apreciável. A grande distância de separação indica que a corrente induzida I_2 é provavelmente muito menor que I_1. Acoplamento reverso (por meio de Z_{12}) envolveria transmissão do sinal

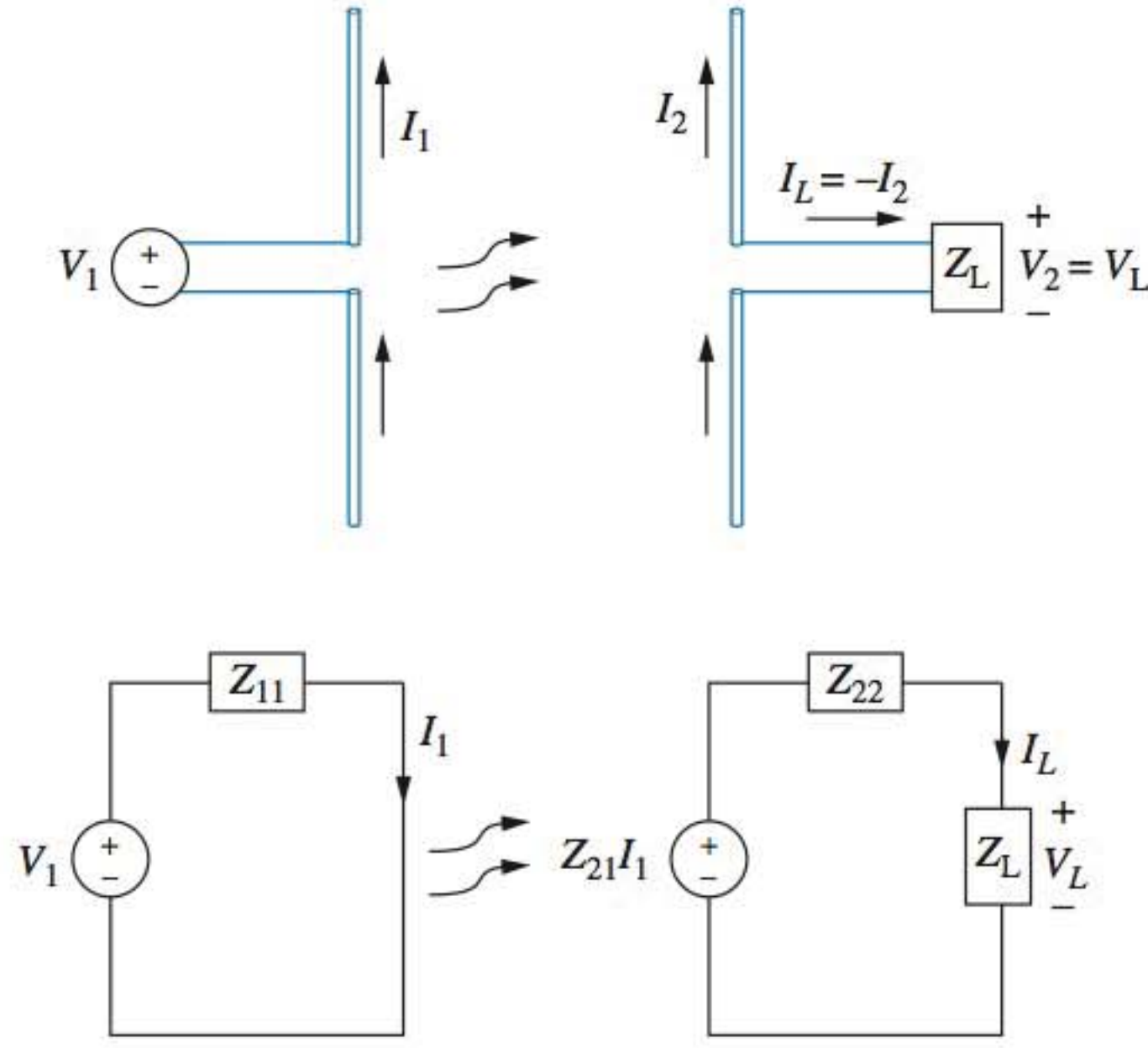



Figura 14.17 Antenas transmissora e receptora e seus circuitos equivalentes.

recebido pela antena 2 que volta à antena 1. Especificamente, a corrente induzida I_2, adicionalmente, induz corrente I_1' (muito fraca) na antena 1. Esta última, então, transportaria uma corrente resultante $I_1 + I_1'$, onde $I_1' << I_1$. Logo, consideramos que o produto $Z_{12}I_2$ pode ser desprezado, e assim a Equação (84*a*) fornecerá $V_1 = Z_{11}I_1$. Uma impedância de carga, Z_L, é conectada nos terminais da antena 2, como mostrado na parte superior da Figura 14.17. V_2 é a tensão nessa carga. A corrente $I_L = -I_2$ flui agora na carga. Considerando essa corrente como positiva, a Equação (84*b*) torna-se

$$V_2 = V_L = Z_{21}I_1 - Z_{22}I_L \tag{88}$$

Essa é justamente a equação da lei de Kirchoff de tensão para o circuito equivalente do lado direito mostrado na parte inferior da Figura 14.17. O termo $Z_{21}I_1$ é interpretado como a fonte de tensão para esse circuito, originando-se da antena 1. Usando a Equação (88), juntamente com $V_L = Z_L I_L$, obtém-se

$$I_L = \frac{Z_{21}I_1}{Z_{22} + Z_L} \tag{89}$$

A média temporal da potência dissipada por Z_L é

$$P_L = \frac{1}{2}\mathcal{R}e\left\{V_L I_L^*\right\} = \frac{1}{2}|I_L|^2\,\mathcal{R}e\{Z_L\} = \frac{1}{2}|I_1|^2\left|\frac{Z_{21}}{Z_{22}+Z_L}\right|^2\mathcal{R}e\{Z_L\} \tag{90}$$

A máxima potência transferida para a carga ocorre quando a impedância da carga é igual ao complexo conjugado da impedância do ponto de alimentação, ou $Z_L = Z_{22}^*$. Fazendo essa substituição na Equação (90), e usando o fato de que $Z_{22} + Z_{22}^* = 2\,R_{22}$, obtém-se

$$P_L = \frac{1}{2}|I_1|^2\left|\frac{Z_{21}}{2R_{22}}\right|^2\mathcal{R}e\{Z_{22}\} = \frac{|I_1|^2\,|Z_{21}|^2}{8R_{22}} \tag{91}$$

A média temporal da potência transmitida pela antena 1 é

$$P_r = \frac{1}{2}\mathcal{R}e\left\{V_1 I_1^*\right\} = \frac{1}{2}R_{11}\,|I_1|^2 \tag{92}$$

Ao comparar o resultado anterior com a Equação (65), R_{11} pode ser interpretado como a resistência de radiação da antena transmissora se (1) não existirem perdas resistivas e (2) a amplitude da corrente no ponto de alimentação for a amplitude máxima, I_0. Como verificamos anteriormente, a última condição ocorrerá em um dipolo se o comprimento total da antena for um inteiro múltiplo de meio comprimento de onda. Utilizando as Equações (91) e (92), escrevemos a razão das potências recebida e transmitida:

$$\frac{P_L}{P_r} = \frac{|Z_{21}|^2}{4R_{11}R_{22}} \tag{93}$$

Nesse estágio, um maior entendimento sobre as impedâncias mútuas (Z_{21} ou Z_{12}) é necessário. Essa grandeza dependerá da distância e da orientação relativa das duas antenas, e também de outros parâmetros. A Figura 14.18 mostra duas antenas dipolo, separadas pela distância radial, r, e com orientações relativas especificadas pelos valores de θ, medido em relação aos eixos de *cada* antena.[5] Com a antena 1 servindo como transmissor e a antena 2 como receptor, o padrão de radiação da antena 1 é dado em função de θ_1 e ϕ_1, enquanto o padrão de recepção da antena 2 (equivalente a *seu* padrão de radiação) é fornecido como função de θ_2 e ϕ_2.

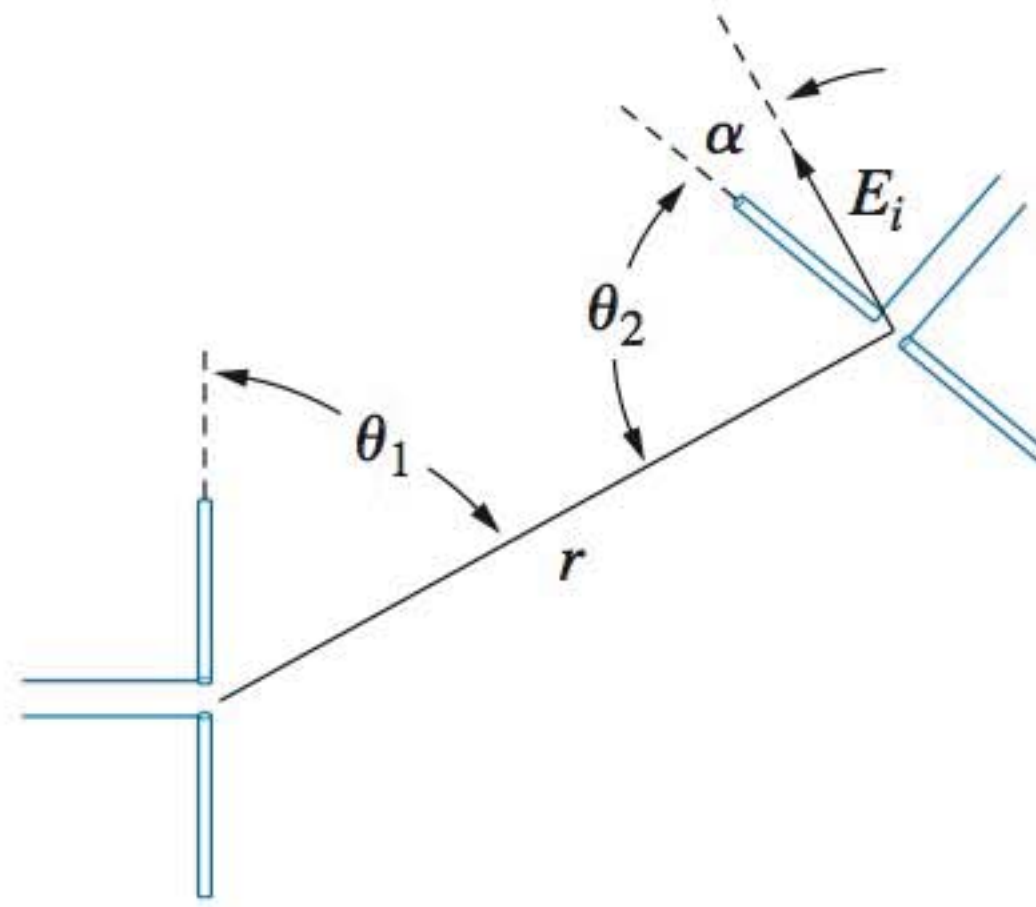



Figura 14.18 Um par de antenas transmissoras-receptoras, mostrando ângulos de orientação relativa quando as antenas estão situadas no mesmo plano (aqui considera-se que as coordenadas em ϕ não são necessárias). É possível verificar o campo elétrico incidente (E_i), da antena 1 alcança a antena 2 e apresenta ângulo α em relação ao eixo da antena 2. O campo é perpendicular à distância radial r, e assim $\alpha = 90° - \theta_2$. Considera-se uma operação na região distante, de maneira que as duas antenas se comportem como objetos pontuais.

[5] Uma forma de expressar as orientações relativas é definir o eixo z juntamente com a linha de distância radial r, e então usar os ângulos θ_i e ϕ_i (i = 1, 2) localmente para descrever as orientações dos eixos das antenas; as origens dos dois sistemas de coordenadas esféricas são localizadas na alimentação de cada antena. A coordenada ϕ, assim, seria o ângulo de rotação ao redor do eixo r. Na Figura 14.18, por exemplo, com ambas as antenas no plano da página, ambas as coordenadas possuem valores nulos. Com a antena 2 rotacionada ao redor do eixo r, tal que seja normal à página, ϕ_2 seria 90°, e as antenas teriam polarização cruzada.

Uma forma conveniente de expressar a potência recebida em uma antena é considerar sua *área efetiva*, denotada $A_e(\theta, \phi)$, e expressa em m^2. Retorne à Figura 14.18 e considere a densidade de potência média na posição do receptor (antena 2), originando-se do transmissor (antena 1). Segundo as Equações (25) e (26), essa será a intensidade do vetor de Poynting naquela posição, $S_r(r, \theta_1, \phi_1)$ em W/m^2, onde uma dependência de ϕ é agora necessária para descrever todas as orientações relativas possíveis. A área efetiva da antena receptora é definida de tal forma que, quando a densidade de potência for multiplicada pela área efetiva, a potência dissipada pela carga casada na antena receptora será obtida. Com a antena 2 como o receptor, escrevemos

$$P_{L2} = S_{r1}(r, \theta_1, \phi_1) \times A_{e2}(\theta_2, \phi_2) \quad [\text{W}] \tag{94}$$

Porém, usando as Equações (34) e (38), podemos escrever a densidade de potência pela diretividade da antena 1:

$$\boxed{S_{r1}(r, \theta_1, \phi_1) = \frac{P_{r1}}{4\pi r^2} D_1(\theta_1, \phi_1)} \tag{95}$$

Combinando as Equações (94) e (95), obtemos a razão entre a potência recebida pela antena 2 e a potência radiada pela antena 1:

$$\frac{P_{L2}}{P_{r1}} = \frac{A_{e2}(\theta_2, \phi_2)\, D_1(\theta_1, \phi_1)}{4\pi r^2} = \frac{|Z_{21}|^2}{4R_{11}R_{22}} \tag{96}$$

onde a segunda igualdade repete a Equação (93). Podemos resolver a Equação (96) para encontrar

$$\boxed{|Z_{21}|^2 = \frac{R_{11}R_{22}\, A_{e2}(\theta_2, \phi_2)\, D_1(\theta_1, \phi_1)}{\pi r^2}} \tag{97a}$$

Em seguida, note que se os papéis fossem invertidos e assim a antena 2 transmitisse para a antena 1, encontraríamos

$$\boxed{|Z_{12}|^2 = \frac{R_{11}R_{22}\, A_{e1}(\theta_1, \phi_1)\, D_2(\theta_2, \phi_2)}{\pi r^2}} \tag{97b}$$

O teorema da reciprocidade afirma que $Z_{12} = Z_{21}$. Ao igualar as Equações (97*a*) e (97*b*), segue que

$$\boxed{\frac{D_1(\theta_1, \phi_1)}{A_{e1}(\theta_1, \phi_1)} = \frac{D_2(\theta_2, \phi_2)}{A_{e2}(\theta_2, \phi_2)} = \text{Constante}} \tag{98}$$

Ou seja, a razão entre a diretividade e a área efetiva para *qualquer* antena é uma constante universal, independentemente do tipo de antena ou da direção na qual esses parâmetros são avaliados. Para determinar a constante, somente necessitamos verificar um caso.

EXEMPLO 14.6

Determine a área efetiva de um dipolo Hertziano e calcule a relação geral entre a diretividade e a área efetiva de qualquer antena.

Solução. Com o dipolo Hertziano como a antena receptora, cujo comprimento é d, sua tensão de carga, V_L, dependerá do campo elétrico que ele intercepta da antena 1. Especificamente, encontramos a projeção do campo da antena transmissora ao longo do comprimento da antena receptora. Esse campo projetado, quando multiplicado pelo comprimento da antena 2, fornece a tensão de entrada do circuito equivalente da antena receptora. Considerando a Figura 14.18, verificamos que o ângulo de projeção é α, e assim a tensão que alimenta o dipolo Hertziano será

$$V_{\text{entrada}} = E_i \cos\alpha \times d = E_i\, d \operatorname{sen}\theta_2$$

O circuito equivalente para o dipolo Hertziano é agora semelhante ao circuito da antena receptora, como mostrado na Figura 14.17, exceto que substituímos a fonte de tensão, $I_1 Z_{21}$, por V_{entrada}, como mostrado anteriormente. Assumindo uma carga complexa conjugada ($Z_L = Z_{22}^*$), a corrente na carga é agora

$$I_L = \frac{E_i\, d \operatorname{sen}\theta_2}{Z_{22} + Z_L} = \frac{E_i\, d \operatorname{sen}\theta_2}{2R_{22}}$$

A potência entregue à carga casada é então

$$P_{L2} = \frac{1}{2}\mathcal{R}e\left\{V_L I_L^*\right\} = \frac{1}{2}R_{22}\,|I_L|^2 = \frac{(E_i\, d)^2 \operatorname{sen}^2\theta_2}{8R_{22}} \qquad (99)$$

Para o dipolo Hertziano, R_{22} é a resistência de radiação. Esta foi anteriormente encontrada por meio da Equação (30)

$$R_{22} = R_{\text{radiação}} = 80\pi^2\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2$$

Substituindo esse termo na Equação (99), encontramos

$$P_{L2} = \frac{1}{640}\left(\frac{E_i\,\lambda \operatorname{sen}\theta_2}{\pi}\right)^2 \quad \text{[Watts]} \qquad (100)$$

Assim, a densidade de potência média que incide na antena receptora será

$$S_{r1}(r,\theta_1,\phi_1) = \frac{E_i(r,\theta_1,\phi_1)^2}{2\eta_0} = \frac{E_i^2}{240\pi} \quad [\text{Watts/m}^2] \qquad (101)$$

Usando as Equações (100) e (101), a área efetiva do Hertziano é

$$A_{e2}(\theta_2) = \frac{P_{L2}}{S_{r1}} = \frac{3}{8\pi}\lambda^2 \operatorname{sen}^2(\theta_2) \quad [\text{m}^2] \qquad (102)$$

A diretividade para o dipolo Hertziano, deduzida no Exemplo 14.1, é

$$D_2(\theta_2) = \frac{3}{2}\operatorname{sen}^2(\theta_2) \qquad (103)$$

Comparando as Equações (102) e (103), determinamos a relação que estamos procurando: a área efetiva e a diretividade para *qualquer* antena são relacionadas por

$$D(\theta, \phi) = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_e(\theta, \phi) \quad (104)$$

Podemos retornar à Equação (96) e usar a Equação (104) para reescrever a razão entre a potência entregue à carga da antena receptora e a potência radiada total pela antena transmissora: esta produz uma expressão que envolve o simples produto das áreas efetivas, conhecida como *fórmula de transmissão de Friis*:

$$\frac{P_{L2}}{P_{r1}} = \frac{A_{e2}(\theta_2, \phi_2)\, D_1(\theta_1, \phi_1)}{4\pi r^2} = \frac{A_{e1}(\theta_1, \phi_1) A_{e2}(\theta_2, \phi_2)}{\lambda^2 r^2} \quad (105)$$

O resultado pode também ser expresso pela diretividade:

$$\frac{P_{L2}}{P_{r1}} = \frac{\lambda^2}{(4\pi r)^2} D_1(\theta_1, \phi_1) D_2(\theta_2, \phi_2) \quad (106)$$

Esses resultados fornecem um resumo efetivo do que foi discutido nesta seção, e constituem uma ferramenta de projeto muito útil para a comunicação sem fio no espaço livre. Novamente, a Equação (105) considera antenas sem perdas nas regiões distantes uma da outra e fornece a potência dissipada pela carga que está casada (complexo conjugado) à impedância da antena receptora.

EP14.10. Dados: uma antena que possui diretividade de 6 dB e opera em um comprimento de onda $\lambda = 1$ m. Qual é a máxima área efetiva da antena?

Resp. $1/\pi$ m^2

EP14.11. A potência de 1 mW é dissipada pela carga casada de uma antena receptora de área efetiva igual a 1 m^2. Essa antena está posicionada no centro do feixe principal da antena transmissora, localizada a 1,0 km. Qual potência total será radiada pelo transmissor se sua diretividade for (*a*) 10 dB, (*b*) 7 dB?

Resp. 4π kW; 8π kW

REFERÊNCIAS

1. C. Balanis, *Antenna Theory: Analysis and Design*, 3. ed., Wilely, Hoboken, 2005. Um texto amplamente utilizado em nível superior ou em pós-graduação, oferecendo muitos detalhes.
2. S. Silver, ed., *Microwave Antenna Theory and Design*, Peter Peregrinus, Ltd em nome de IEE, Londres, 1984. Esta é uma reedição do volume 9 da famosa série do Laboratório de Radiação do MIT, originalmente publicada pela McGraw-Hill em 1949. O livro contém

muitas informações sobre as fontes originais, que surgiram posteriormente nos livros--texto modernos.

3. E. C. Jordan, and K.G. Balmain, *Electromagnetic Waves and Radiating Systems*, 2. ed., Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, NJ, 1969. Um texto clássico que aborda guias de onda e antenas.
4. L. V. Blake, *Antennas*, New York, 1966. Um texto curto, bem escrito e muito compreensível para um um nível básico.
5. G. S. Smith, *Classical Electromagnetic Radiating*, Cambridge, 1997. Esse excelente texto, que alcança o nível de pós-graduação, provê uma perspectiva única e um tratamento rigoroso do problema de radiação relacionado a todos os tipos de antenas.

PROBLEMAS

Quizzes

14.1 Um dipolo curto pelo qual circula uma corrente $I_0 \cos \omega t$ na direção $\mathbf{a}_z$ está posicionado na origem no espaço livre. (*a*) Se $k = 1$ rad/m, $r = 2$ m, $\theta = 45°$, $\phi = 0$ e $t = 0$, encontre o vetor unitário em componentes cartesianos que mostre a direção instantânea de $\mathbf{E}$. (*b*) Qual fração da potência média total é irradiada na faixa $80° < \theta < 100°$?

14.2 Prepare um gráfico com uma curva r *versus* θ, em coordenadas polares, mostrando o lugar geométrico no plano $\phi = 0$ onde: (*a*) o campo radiado $|E_{\theta s}|$ é metade do seu valor em $r = 10^4$ m, $\theta = \pi/2$; (*b*) a densidade de potência média radiada $<\mathcal{S}_r>$ é metade de seu valor em $r = 10^4$ m, $\theta = \pi/2$. Este problema refere-se a um dipolo Hertziano.

14.3 Duas antenas curtas na origem, no espaço livre, possuem correntes idênticas de 5 cos ωt A, uma na direção $\mathbf{a}_z$, outra na direção $\mathbf{a}_y$. Seja $\lambda = 2\pi$ m e $d = 0{,}1$ m. Encontre $\mathbf{E}_s$ no ponto distante: (*a*) ($x = 0$, $y = 1.000$, $z = 0$); (*b*) (0, 0, 1.000); (*c*) (1.000, 0, 0). (*d*) Encontre $\mathbf{E}$ em (1.000, 0, 0) em $t = 0$. (*e*) Encontre $|\mathbf{E}|$ em (1.000, 0, 0) em $t = 0$.

14.4 Escreva o campo elétrico do dipolo Hertziano cujos componentes são dados pelas Equações (15) e (16) na região próxima, no espaço livre, onde $kr << 1$. Neste caso, somente um único termo em cada uma das duas equações não é nulo, e as fases, δ_r e δ_θ, podem ser simplificadas para um único valor. Construa o vetor campo elétrico resultante e compare seu resultado ao do dipolo estático (Equação (35) no Capítulo 4). Qual relação deve existir entre a carga do dipolo estático, Q, e a amplitude de corrente, I_0, de forma que os resultados sejam idênticos?

14.5 Considere o termo na Equação (14) [ou na Equação (10)] que possui dependência com $1/r^2$ no campo magnético do dipolo Hertziano. Considerando que esse termo domina e que $kr << 1$, mostre que o resultante campo magnético é o mesmo que seria encontrado se a lei de Biot-Savart [Equação (2), Capítulo 7] fosse aplicada a um elemento de corrente de comprimento diferencial, d, orientado ao longo de z e centrado na origem.

14.6 Avalie a média temporal do vetor de Poynting, $<\mathbf{S}> = \left(\frac{1}{2}\right)\mathcal{R}e\left\{\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*\right\}$, para o dipolo Hertziano, considerando que o caso geral envolve os

componentes de campo dados pelas Equações (10), (13*a*) e (13*b*). Compare seu resultado ao do caso da região distante, na Equação (26).

14.7 Um elemento curto de corrente tem $d = 0{,}03\lambda$. Calcule a resistência de radiação para cada uma das seguintes distribuições de corrente: (*a*) uniforme, I_0; (*b*) linear, $I(z) = I_0(0{,}5d - |z|)/0{,}5d$; (*c*) degrau, I_0 para $0 < |z| < 0{,}25d$ e $0{,}5I_0$ para $0{,}25d < |z| < 0{,}5d$.

14.8 Avalie a média temporal do vetor de Poynting, $<\mathbf{S}> = (1/2)\mathcal{R}e\left\{\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*\right\}$ para a antena dipolo magnético na região distante, na qual todos os termos de ordem $1/r^2$ e $1/r^4$ são desprezados nas Equações (48), (49) e (50). Compare seu resultado ao da densidade de potência na região distante do dipolo Hertziano, Equação (26). Nessa comparação, na qual se considera amplitudes iguais de corrente, qual relação entre o raio da espira, *a*, e o comprimento do dipolo, *d*, resultaria em potências radiadas iguais para os dois dispositivos?

14.9 Uma antena dipolo no espaço livre tem uma distribuição linear de corrente com corrente nula em cada extremidade e com pico de corrente I_0 no centro. Se o comprimento *d* vale $0{,}02\lambda$, qual valor de I_0 é necessário para: (*a*) fornecer uma amplitude de campo radiado de 100 mV/m a uma distância de 1,6 km em $\theta = 90°$; (*b*) radiar uma potência total de 1 W?

14.10 Mostre que o comprimento da corda no gráfico do plano *E* da Figura 14.4 é igual a *b* sen θ, onde *b* é o diâmetro do círculo.

14.11 Uma antena monopolo no espaço livre, que se estende verticalmente sobre um plano condutor perfeito, tem distribuição linear de corrente. Se o comprimento da antena vale $0{,}01\lambda$, qual valor de I_0 é necessário para: (*a*) fornecer uma amplitude de campo radiado de 100 mV/m a uma distância de 1,6 km em $\theta = 90°$; (*b*) radiar uma potência total de 1 W? Considere o espaço livre acima do plano condutor.

14.12 Encontre os zeros em θ para o padrão do plano *E* de uma antena dipolo para a qual (*a*) $\ell = \lambda$; (*b*) $2\ell = 1{,}3\lambda$. Use a Figura 14.8 como guia.

14.13 O campo radiado de certo elemento de corrente vertical curto vale $E_{\theta s} = (20/r)$ sen $\theta\, e^{-j10\pi r}$ V/m se estiver localizado na origem no espaço livre. (*a*) Encontre $E_{\theta s}$ em $P(r = 100, \theta = 90°, \phi = 30°)$. (*b*) Encontre $E_{\theta s}$ em $P(100, 90°, 30°)$ se o elemento vertical estiver posicionado em $A(0{,}1, 90°, 90°)$. (*c*) Encontre $E_{\theta s}$ em $P(100, 90°, 30°)$ se elementos verticais idênticos estão posicionados em $A(0{,}1, 90°, 90°)$ e $B(0{,}1, 90°, 270°)$.

14.14 Para uma antena dipolo de comprimento total $2\ell = \lambda$, avalie os máximos de diretividade em decibéis e a largura do feixe de meia potência.

14.15 Para uma antena dipolo de comprimento total $2\ell = 1{,}3\lambda$, determine as localizações em θ e o pico da intensidade dos lóbulos laterais, expresso como uma fração da intensidade do lóbulo principal. Represente seu resultado com o nível do lóbulo lateral em decibéis, dado por S_s [dB] = $10 \log_{10}(S_{r,\text{ lóbulo principal}}/S_{r,\text{ lóbulo lateral}})$. Use novamente a Figura 14.8 como guia.

14.16 Para uma antena dipolo de comprimento total $2\ell = 1{,}5\lambda$, (*a*) avalie as localizações em θ nas quais os zeros e máximos ocorrem no plano *E*;

(b) determine o nível do lóbulo lateral, de acordo com a definição no Problema 14.14; (c) determine a máxima diretividade.

14.17 Considere um dipolo de meia onda sem perdas no espaço livre, com resistência de radiação $R_{\text{radiação}} = 73\ \Omega$, e máxima diretividade $D_{\max} = 1{,}64$. Se a antena transporta uma corrente de amplitude 1 A, (a) quanta potência total (em W) é radiada? (b) Quanta potência é interceptada por uma abertura de 1 m^2 em uma distância $r = 1$ km? A abertura está no plano equatorial e posicionada de forma direta em relação à antena. Considere uma densidade de potência uniforme na abertura.

14.18 Repita o Problema 14.17, mas com uma antena de onda total ($2\ell = \lambda$). Integrais numéricas podem ser necessárias.

14.19 Projete um arranjo de dois elementos que radiará intensidades iguais nas direções $\phi = 0, \pi/2, \pi$ e $3\pi/2$ no plano H. Especifique a menor fase de corrente relativa, ξ, e o menor espaçamento do elemento, d.

14.20 Um arranjo com dipolo de dois elementos está configurado para fornecer radiação nula nas direções *broadside* ($\phi = \pm\, 90°$) e *endfire* ($\phi = 0, 180°$), mas com máximos ocorrendo em ângulos compreendidos entre esses. Considere tal aparato com $\psi = \pi$ em $\phi = 0$ e $\psi = -3\pi$ em $\phi = \pi$, com ambos os valores determinados no plano H. (a) Verifique que esses valores fornecem radiação *broadside* e *endfire* nulas. (b) Determine a fase de corrente relativa requerida, ξ. (c) Determine o espaçamento requerido do elemento, d. (d) Determine os valores de ϕ nos quais ocorrem máximos no padrão de radiação.

14.21 No arranjo *endfire* de dois elementos do Exemplo 14.4, considere o efeito de variação da frequência de operação, f, distante da frequência de operação original, f_0, enquanto o defasamento de corrente original é mantido, $\xi = -\,\pi/2$. Determine os valores de ϕ nos quais ocorrem máximos quando a frequência é alterada para: (a) $f = 1{,}5\, f_0$; (b) $f = 2\, f_0$.

14.22 Volte ao Problema 14.21, mas com a fase de corrente variável com a frequência (esta automaticamente ocorrerá se a diferença de fase for estabelecida por um simples atraso de tempo entre as correntes de alimentação). Agora, a diferença de fase de corrente será $\xi' = \xi\, f/f_0$, onde f_0 é a frequência (de projeto) original. Sob essa condição, a radiação será máxima na direção $\phi = 0$ independentemente da frequência (demonstre isto). A radiação traseira (ao longo de $\phi = \pi$) se desenvolverá, contudo, à medida que a frequência for sintonizada para valores distantes de f_0. Deduza uma expressão para a razão de radiações *para a frente e traseira* (para trás), definida como a razão das intensidades de radiação em $\phi = 0$ e $\phi = \pi$, expressa em decibéis. Expresse esse resultado como uma função da relação de frequência, f/f_0. Avalie a razão *para a frente e traseira* para: (a) $f = 1{,}5\, f_0$; (b) $f = 2\, f_0$ e (c) $f = 0{,}75\, f_0$.

14.23 Um arranjo de dois dipolos alinhados em ângulos retos (*turnstile antenna*) está posicionado no plano xy. Os dipolos são idênticos, estão posicionados ao longo dos eixos x e y, e são alimentados na origem. Considere que

correntes iguais sejam supridas a cada antena e que uma referência de fase nula seja aplicada na antena posicionada no eixo x. Determine a fase relativa, ξ, da antena ao longo do eixo y de tal forma que o campo elétrico resultante radiado, medido no eixo z positivo, seja: (a) polarizado circularmente à esquerda; (b) polarizado linearmente ao longo de um eixo de 45° entre x e y.

14.24 Considere um arranjo linear *endfire*, projetado para intensidade de radiação máxima em $\phi = 0$, usando valores de ξ e de d sugeridos no Exemplo 14.5. Determine uma expressão para a razão *para a frente e traseira* (definida no Problema 14.22) em função do número de elementos, n, se n for um número ímpar.

14.25 Um arranjo linear dipolo é constituído de seis elementos com espaçamento $d = \lambda/2$. (a) Determine a fase de corrente apropriada, ξ, para a obtenção de radiação máxima ao longo de $\phi = \pm 60°$. (b) Com a fase determinada na parte (a), avalie as intensidades (relativas ao máximo) nas direções *broadside* e *endfire*.

14.26 Em um arranjo *endfire* linear de n elementos, uma escolha da fase de corrente que melhora a diretividade é dada pela condição de Hansen-Woodyard:

$$\xi = \pm\left(\frac{2\pi d}{\lambda} + \frac{\pi}{n}\right)$$

onde os sinais positivo e negativo fornecem a máxima radiação em $\phi = 180°$ e $0°$, respectivamente. A aplicação desse defasamento pode não levar necessariamente à operação *endfire* unidirecional (radiação traseira nula), mas acarretar na escolha apropriada do espaçamento do elemento, d. (a) Determine esse espaçamento requerido como uma função de n e de λ. (b) Mostre que o espaçamento encontrado na parte (a) aproxima-se de $\lambda/4$ para um grande número de elementos. (c) Mostre que um número par de elementos é requerido.

14.27 Considere um arranjo *broadside* linear de n elementos. Aumentando o número de elementos tem-se o efeito de estreitar o feixe principal. Demonstre tal afirmação ao avaliar a separação em ϕ entre os zeros de cada lado do máximo principal em $\phi = 90°$. Mostre que para um valor grande de n essa separação é aproximada para $\Delta\phi \doteq 2\lambda/L$, onde $L \doteq nd$ é o comprimento total do arranjo.

14.28 Um grande transmissor terrestre radia 10 kW e comunica-se com uma estação receptora móvel que dissipa 1 mW em uma carga casada de sua antena. O receptor (sem movimento) transmite de volta para a estação terrestre. Se a unidade móvel radia 100 W, qual é a potência recebida (a uma carga casada) pela estação terrestre?

14.29 Sinais são transmitidos em um comprimento de onda portadora de 1 m entre duas antenas idênticas, constituídas por dipolos de meia onda, espaçadas por 1 km. As antenas estão de tal forma orientadas que são exatamente

paralelas. (a) Se a antena transmissora radia 100 W, quanta potência é dissipada por uma carga casada na antena receptora? (b) Suponha que a antena receptora seja rotacionada 45°, enquanto as duas antenas permanecem no mesmo plano. Qual é a potência recebida neste caso?

14.30 Sabe-se que uma antena dipolo de meia onda tem uma área efetiva máxima, dada por A_{max}. (a) Expresse a máxima diretividade dessa antena em função de A_{max} e do comprimento de onda λ. (b) Expresse a amplitude de corrente, I_0, necessária para radiar uma potência total, P_r, em termos de P_r, A_{max} e λ. (c) Em quais valores de θ e ϕ a área efetiva da antena será igual a A_{max}?

APÊNDICE

A

Análise Vetorial

A.1 COORDENADAS CURVILÍNEAS GENERALIZADAS

Vamos considerar um sistema de coordenadas ortogonais generalizadas na qual um ponto é localizado pela interseção de três superfícies mutuamente perpendiculares (de forma não especificada),

$$u = \text{constante}$$
$$v = \text{constante}$$
$$w = \text{constante}$$

onde u, v e w são as variáveis do sistema de coordenadas. Se cada variável for aumentada por uma quantidade diferencial e mais três superfícies mutuamente perpendiculares que correspondem a esses novos valores forem desenhados, um volume diferencial será formado, possuindo aproximadamente a forma de um paralelepípedo retângulo. Uma vez que u, v e w não precisam ser medidas de comprimento, como por exemplo as variáveis de ângulo dos sistemas de coordenadas cilíndricas e esféricas, cada uma deve ser multiplicada por uma função genérica de u, v e w para se obter os lados diferenciais do paralelepípedo. Com isso, definimos os fatores de escala h_1, h_2 e h_3, cada um como uma função das três variáveis u, v e w, e escrevemos os comprimentos dos lados do volume diferencial como

$$d_{L1} = h_1 du$$
$$d_{L2} = h_2 dv$$
$$d_{L3} = h_3 dw$$

Nos três sistemas de coordenadas discutidos no Capítulo 1, é perceptível que as variáveis e fatores de escala são

$$\begin{array}{llll} \text{Cartesianas:} & u = x & v = y & w = z \\ & h_1 = 1 & h_2 = 1 & h_3 = 1 \\ \text{Cilíndricas:} & u = \rho & v = \phi & w = z \\ & h_1 = 1 & h_2 = \rho & h_3 = 1 \\ \text{Esféricas:} & u = r & v = \theta & w = \phi \\ & h_1 = 1 & h_2 = r & h_3 = r \operatorname{sen} \theta \end{array} \qquad \text{(A.1)}$$

A escolha para u, v e w foi feita de forma que $\mathbf{a}_u \times \mathbf{a}_v = \mathbf{a}_w$ em todos os casos. Devem ser esperadas expressões mais complicadas para h_1, h_2 e h_3 em outros sistemas de coordenadas menos familiares.[1]

A.2 DIVERGENTE, GRADIENTE E ROTACIONAL EM COORDENADAS CURVILÍNEAS GENERALIZADAS

Se o método utilizado para desenvolver o divergente nas Seções 3.4 e 3.5 fosse aplicado para o sistema de coordenadas curvilíneas generalizadas, o fluxo do vetor **D** passando pela superfície do paralelepípedo cujo normal unitário é $\mathbf{a}_u$ seria

$$D_{u0} dL_2 dL_3 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(D_u dL_2 dL_3) du$$

ou

$$D_{u0} h_2 h_3 dv\, dw + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(D_u h_2 h_3 dv\, dw) du$$

e para a face oposta seria

$$-D_{u0} h_2 h_3 dv\, dw + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(D_u h_2 h_3 dv\, dw) du$$

resultando em um total, para essas duas faces, de

$$\frac{\partial}{\partial u}(D_u h_2 h_3 dv\, dw) du$$

Uma vez que u, v e w são variáveis independentes, essa última expressão pode ser escrita como

$$\frac{\partial}{\partial u}(h_2 h_3 D_u) du\, dv\, dw$$

e as outras duas expressões correspondentes podem ser obtidas por uma permutação simples dos subscritos e de u, v e w. Logo, o fluxo total que deixa o volume diferencial é

$$\left[\frac{\partial}{\partial u}(h_2 h_3 D_u) + \frac{\partial}{\partial v}(h_3 h_1 D_v) + \frac{\partial}{\partial w}(h_1 h_2 D_w)\right] du\, dv\, dw$$

e o divergente de **D** é encontrado dividindo-se pelo volume diferencial

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}(h_2 h_3 D_u) + \frac{\partial}{\partial v}(h_3 h_1 D_v) + \frac{\partial}{\partial w}(h_1 h_2 D_w)\right] \qquad \text{(A.2)}$$

Os componentes do gradiente de um escalar V podem ser obtidos (seguindo os métodos da Seção 4.6) expressando-se a diferencial total de V,

$$dV = \frac{\partial V}{\partial u} du + \frac{\partial V}{\partial v} dv + \frac{\partial V}{\partial w} dw$$

[1] As variáveis e os fatores de escala são dados para nove sistemas de coordenadas ortogonais nas páginas 50-59 em J.A. Straton, *Electromagnetic Theory*, New York: McGraw-Hill, 1941, onde também se descreve brevemente cada sistema.

pelos comprimentos diferenciais dos componentes, h_1du, h_2dv e h_3dw,

$$dV = \frac{1}{h_1}\frac{\partial V}{\partial u}h_1du + \frac{1}{h_2}\frac{\partial V}{\partial v}h_2dv + \frac{1}{h_3}\frac{\partial V}{\partial w}h_3dw$$

Deste modo, já que

$$d\mathbf{L} = h_1du\mathbf{a}_u + h_2dv\mathbf{a}_v + h_3dw\mathbf{a}_w \qquad \text{e} \qquad dV = \nabla V \cdot d\mathbf{L}$$

vemos que

$$\nabla V = \frac{1}{h_1}\frac{\partial V}{\partial u}\mathbf{a}_u + \frac{1}{h_2}\frac{\partial V}{\partial v}\mathbf{a}_v + \frac{1}{h_3}\frac{\partial V}{\partial w}\mathbf{a}_w \tag{A.3}$$

Os componentes do rotacional de um vetor **H** são obtidos ao se considerar um caminho diferencial, e depois em uma superfície $u =$ constante encontrando a circulação de **H** ao longo desse caminho, conforme discutido para coordenadas cartesianas na Seção 7.3. A contribuição ao longo do segmento na direção $\mathbf{a}_v$ é

$$H_{v0}h_2dv - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial w}(H_vh_2dv)dw$$

e aquela ao longo do segmento diretamente oposto é

$$-H_{v0}h_2dv - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial w}(H_vh_2dv)dw$$

A soma dessas duas partes é

$$-\frac{\partial}{\partial w}(H_vh_2dv)dw$$

ou

$$-\frac{\partial}{\partial w}(h_2H_v)dv\,dw$$

e a soma das contribuições dos outros dois lados do caminho é

$$\frac{\partial}{\partial v}(h_3H_w)dv\,dw$$

Somando-se esses dois termos e dividindo-se a soma pela área envolvida, $h_2h_3dv\,dw$, vemos que o componente em $\mathbf{a}_u$ do rotacional de **H** é

$$(\nabla \times \mathbf{H})_u = \frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial v}(h_3H_w) - \frac{\partial}{\partial w}(h_2H_v)\right]$$

e que os outros dois componentes podem ser obtidos por permutação cíclica. O resultado pode ser expresso mediante um determinante,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \dfrac{\mathbf{a}_u}{h_2h_3} & \dfrac{\mathbf{a}_v}{h_3h_1} & \dfrac{\mathbf{a}_w}{h_1h_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ h_1H_u & h_2H_v & h_3H_w \end{vmatrix} \tag{A.4}$$

O Laplaciano de um escalar é encontrado utilizando-se as Equações (A.2) e (A.3):

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial v}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial V}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial V}{\partial w}\right)\right] \tag{A.5}$$

As Equações (A.2) a (A.5) podem ser utilizadas para se encontrar o divergente, o gradiente, o rotacional e o Laplaciano em qualquer sistema de coordenadas ortogonais em que h_1, h_2 e h_3 forem conhecidos.

Expressões para $\nabla \cdot \mathbf{D}$, ∇V, $\nabla \times \mathbf{H}$ e $\nabla^2 V$ são dadas nos sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndricas circulares e esféricas na última página deste livro.

A.3 IDENTIDADES VETORIAIS

As identidades vetoriais a seguir podem ser provadas por expansão em coordenadas cartesianas (ou coordenadas curvilíneas genéricas). As duas primeiras identidades envolvem os produtos escalar e vetorial triplos, as três seguintes relacionam-se com operações de soma, as três logo após se aplicam a operações em que o argumento é multiplicado por uma função escalar, as próximas três se aplicam a operações em produtos escalares ou vetoriais e as quatro últimas relacionam-se às operações de segunda ordem.

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} \equiv (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} \equiv (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \tag{A.6}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \equiv (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \tag{A.7}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B} \tag{A.8}$$

$$\nabla(V + W) \equiv \nabla V + \nabla W \tag{A.9}$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \equiv \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B} \tag{A.10}$$

$$\nabla \cdot (V\mathbf{A}) \equiv \mathbf{A} \cdot \nabla V + V\nabla \cdot \mathbf{A} \tag{A.11}$$

$$\nabla(VW) \equiv V\nabla W + W\nabla V \tag{A.12}$$

$$\nabla \times (V\mathbf{A}) \equiv \nabla V \times \mathbf{A} + V\nabla \times \mathbf{A} \tag{A.13}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \equiv \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B} \tag{A.14}$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \equiv (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \tag{A.15}$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \equiv \mathbf{A}\nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B}\nabla \cdot \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} \tag{A.16}$$

$$\nabla \cdot \nabla V \equiv \nabla^2 V \tag{A.17}$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} \equiv 0 \tag{A.18}$$

$$\nabla \times \nabla V \equiv 0 \tag{A.19}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \equiv \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \tag{A.20}$$

APÊNDICE

B

Unidades

Inicialmente, iremos descrever o Sistema Internacional (abreviado como SI, de *Système International d'Unités*), utililzado neste livro e atualmente o sistema padrão na engenharia elétrica e em boa parte da física. Foi também oficialmente adotado como o sistema internacional de unidades por muitos países, incluindo os Estados Unidos.[1]

A unidade fundamental de comprimento é o metro, que foi definido na parte final do século XIX como a distância entre duas marcas em certa barra de platina-irídio. A definição foi aprimorada em 1960, ao relacionar o metro ao comprimento de onda da radiação emitida pelo gás isótopo raro criptônio-86 sob condições específicas. Este, chamado de metro criptônio, possuía precisamente quatro partes por bilhão, valor que leva a incertezas desprezíveis na construção de arranha-céus e de estradas, mas capaz de resultar em um erro maior que um metro na determinação da distância até a lua. O metro foi redefinido em 1983, agora considerando-se a velocidade da luz. Naquele tempo, a velocidade da luz foi especificada como uma constante auxiliar com valor *exato* de 299.792.458 metros por segundo. Como resultado, a última definição de metro é a distância de propagação da luz no vácuo em 1/299.792.458 de um segundo. Se uma maior exatidão for obtida na medição de c, esse valor permanecerá 299.792.458 m/s, mas o comprimento do metro mudará.

É evidente que nossa definição de metro é expressa em segundos, a unidade fundamental de tempo. O segundo é definido como 9.192.631.770 períodos da frequência de transição entre os níveis hiperfinos $F = 4$, $m_F = 0$ e $F = 3$, $m_F = 0$ do estado fundamental $^2s_{1/2}$ do átomo de césio-133, não influenciado por campos externos. Essa definição de segundo, complexa como deve ser, permite que o tempo seja medido com uma exatidão melhor que uma parte em 10^{13}.

A massa padrão de um quilograma é definida como a massa de um padrão internacional, representado por um um cilindro de platina-irídio no Departamento Internacional de Pesos e Medidas em Sèvres, França.

[1] O Sistema Internacional de Unidades foi adotado pela XI Conferência Geral de Pesos e Medidas em Paris em 1960, e foi oficialmente adotado para uso científico pelo *National Bureau of Standards* em 1964. É um sistema métrico que, de maneira bastante interessante, foi o único que recebeu sanção específica do Congresso norte-americano. Isso ocorreu pela primeira vez em 1966, e então novamente em 1975 com o *Metric Conversion Act*, que definiu uma "conversão voluntária" para o sistema métrico.

A unidade de temperatura é o kelvin; a temperatura do ponto triplo da água é considerada 273,16 kelvins.

Uma quinta unidade é a candela, definida como a intensidade luminosa de um radiador omnidirecional na temperatura de congelamento da platina (2.042 K) cuja área é 1/600.000 metros quadrados e está sob uma pressão de 101.325 newtons por metro quadrado.

A última das unidades fundamentais é o ampère. Antes de explicitamente definirmos o ampère, devemos primeiramente definir o newton. Ele é definido em função das outras unidades fundamentais por meio da terceira equação de Newton como a força necessária para produzir uma aceleração de um metro por segundo ao quadrado em uma massa de um quilograma. Podemos agora definir o ampère como a corrente constante, circulando em sentidos opostos em dois condutores retilíneos paralelos de comprimentos infinitos e de seções retas desprezíveis, separados por um metro no vácuo, que produz uma força repulsiva de 2×10^{-7} newtons entre os dois condutores por metro de comprimento. Sabe-se que a força entre os dois condutores paralelos vale

$$F = \mu_0 \frac{I^2}{2\pi d}$$

e assim

$$2 \times 10^{-7} = \mu_0 \frac{1}{2\pi}$$

ou

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \qquad (\text{kg} \cdot \text{m/A}^2 \cdot \text{s}^2\text{, ou H/m})$$

Assim, concluímos que nossa definição do ampère foi formulada de forma a associar um valor numérico exato e simples à permeabilidade do espaço livre.

Retornando ao Sistema Internacional, as unidades nas quais as outras grandezas elétricas e magnéticas são medidas são dadas no corpo do texto no momento em que cada grandeza é definida, e todas elas podem ser relacionadas às unidades básicas já definidas. Como exemplo, nosso trabalho com a onda plana no Capítulo 11 mostra que a velocidade na qual uma onda eletromagnética se propaga no espaço é

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

e assim

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = \frac{1}{4\pi 10^{-7} c^2} = 8{,}854\,187\,817 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

É evidente que o valor numérico de ϵ_0 depende do valor definido para a velocidade da luz no vácuo, 299.729.458 m/s.

As unidades são também dadas na Tabela B.1 para uma fácil consulta. Elas são listadas na mesma ordem em que são definidas no livro.

Tabela B.1 Nomes e unidades das grandezas elétricas e magnéticas no Sistema Internacional (na ordem em que aparecem no livro)

Símbolo	Nome	Unidade	Abreviação
ν	Velocidade	Metro/segundo	m/s
F	Força	Newton	N
Q	Carga	Coulomb	C
r, R	Distância	Metro	m
ϵ_0, ϵ	Permissividade	Farad/metro	F/m
E	Intensidade de campo elétrico	Volt/metro	V/m
ρ_ν	Densidade volumétrica de carga	Coulomb/metro^3	C/m^3
ν	Volume	Metro^3	m^3
ρ_L	Densidade linear de carga	Coulomb/metro	C/m
ρ_S	Densidade superficial de carga	Coulomb/metro^2	C/m^2
Ψ	Fluxo elétrico	Coulomb	C
D	Densidade de fluxo elétrico	Coulomb/metro^2	C/m^2
S	Área	Metro^2	m^2
W	Trabalho, energia	Joule	J
L	Comprimento	Metro	m
V	Potencial	Volt	V
p	Momento de dipolo	Coulomb-metro	C·m
I	Corrente	Ampère	A
J	Densidade de corrente	Ampère/metro^2	A/m^2
μ_e, μ_h	Mobilidade	Metro^2/volt-segundo	m^2/V·s
e	Carga elétrica	Coulomb	C
σ	Condutividade	Siemens/metro	S/m
R	Resistência	Ohm	Ω
P	Polarização	Coulomb/metro^2	C/m^2
$\chi_{e,m}$	Suscetibilidade		
C	Capacitância	Farad	F
R_s	Resistência superficial	Ohm por quadrado	Ω
H	Intensidade do campo magnético	Ampère/metro	A/m
K	Densidade superficial de corrente	Ampère/metro	A/m
B	Densidade de fluxo magnético	Tesla (ou weber/metro^2)	T (ou Wb/m^2)
μ_0, μ	Permeabilidade	Henry/metro	H/m
Φ	Fluxo magnético	Weber	Wb
V_m	Potencial escalar magnético	Ampère	A
A	Potencial vetor magnético	Weber/metro	Wb/m
T	Torque	Newton-metro	N·m
m	Momento magnético	Ampère-metro^2	A·m^2
M	Magnetização	Ampère/metro	A/m
$\mathcal{R}$	Relutância	Ampère-espira/weber	A·e/Wb
L	Indutância	Henry	H

(*continua*)

Tabela B.1 Nomes e unidades das grandezas elétricas e magnéticas no Sistema Internacional (na ordem em que aparecem no livro) (*continuação*)

Símbolo	Nome	Unidade	Abreviação
M	Indutância mútua	Henry	H
ω	Frequência angular	Radiano/segundo	rad/s
c	Velocidade da luz	Metro/segundo	m/s
λ	Comprimento de onda	Metro	m
η	Impedância intrínseca	Ohm	Ω
k	Número de onda	Metro^{-1}	m^{-1}
α	Constante de atenuação	Neper/metro	Np/m
β	Constante de defasamento	Radiano/metro	rad/m
f	Frequência	Hertz	Hz
S	Vetor de Poynting	Watt/metro^2	W/m^2
P	Potência	Watt	W
δ	Profundidade de penetração	Metro	m
Γ	Coeficiente de reflexão		
s	Taxa de onda estacionária		
γ	Constante de propagação	Metro^{-1}	m^{-1}
G	Condutância	Siemen	S
Z	Impedância	Ohm	Ω
Y	Admitância	Siemen	S
Q	Fator de qualidade		

Por fim, outros sistemas de unidades foram utilizados em eletricidade e magnetismo. No sistema eletrostático de unidades (esu*), a lei de Coulomb é escrita para o espaço livre,

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{R^2} \qquad \text{(esu)}$$

Um valor unitário é associado à permissividade do espaço livre. O grama e o centímetro são as unidades fundamentais de massa e distância, e com isso o sistema esu é um sistema cgs. As unidades que apresentam o prefixo *stat* pertencem ao sistema eletrostático de unidades.

De maneira semelhante, o sistema eletromagnético de unidades (emu**) é baseado na lei de Coulomb para polos magnéticos, e a permeabilidade do espaço livre é igual a uma unidade. O prefixo *ab-* identifica as unidades emu. Quando grandezas elétricas são expressas em unidades esu e grandezas magnéticas em unidades emu, e quando ambas aparecem na mesma equação (como as equações de rotacional de Maxwell), a velocidade da luz aparece explicitamente. Isso acontece notando-se que em esu $\epsilon_0 = 1$, mas $\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$ e, assim, $\mu_0 = 1/c^2$, e em emu $\mu_0 = 1$ e por isso $\epsilon_0 = 1/c^2$. Logo, no sistema misturado, conhecido como sistema Gaussiano de unidades,

* N. de T.: Em inglês: *eletrostatic system of units.*

** N. de T.: Em inglês: *eletromagnetic system of units.*

$$\nabla \times \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad \text{(Gaussiano)}$$

Outros sistemas incluem o fator 4π explicitamente na lei de Coulomb, e por isso ele não aparece nas equações de Maxwell. Quando isso é feito, diz-se que o sistema está racionalizado. Logo, o sistema Gaussiano é um sistema cgs* não racionalizado (quando racionalizado é conhecido como sistema de Heaviside-Lorentz), e o Sistema Internacional utilizado ao longo deste livro é um sistema mks** racionalizado.

Tabela B.2 Conversão das unidades Internacionais para unidades Gaussianas e outras unidades (considere $c = 2{,}997\ 924\ 58 \times 10^8$)

Grandeza	1 unidade mks	= Unidades gaussianas	= Outras unidades
d	1 m	10^2 cm	39,37 in.
F	1 N	10^5 dina	0,2248 lb_f
W	1 J	10^7 erg	0,7376 ft-lb_f
Q	1 C	$10c$ statC	0,1 abC
ρ_v	1 C/m^3	$10^{-5}\ c$ statC/cm^3	10^{-7} abC/cm^3
D	1 C/m^2	$4\pi\ 10^{-3}\ c$ (esu)	$4\pi 10^{-5}$ (emu)
E	1 V/m	$10^4/c$ statV/cm	10^6 abV/cm
V	1 V	$10^6/c$ statV	10^8 abV
I	1 A	0,1 abA	$10c$ statA
H	1 A/m	$4\pi\ 10^{-3}$ oersted	$0{,}4\pi\ c$ (esu)
V_m	1 A · e	$0{,}4\pi$ gilbert	$40\pi\ c$ (esu)
B	1 T	10^4 gauss	$100/c$ (esu)
Φ	1 Wb	10^8 maxwell	$10^6/c$ (esu)
A	1 Wb/m	10^6 maxwell/cm	
R	1 Ω	10^9 abΩ	$10^5/c^2$ statΩ
L	1 H	10^9 abH	$10^5/c^2$ statH
C	1 F	$10^{-5}\ c^2$ statF	10^{-9} abF
σ	1 S/m	10^{-11} abS/cm	$10^{-7}c^2$ statS/cm
μ	1 H/m	$10^7/4\pi$ (emu)	$10^3/4\pi c^2$ (esu)
ϵ	1 F/m	$4\pi\ 10^{-7}\ c^2$ (esu)	$4\pi 10^{-11}$ (emu)

A Tabela B.2 apresenta os fatores de conversão entre as unidades mais importantes do Sistema Internacional (ou sistema mks racionalizado) e o sistema Gaussiano, além de várias outras unidades.

A Tabela B.3 lista os prefixos utilizados em qualquer uma das unidades SI, suas abreviações e a potência de dez que cada uma representa. Aquelas marcadas são amplamente utilizadas. Tanto os prefixos quanto suas abreviações são escritos sem hífen, daí 10^{-6} F = 1 microfarad = 1 μF = 1.000 nanofarads = 1.000 nF, e assim por diante.

* N. de T.: c (centímetro), g (grama), s (segundo).

** N. de T.: m (metro), k (kilograma), s (segundo).

Tabela B.3 Prefixos padrões utilizados nas unidades do SI

Prefixo	Abreviação	Significado	Prefixo	Abreviação	Significado
ato-	a-	10^{-18}	deca-	da-	10^{1}
femto-	f-	10^{-15}	hecto-	h-	10^{2}
pico-	p-	10^{-12}	kilo-	k-	10^{3}
nano-	n-	10^{-9}	mega-	M-	10^{6}
micro-	μ-	10^{-6}	giga-	G-	10^{9}
mili-	m-	10^{-3}	tera-	T-	10^{12}
centi-	c-	10^{-2}	peta-	P-	10^{15}
deci-	d-	10^{-1}	exa-	E-	10^{18}

APÊNDICE

C

Constantes dos Materiais

A Tabela C.1 lista valores típicos da permissividade relativa ϵ_r' ou constante dielétrica para materiais isoladores e dielétricos comuns, juntamente com valores representativos para a tangente de perdas. Os valores devem ser considerados apenas como representativos para cada material, pois se aplicam para condições normais de temperatura e umidade e para frequências de áudio muito baixas. A maioria deles foi retirado do *Reference Data for Radio Engineers*,[1] *The Standard Handbook for Electrical Engineers*[2] e do livro de von Hippel, *Dieletric Materials and Applications*;[3] os livros aqui citados devem servir como referência para informações adicionais sobre esses e outros materiais.

A Tabela C.2 apresenta a condutividade para um certo número de condutores metálicos, para alguns materiais isolantes e para vários outros materiais de interesse geral. Os valores foram retirados das referências listadas anteriormente, e são aplicados a frequência zero e temperatura ambiente. A lista está na ordem decrescente de condutividade.

Alguns valores representativos da permeabilidade relativa para vários materiais diamagnéticos, paramagnéticos, ferrimagnéticos e ferromagnéticos são listados na Tabela C.3. Eles foram extraídos das referências listadas anteriormente, e os dados para os materiais ferromagnéticos são válidos apenas para densidades de fluxo magnético muito baixas. Permeabilidades máximas podem ser uma ordem de magnitude mais alta.

Valores são dados na Tabela C.4 para a carga e massa de repouso de um elétron, para a permissividade e a permeabilidade do espaço livre e para a velocidade da luz.[4]

[1] International Telephone and Telegraph Co., Inc.: *Reference Data for Radio Engineers*, 7th ed., Howard W. Sams & Co., Indianapolis, IN, 1985.

[2] Ver Referências do Capítulo 5.

[3] von Hippel, A.R. *Dielectric Materials and Applications*. Cambridge, Mass, and New York: The Technology Press of the Massachusetts Institute of Technology and John Wiley & Sons, 1954.

[4] Cohen, E.R., and B.N. Taylor. *The 1986 Adjustment of the Fundamental Physical Constants*. Elmsford, NY.: Pergamon Press, 1986.

Tabela C.1 Constante dielétrica (ϵ_r') e tangente de perdas (ϵ''/ϵ')

Material	ϵ_r'	ϵ''/ϵ'
Água (desidratada)	1	0
Água (destilada)	80	0,04
Água (do mar)		4
Álcool etílico	25	0,1
Âmbar	2,7	0,002
Ar	1,0005	
Baquelite	4,74	0,022
Borracha	2,5-3	0,002
Cloreto de sódio	5,9	0,0001
Dióxido de carbono	1,001	
Dióxido de titânio	100	0,0015
Esteatite	5,8	0,003
Ferrite (NiZn)	12,4	0,00025
Gelo	4,2	0,05
Germânio	16	
Madeira (seca)	1,5-4	0,01
Mica	5,4	0,0006
Neoprene	6,6	0,011
Neve	3,3	0,5
Nylon	3,5	0,02
Óxido de alumínio	8,8	0,0006
Papel	3	0,008
Plexiglas	3,45	0,03
Poliestireno	2,56	0,00005
Polietileno	2,26	0,0002
Polipropileno	2,25	0,0003
Porcelana (processo seco)	6	0,014
Pyranol	4,4	0,0005
Quartzo (fundido)	3,8	0,00075
Sílica ou SiO_2 (fundido)	3,8	0,00075
Silício	11,8	
Styrofoam	1,03	0,0001
Teflon	2,1	0,0003
Terra (seca)	2,8	0,05
Titanato de bário	1.200	0,013
Vidro	4-7	0,002
Vidro pirex	4	0,0006

Tabela C.2 Condutividade (σ)

Material	σ, S/m	Material	σ, S/m
Prata	$6{,}17 \times 10^7$	Nicromo	$0{,}1 \times 10^7$
Cobre	$5{,}80 \times 10^7$	Grafite	7×10^4
Ouro	$4{,}10 \times 10^7$	Silício	2.300
Alumínio	$3{,}82 \times 10^7$	Ferrite (típico)	100
Tungstênio	$1{,}82 \times 10^7$	Água (do mar)	5
Zinco	$1{,}67 \times 10^7$	Calcário	10^{-2}
Latão	$1{,}5 \times 10^7$	Argila	5×10^{-3}
Níquel	$1{,}45 \times 10^7$	Água (doce)	10^{-3}
Ferro	$1{,}03 \times 10^7$	Água (destilada)	10^{-4}
Bronze fosfórico	1×10^7	Terra (areia)	10^{-5}
Solda	$0{,}7 \times 10^7$	Granito	10^{-6}
Aço carbono	$0{,}6 \times 10^7$	Mármore	10^{-8}
Prata germânica	$0{,}3 \times 10^7$	Baquelite	10^{-9}
Manganês	$0{,}227 \times 10^7$	Porcelana (processo seco)	10^{-10}
Constantan	$0{,}226 \times 10^7$	Diamante	2×10^{-13}
Germânio	$0{,}22 \times 10^7$	Poliestireno	10^{-16}
Aço inoxidável	$0{,}11 \times 10^7$	Quartzo	10^{-17}

Tabela C.3 Permeabilidade relativa (μ_r)

Material	μ_r	Material	μ_r
Bismuto	0,9999986	Limalha de ferro	100
Parafina	0,99999942	Aço de máquina	300
Madeira	0,9999995	Ferrite (típico)	1.000
Prata	0,99999981	Liga 45	2.500
Alumínio	1,00000065	Ferro de transformador	3.000
Berílio	1,00000079	Ferro sílico	3.500
Cloreto de níquel	1,00004	Ferro (puro)	4.000
Sulfato de manganês	1,0001	*Mumetal*	20.000
Níquel	50	*Sendust*	30.000
Ferro fundido	60	Superliga	100.000
Cobalto	60		

Tabela C.4 Constantes físicas

Grandeza	Valor
Carga do elétron	$e = (1{,}60217733 \pm 0{,}00000046) \times 10^{-19}$ C
Massa do elétron	$m = (9{,}1093897 \pm 0{,}0000054) \times 10^{-31}$ kg
Permissividade do espaço livre	$\epsilon_0 = 8{,}854\ 187\ 817 \times 10^{-12}$ F/m
Permeabilidade do espaço livre	$\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ H/m
Velocidade da luz	$c = 2{,}99792458 \times 10^8$ m/s

APÊNDICE

D

Teorema da Unicidade

Vamos supor que temos duas soluções para a equação de Laplace, V_1 e V_2, ambas funções genéricas das coordenadas utilizadas. Com isso

$$\nabla^2 V_1 = 0$$

e

$$\nabla^2 V_2 = 0$$

da qual

$$\nabla^2 (V_1 - V_2) = 0$$

Cada solução deve também satisfazer as condições de fronteira, e se representarmos os valores de potencial dados nas fronteiras por V_b, então o valor de V_1 na fronteira V_{1b} e o valor de V_2 na fronteira V_{2b} devem ambos ser idênticos a V_b,

$$V_{1b} = V_{2b} = V_b$$

ou

$$V_{1b} - V_{2b} = 0$$

Na Seção 4.8, Equação (43), fizemos uso de uma identidade vetorial,

$$\nabla \cdot (V\mathbf{D}) \equiv V(\nabla \cdot \mathbf{D}) + \mathbf{D} \cdot (\nabla V)$$

a qual vale para qualquer escalar V e qualquer vetor $\mathbf{D}$. Para a presente aplicação, vamos selecionar $V_1 - V_2$ como o escalar e $\nabla(V_1 - V_2)$ como o vetor, resultando em

$$\nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)] \equiv (V_1 - V_2)[\nabla \cdot \nabla(V_1 - V_2)]$$
$$+ \nabla(V_1 - V_2) \cdot \nabla(V_1 - V_2)$$

o qual vamos integrar no volume *limitado* pelas superfícies de fronteira especificadas

$$\int_{vol} \nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)]\, dv$$
$$\equiv \int_{vol} (V_1 - V_2)[\nabla \cdot \nabla(V_1 - V_2)]\, dv + \int_{vol} [\nabla(V_1 - V_2)]^2\, dv \qquad \text{(D.1)}$$

O teorema da divergência nos permite substituir a integral volumétrica no lado esquerdo da equação pela integral de superfície fechada calculada na superfície que encerra o volume. Essa superfície consiste nas fronteiras já especificadas, nas quais $V_{1b} = V_{2b}$, e assim

$$\int_{\text{vol}} \nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)]\, dv = \oint_S [(V_{1b} - V_{2b})\nabla(V_{1b} - V_{2b})] \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Um dos fatores da primeira integral no lado direito da Equação (D.1) é $\nabla \cdot \nabla (V_1 - V_2)$, ou $\nabla^2(V_1 - V_2)$, que é zero por hipótese; portanto, essa integral é zero. Logo, a integral volumétrica restante deve ser zero:

$$\int_{\text{vol}} [\nabla(V_1 - V_2)]^2\, dv = 0$$

Existem duas razões pelas quais uma integral pode ser zero: ou o integrando (a quantidade dentro do sinal de integração) é zero em todos os pontos, ou o integrando é positivo em algumas regiões e negativo em outras, e as contribuições se cancelam algebricamente. Neste caso, a primeira razão deve ser válida porque $[\nabla(V_1 - V_2)]^2$ não pode ser negativo. Com isso

$$[\nabla(V_1 - V_2)]^2 = 0$$

e

$$\nabla(V_1 - V_2) = 0$$

Finalmente, se o gradiente de $V_1 - V_2$ é zero em todos os pontos, então $V_1 - V_2$ não pode mudar com nenhuma das coordenadas, e

$$V_1 - V_2 = \text{constante}$$

Se pudermos mostrar que essa constante é zero, teremos atingido o nosso objetivo. A constante é facilmente calculada considerando um ponto na fronteira. Aqui, $V_1 - V_2 = V_{1b} - V_{2b} = 0$, e vemos que a constante é realmente zero; com isso,

$$V_1 = V_2$$

resultando em duas soluções idênticas.

O teorema da unicidade também se aplica à equação de Poisson, pois se $\nabla^2 V_1 = -\rho_v/\epsilon$ e $\nabla^2 V_2 = -\rho_v/\epsilon$, então $\nabla^2(V_1 - V_2) = 0$, conforme a situação anterior. As condições de fronteira ainda requerem que $V_{1b} - V_{2b} = 0$, e o procedimento é idêntico a partir desse ponto.

Feitas as constatações anteriores, pode-se provar o teorema da unicidade. Visto como a resposta para a pergunta "Como se comparam duas soluções das esquações de Laplace ou de Poisson se ambas satisfazem as mesmas condições de fronteira?", o teorema da unicidade nos dá a certeza de que as respostas são idênticas. Uma vez que podemos encontrar qualquer método para resolver as equações de Laplace ou Poisson sujeitas a determinadas condições de fronteira, teremos resolvido nosso problema de uma vez por todas. Nenhum outro método pode fornecer uma resposta diferente.

APÊNDICE

E

Origens da Permissividade Complexa

Conforme aprendemos no Capítulo 5, um dielétrico pode ser modelado como um arranjo de átomos e moléculas no espaço livre, que podem ser polarizados por um campo elétrico. O campo obriga as cargas ligadas positivas e negativas a se separarem em oposição às suas forças de Coulomb de atração, produzindo assim uma cadeia de dipolos microscópicos. As moléculas podem se arranjar de uma maneira ordenada e previsível (tal como em um cristal) ou podem exibir posicionamento e orientação aleatórios, como aconteceria em materiais amorfos ou líquidos. As moléculas podem ou não exibir momentos de dipolo permanentes (existentes antes de o campo ser aplicado) e, se exibirem normalmente apresentarão orientação aleatória ao longo do volume do material. Como discutido na Seção 5.7, o deslocamento de cargas de uma maneira regular (induzido por um campo elétrico, por exemplo), gera uma polarização macroscópica, **P**, definida como o momento de dipolo por unidade de volume:

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{N\Delta v} \mathbf{p_i} \tag{E.1}$$

onde N é o número de dipolos por unidade de volume e $\mathbf{p_i}$ é o momento de dipolo do i-ésimo átomo ou molécula, encontrado por

$$\mathbf{p_i} = Q_i \mathbf{d}_i \tag{E.2}$$

Q_i é a carga positiva das duas cargas ligadas que compõem o dipolo i, e $\mathbf{d}_i$ é a distância entre as cargas, expressa como um vetor que se desloca da carga negativa para a positiva. Novamente, consultando a Seção 5.7, o campo elétrico e a polarização estão relacionados por

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \tag{E.3}$$

onde a suscetibilidade elétrica, χ_e, forma a parte mais interessante da constante dielétrica:

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e \tag{E.4}$$

Logo, para entender a natureza de ϵ_r, precisamos entender χ_e, e para isso será necessário explorar o comportamento da polarização **P**.

Neste caso, consideramos ainda as complicações adicionais acarretadas pela maneira como os dipolos respondem a um campo harmônico no tempo que se propaga como uma onda pelo material. O resultado de se aplicar uma função forçante desse tipo é o surgimento de momentos de dipolos *oscilatórios*, os quais *estabelecem uma onda de polarização que se propaga pelo material*. O efeito é produzir uma função de polarização, $\mathbf{P}(z, t)$, com a mesma forma funcional do campo alimentado $\mathbf{E}(z, t)$. As moléculas propriamente ditas não se movem pelo material, mas seus momentos de dipolos oscilatórios coletivamente exibem um movimento de onda, assim como ondas em uma piscina de água são formadas pela movimentação para cima e para baixo da água. A partir deste ponto, a descrição do processo se torna complicada e, em muitos aspectos, além do escopo da nossa discussão atual. Contudo, podemos formar um entendimento qualitativo básico pela consideração da descrição clássica do processo, segundo a qual os dipolos, uma vez oscilando, comportam-se como antenas microscópicas, reirradiando campos que se propagam conjuntamente com o campo aplicado. Dependendo da frequência, haverá algum defasamento entre o campo incidente e o campo radiado em uma dada localização de dipolo. Isso causa um campo resultante (formado pela superposição dos dois) que agora interage com o próximo dipolo. A radiação a partir desse dipolo se soma ao campo anterior como antes, e o processo se repete de dipolo para dipolo. Os defasamentos acumulados em cada posição são manifestados como uma diminuição equivalente da velocidade de fase da onda resultante. A atenuação do campo também pode ocorrer, a qual, no modelo clássico, pode ser levada em conta pelo cancelamento parcial de fases entre os campos incidente e radiado.

Na nossa descrição clássica, usamos o modelo de Lorentz, no qual o meio é considerado um conjunto de osciladores de elétrons fixos idênticos no espaço livre. As forças de ligação de Coulomb nos elétrons são modeladas por molas que fixam os elétrons aos núcleos positivos. Consideramos os elétrons por simplicidade, mas modelos similares podem ser utilizados para qualquer partícula de carga ligada. A Figura E.1 mostra um oscilador único, localizado na posição z no material, e orientado ao longo de x. Uma onda plana uniforme, considerada linearmente polarizada ao longo de x, se propaga pelo material na direção z. O campo elétrico na onda desloca o elétron do oscilador na direção x pela distância representada pelo vetor $\mathbf{d}$, e então um momento de dipolo é estabelecido,

$$\mathbf{p}(z, t) = -e\mathbf{d}(z, t) \tag{E.5}$$

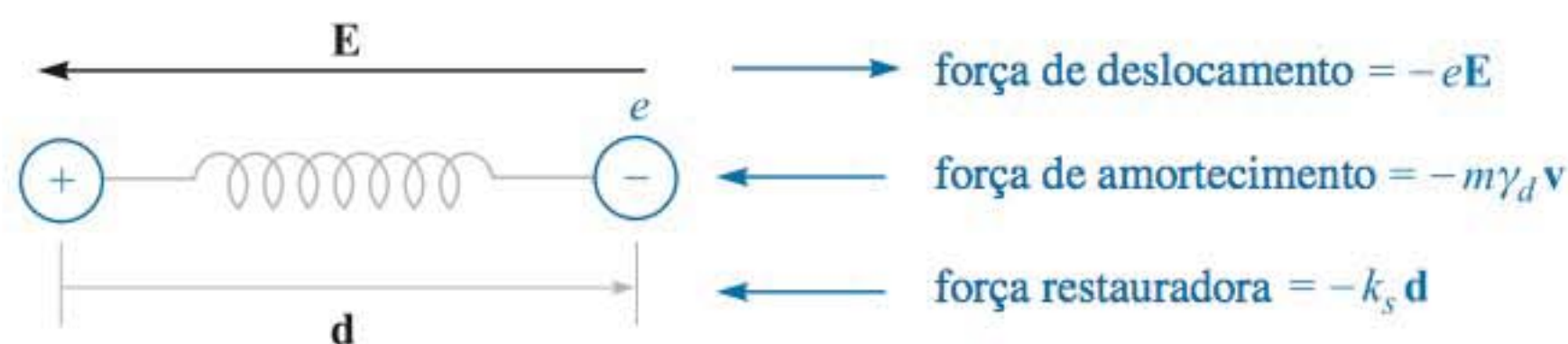



Figura E.1 Modelo do dipolo atômico, com forças de Coulomb entre cargas positivas e negativas modeladas como aquelas de uma mola que tem constante elástica k_s. Um campo elétrico aplicado desloca o elétron por uma distância d, resultando em um momento de dipolo $\mathbf{p} = -e\mathbf{d}$.

onde a carga do elétron, e, é tratada como uma grandeza positiva. A força aplicada é

$$\mathbf{F}_a(z, t) = -e\mathbf{E}(z, t) \tag{E.6}$$

Precisamos nos lembrar que $\mathbf{E}(z, t)$ em uma dada localização do oscilador é o campo *resultante*, composto do campo original aplicado mais os campos radiados de todos os outros osciladores. O defasamento relativo entre os osciladores é determinado precisamente pelo comportamento espacial e temporal de $\mathbf{E}(z, t)$.

A força restauradora no elétron, $\mathbf{F}_r$, é aquela produzida pela mola, a qual considera-se que obedece a lei de Hooke:

$$\mathbf{F}_r(z, t) = -k_s\mathbf{d}(z, t) \tag{E.7}$$

onde k_s é a constante de elasticidade da mola (não confundir com a constante de propagação). Se o campo é desligado, o elétron é solto e oscilará em torno do núcleo na *frequência de ressonância*, dada por

$$\omega_0 = \sqrt{k_s/m} \tag{E.8}$$

onde m é a massa da elétron. A oscilação, entretanto, será amortecida porque o elétron experimentará forças e colisões dos osciladores vizinhos. Modelamos isso como um amortecimento dependente da velocidade:

$$\mathbf{F}_d(z, t) = -m\gamma_d\mathbf{v}(z, t) \tag{E.9}$$

onde $\mathbf{v}(z, t)$ é a velocidade do elétron. Associado a esse amortecimento está o processo de *defasagem* entre os osciladores eletrônicos no sistema. O defasamento relativo deles, uma vez fixado pelo campo senoidal aplicado, é destruído pelas colisões e diminui exponencialmente até que um estado de aleatoriedade completa para a fase exista entre os osciladores. O ponto $1/e$ nesse processo ocorre no *tempo de defasagem* do sistema, que é inversamente proporcional ao coeficiente de amortecimento, γ_d (na verdade vale $2/\gamma_d$). Estamos, na verdade, alimentando esse sistema ressonante amortecido com um campo elétrico de frequência ω. Assim, podemos esperar que a resposta dos osciladores, medida pela amplitude de $\mathbf{d}$, seja dependente da frequência de maneira muito parecida com o circuito RLC quando alimentado por uma fonte senoidal.

Podemos agora usar a segunda lei de Newton para escrever as forças que atuam no oscilador único da Figura E.1. Para simplificar um pouco o processo, podemos usar a forma complexa do campo elétrico:

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E}_0 e^{-jkz} e^{j\omega t} \tag{E.10}$$

Definindo $\mathbf{a}$ como o vetor de aceleração do elétron, temos

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_r + \mathbf{F}_d$$

ou

$$m\frac{\partial^2\mathbf{d}_c}{\partial t^2} + m\gamma_d\frac{\partial\mathbf{d}_c}{\partial t} + k_s\mathbf{d}_c = -e\mathbf{E}_c \tag{E.11}$$

Uma vez que estamos alimentando um sistema com o campo complexo $\mathbf{E}_c$, antecipamos uma onda de deslocamento $\mathbf{d}_c$, cuja forma é

$$\mathbf{d}_c = \mathbf{d}_0 e^{-jkz} e^{-j\omega t} \tag{E.12}$$

Com as ondas nessa forma, a diferenciação no tempo produz um fator de $j\omega$. Consequentemente, a Equação (E.11) pode ser simplificada e reescrita na forma fasorial:

$$-\omega^2\mathbf{d}_s + j\omega\gamma_d\mathbf{d}_s + \omega_0^2\mathbf{d}_s = -\frac{e}{m}\mathbf{E}_s \tag{E.13}$$

na qual utilizou-se a Equação (E.4). Resolveremos agora a Equação (E.13) para $\mathbf{d}_s$, obtendo

$$\mathbf{d}_s = \frac{-(e/m)\mathbf{E}_s}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + j\omega\gamma_d} \tag{E.14}$$

O momento de dipolo associado com o deslocamento $\mathbf{d}_s$ é

$$\mathbf{p}_s = -e\mathbf{d}_s \tag{E.15}$$

A polarização do meio é então encontrada, considerando todos os dipolos idênticos. A Equação (E.1) então se torna

$$\mathbf{P}_s = N\mathbf{p}_s$$

a qual, utilizando as Equações (E.14) e (E.15), se torna

$$\mathbf{P}_s = \frac{Ne^2/m}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + j\omega\gamma_d}\mathbf{E}_s \tag{E.16}$$

Agora, usando a Equação (E.3) identificamos a suscetibilidade associada com a ressonância como

$$\chi_{\text{ressonância}} = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}\frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + j\omega\gamma_d} = \chi'_{\text{ressonância}} - j\chi''_{\text{ressonância}} \tag{E.17}$$

As partes real e imaginária da permissividade são agora encontradas pelas partes real e imaginária de $\chi_{\text{ressonância}}$, sabendo-se que

$$\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_{\text{ressonância}}) = \epsilon' - j\epsilon''$$

encontramos

$$\epsilon' = \epsilon_0(1 + \chi'_{\text{ressonância}}) \tag{E.18}$$

e

$$\epsilon'' = \epsilon_0\chi''_{\text{ressonância}} \tag{E.19}$$

As expressões anteriores podem agora ser utilizadas nas Equações (44) e (45) do Capítulo 11 para calcular o coeficiente de atenuação, α, e a constante de defasamento, β, para a onda plana à medida que se propaga pelo nosso meio ressonante.

As partes real e imaginária de $\chi_{\text{ressonância}}$ como funções da frequência são mostradas na Figura E.2 para o caso especial no qual $\omega \doteq \omega_0$. A Equação (E.17) nesse caso se torna

$$\chi_{\text{ressonância}} \doteq -\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m\omega_0\gamma_d}\left(\frac{j + \delta_n}{1 + \delta_n^2}\right) \tag{E.20}$$

onde o parâmetro *desafinador normalizado*, δ_n, vale

$$\frac{2}{\gamma_d}(\omega - \omega_0) \tag{E.21}$$

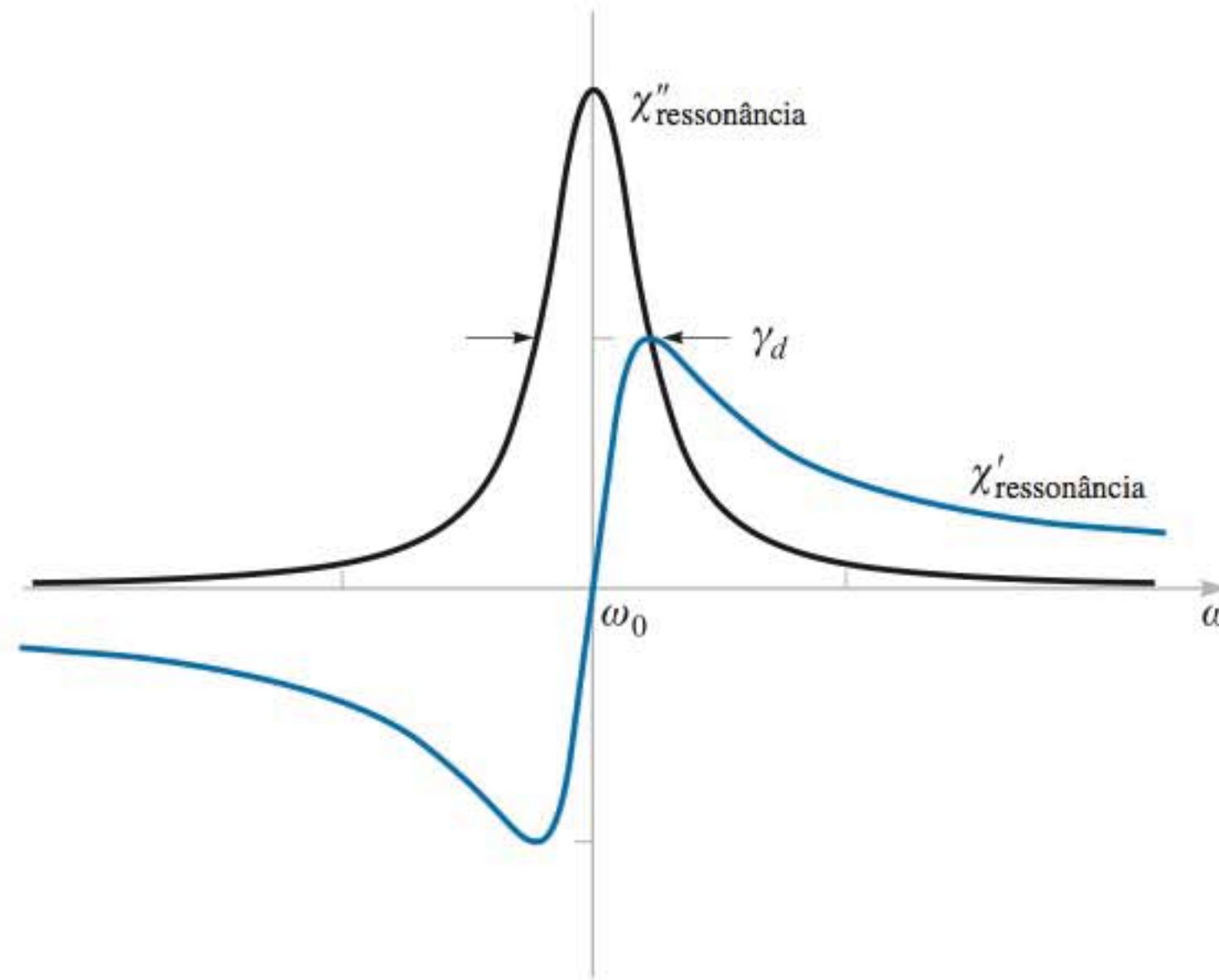



Figura E.2 Gráfico das partes real e imaginária da suscetibilidade ressonante $\chi_{\text{ressonância}}$, conforme dado pela Equação (E.20). A largura total a meio máximo da parte imaginária, $\chi''_{\text{ressonância}}$, é igual ao coeficiente de amortecimento γ_d.

Entre as características principais que devem ser notadas na Figura E.2, temos a função simétrica χ''_e, cuja largura total está a meia amplitude máxima de γ_d. Perto da frequência de ressonância, onde $\chi''_{\text{ressonância}}$ se torna máximo, a atenuação da onda se torna máxima conforme visto pela Equação (44), Capítulo 11. Além disso, vemos que longe da ressonância a atenuação é relativamente fraca, e o material se torna transparente. Conforme mostra a Figura E.2, existe ainda uma variação significativa de $\chi'_{\text{ressonância}}$ com a frequência longe da ressonância, o que leva a um índice de refração dependente da frequência. Isso é expresso aproximadamente por

$$n \doteq \sqrt{1 + \chi'_{\text{ressonância}}} \qquad \text{(longe da ressonância)} \qquad \text{(E.22)}$$

Esse n dependente da frequência, que se origina da ressonância do material, leva a velocidades de fase e de grupo que também dependem da frequência. Logo, a dispersão de grupo, que leva aos efeitos de alargamento de pulso, conforme foi discutido no Capítulo 12, pode ser diretamente atribuída às ressonâncias no material.

De forma surpreendente, o clássico "modelo da mola" aqui descrito pode fornecer previsões bastante exatas sobre o comportamento da constante dielétrica com a frequência (particularmente fora da ressonância) e pode ser utilizado – até certo ponto – para modelar as propriedades de absorção. Contudo, o modelo mostra-se insuficiente quando se tenta a partir dele descrever as características mais salientes dos materiais. Especificamente, ele considera que o elétron oscilante pode assumir qualquer valor contínuo de estado de energia, quando na verdade os estados de energia em qualquer sistema atômico são quantizados. Como resultado, os efeitos importantes decorrentes das transições entre níveis discretos de energia, como a absorção e emissão espontânea e estimulada, não estão incluídos no nosso sistema de mola clássico. Modelos de mecânica quântica devem ser utilizados para descrever completamente as propriedades de polarização, mas os resultados desses estudos frequentemente se reduzem aos resultados do modelo da mola quando as amplitudes de campo são muito baixas.

(a) (b)

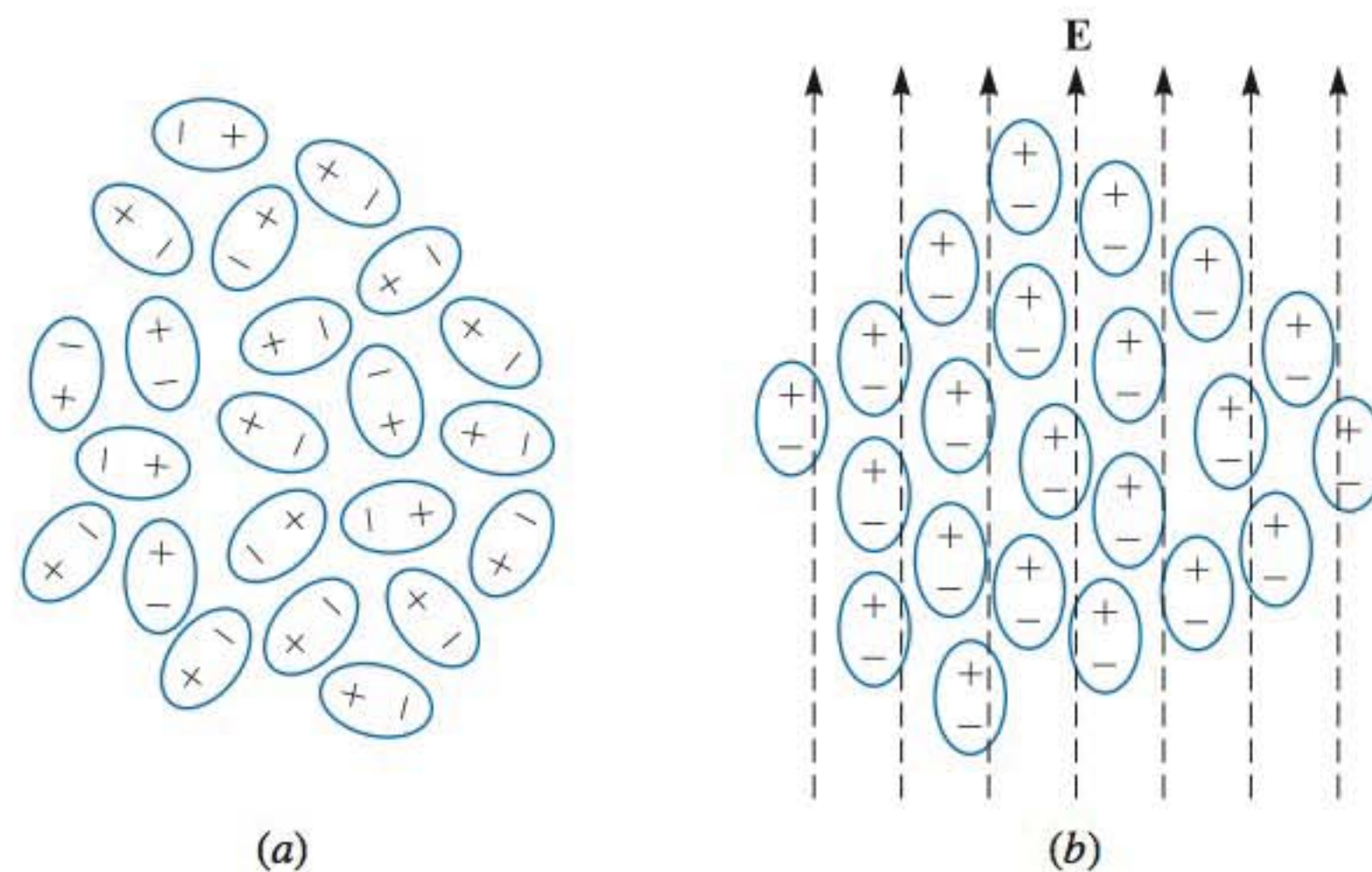



Figura E.3 Esboços idealizados de conjuntos de moléculas polares sob condições de (*a*) orientação aleatória dos momentos de dipolos, e (*b*) momentos de dipolo alinhados sob a influência de um campo elétrico aplicado. As condições em (*b*) estão bastante exageradas, já que tipicamente apenas uma pequena porcentagem dos dipolos elétricos se alinha com o campo. Mas ainda assim um alinhamento suficiente ocorre de forma a produzir mudanças mensuráveis nas propriedades do material.

Outra maneira pela qual um dielétrico pode responder a um campo elétrico é por meio da orientação de moléculas que possuem momentos de dipolo permanentes. Nesses casos, as moléculas devem estar livres para se movimentarem ou girar e, assim, o material será tipicamente um líquido ou um gás. A Figura E.3 mostra um arranjo de moléculas polares em um líquido (tal como a água) no qual não há campo aplicado (Figura E.3*a*) e onde um campo elétrico está presente (Figura E.3*b*). A aplicação do campo faz com que os momentos de dipolo, que antes tinham orientações aleatórias, se alinhem, o que resultará na polarização equivalente no material, **P**. Associada a essa, é claro, está uma função para a suscetibilidade, χ_e, por meio da qual **P** se relaciona a **E**.

Alguns desenvolvimentos interessantes ocorrem quando o campo aplicado é harmônico no tempo. Com o campo periodicamente invertendo o sentido, os dipolos são forçados a segui-lo, contra suas propensões naturais de tomarem direções aleatórias, causando movimentação térmica. A movimentação térmica age, então, como uma força "restauradora", efetivamente se opondo ao campo aplicado. Podemos também pensar nos efeitos térmicos como forças viscosas que introduzem alguma dificuldade para "empurrar" os dipolos para a frente e para trás. Poder-se-ia esperar (corretamente) que as polarizações de maiores amplitudes em cada sentido podem ser obtidas em frequências mais baixas, já que um tempo suficiente é dado durante cada ciclo para que os dipolos atinjam um alinhamento completo. A amplitude de polarização se enfraquecerá com o aumento da frequência porque não existirá um tempo longo o suficiente para completar o alinhamento em cada ciclo. Essa é a descrição básica do mecanismo de *relaxamento do dipolo* para a permissividade complexa. Não existe frequência de ressonância associada a esse processo.

A suscetibilidade complexa associada ao relaxamento do dipolo é essencialmente aquela de um oscilador "superamortecido", e é dada por

$$\chi_{\text{relaxamento}} = \frac{Np^2/\epsilon_0}{3k_B T(1 + j\omega\tau)} \tag{E.23}$$

onde p é a amplitude do momento de dipolo permanente de cada molécula, k_B é a constante de Boltzmann e T é a temperatura em graus kelvin. O termo τ é o tempo térmico aleatório, definido como o tempo para que a polarização **P** relaxe para $1/e$ de seu valor original quando o campo é desligado. Na Equação, $\chi_{\text{relaxamento}}$ é complexo e, assim, possuirá componentes de absorção e de dispersão (partes imaginária e real) conforme encontramos no caso ressonante. A forma da Equação (E.23) é idêntica àquela da resposta de um circuito RC série alimentado por uma tensão senoidal (onde τ se torna RC).

A absorção de micro-ondas na água ocorre pelo mecanismo de relaxamento em moléculas polares de água, e é o meio primário pelo qual se cozinha com micro-ondas, conforme discutido no Capítulo 11. Frequências perto de 2,5 GHz são tipicamente utilizadas, já que elas proporcionam uma profundidade de penetração ótima. Entretanto, o pico de absorção na água gerado pelo relaxamento do dipolo ocorre em frequências muito mais altas.

Um dado material pode possuir mais que uma ressonância e ter respostas de relaxamento do dipolo da mesma maneira. Nesses casos, a suscetibilidade resultante é encontrada no domínio da frequência pela soma direta de todos os componentes de suscetibilidade. Em geral, podemos escrever:

$$\chi_e = \chi_{\text{relaxamento}} + \sum_{i=1}^{n} \chi^i_{\text{ressonância}} \tag{E.24}$$

onde $\chi^i_{\text{ressonância}}$ é a suscetibilidade associada com a i-ésima frequência ressonante, e n é o número de ressonâncias no material. Sugere-se ao leitor as Referências do Capítulo 11 para uma leitura adicional sobre os efeitos de ressonância e de relaxamento em dielétricos.

APÊNDICE

F

Respostas dos Problemas Ímpares

Capítulo 1

1.1 (*a*) $0{,}92\mathbf{a}_x + 0{,}36\mathbf{a}_y + 0{,}4\mathbf{a}_z$
(*b*) 48,6 (*c*) $-580{,}5\mathbf{a}_x + 3.193\mathbf{a}_y - 2.902\mathbf{a}_z$

1.3 (7,8, −7,8, 3,9)

1.5 (*a*) $48\mathbf{a}_x + 36\mathbf{a}_y + 18\mathbf{a}_z$
(*b*) $-0{,}26\mathbf{a}_x + 0{,}39\mathbf{a}_y + 0{,}88\mathbf{a}_z$
(*c*) $0{,}59\mathbf{a}_x + 0{,}20\mathbf{a}_y - 0{,}78\mathbf{a}_z$
(*d*) $100 = 16x^2 y^2 + 4x^4 + 16x^2 + 16 + 9z^4$

1.7 (*a*) (1) O plano $z = 0$, com $|x| < 2$, $|y| < 2$; (2) o plano $y = 0$ com $|x| < 2$, $|z| < 2$; (3) o plano $x = 0$ com $|y| < 2$, $|z| < 2$; (4) o plano $x = \pi/2$ com $|y| < 2$, $|z| < 2$
(*b*) O plano $2z = y$ com $|x| < 2$, $|y| < 2$, $|z| < 1$
(*c*) O plano $y = 0$ com $|x| < 2$, $|z| < 2$

1.9 (*a*) $0{,}6\mathbf{a}_x + 0{,}8\mathbf{a}_y$ (*b*) 53° (*c*) 26

1.11 (*a*) (−0,3, 0,3, 0,4) (*b*) 0,05 (*c*) 0,12 (*d*) 78°

1.13 (*a*) (0,93, 1,86, 2,79) (*b*) (9,07, −7,86, 2,21)
(*c*) (0,02, 0,25, 0,26)

1.15 (*a*) (0,08, 0,41, 0,91) (*b*) (0,29, 0,78, 0,56)
(*c*) 30,3 (*d*) 33,3

1.17 (*a*) (0,664, −0,379, 0,645)
(*b*) (−0,550, 0,832, 0,077)
(*c*) (0,168, 0,915, 0,367)

1.19 (*a*) $(1/\rho)\mathbf{a}_\rho$ (*b*) $0{,}5\mathbf{a}_\rho$, ou $0{,}41\mathbf{a}_x + 0{,}29\mathbf{a}_y$

1.21 (*a*) $-6{,}66\mathbf{a}_\rho - 2{,}77\mathbf{a}_\phi + 9\mathbf{a}_z$
(*b*) $-0{,}59\mathbf{a}_\rho + 0{,}21\mathbf{a}_\phi - 0{,}78\mathbf{a}_z$
(*c*) $-0{,}90\mathbf{a}_\rho - 0{,}44\mathbf{a}_z$

1.23 (*a*) 6,28 (*b*) 20,7 (*c*) 22,4 (*d*) 3,21

1.25 (*a*) $1{,}10\mathbf{a}_r + 2{,}21\mathbf{a}_\phi$
(*b*) 2,47 (*c*) $0{,}45\mathbf{a}_r + 0{,}89\mathbf{a}_\phi$

1.27 (*a*) 2,91 (*b*) 12,61 (*c*) 17,49 (*d*) 2,53

1.29 (*a*) $0{,}59\mathbf{a}_r + 0{,}38\mathbf{a}_\theta - 0{,}72\mathbf{a}_\phi$
(*b*) $0{,}80\mathbf{a}_r - 0{,}22\mathbf{a}_\theta - 0{,}55\mathbf{a}_\phi$
(*c*) $0{,}66\mathbf{a}_r + 0{,}39\mathbf{a}_\theta - 0{,}64\mathbf{a}_\phi$

Capítulo 2

2.1 $(10/\sqrt{6}, -10/\sqrt{6})$

2.3 $21{,}5\mathbf{a}_x$ μN

2.5 (*a*) $4{,}58\mathbf{a}_x - 0{,}15\mathbf{a}_y + 5{,}51\mathbf{a}_z$
(*b*) −6,89 ou −22,11

2.7 $159{,}7\mathbf{a}_\rho + 27{,}4\mathbf{a}_\phi - 49{,}4\mathbf{a}_z$

2.9 (*a*) $(x + 1) = 0{,}56[(x + 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2]^{1,5}$
(*b*) 1,69 ou 0,31

2.11 (*a*) −1,63 μC
(*b*) $-30{,}11\mathbf{a}_x - 180{,}63\mathbf{a}_y - 150{,}53\mathbf{a}_z$
(*c*) $-183{,}12\mathbf{a}_\rho - 150{,}53\mathbf{a}_z$ (*d*) −237,1

2.13 (*a*) 82,1 pC (*b*) 4,24 cm

2.15 (*a*) 3,35 pC (*b*) 124 μC/m³

2.17 (*a*) $57{,}5\mathbf{a}_y - 28{,}8\mathbf{a}_z$ V/m (*b*) $23\mathbf{a}_y - 46\mathbf{a}_z$

2.19 (*a*) $7{,}2\mathbf{a}_x + 14{,}4\mathbf{a}_y$ kV/m
(*b*) $4{,}9\mathbf{a}_x + 9{,}8\mathbf{a}_y + 4{,}9\mathbf{a}_z$ kV/m

2.21 $126\mathbf{a}_y$ μN/m

2.23 (*a*) 8,1 kV/m (*b*) −8,1 kV/m

2.25 $-3{,}9\mathbf{a}_x - 12{,}4\mathbf{a}_y - 2{,}5\mathbf{a}_z$ V/m

2.27 (*a*) $y^2 - x^2 = 4xy - 19$ (*b*) $0{,}99\mathbf{a}_x + 0{,}12\mathbf{a}_y$

2.29 (*a*) 12,2 (*b*) $-0{,}87\mathbf{a}_x - 0{,}50\mathbf{a}_y$
(*c*) $y = (1/5)\ln\cos 5x + 0{,}13$

Capítulo 3

3.1 (*a*) $\bar{F} = [Q_1 Q_2/4\pi\epsilon_0 R^2]$ ao longo de $\mathbf{a}_r$
(*b*) Mesma da parte (*a*)
(*c*) 0
(*d*) A força irá se tornar atrativa.

3.3 (*a*) 0,25 nC (*b*) 9,45 pC

3.5 360 nC

3.7 (*a*) $4{,}0 \times 10^{-9}$ nC (*b*) $3{,}2 \times 10^{-4}$ nC/m^2

3.9 (*a*) 164 pC (*b*) 130 nC/m^2 (*c*) 32,5 nC/m^2

3.11 $\mathbf{D} = 0$ ($\rho <$ 1mm); $D_\rho = \frac{10^{-15}}{2\pi^2\rho}$ [sen (2.000$\pi\rho$) + 2π[1 $-10^3\rho$ cos (2.000$\pi\rho$)]]C/m^2 (1 mm $< \rho <$ 1,5 mm); $D_\rho = \frac{2{,}5\times 10^{-15}}{\pi\rho}$ C/m^2 ($\rho >$ 1,5 mm)

3.13 (*a*) $D_r(r < 2) = 0$; $D_r(r = 3) = 8{,}9 \times 10^{-9}$ C/m^2; $D_r(r = 5) = 6{,}4 \times 10^{-10}$C/m^2
(*b*) $\rho_{s0} = -(4/9) \times 10^{-9}$ C/m^2

3.15 (*a*) $[(8\pi L)/3][\rho_1^3 - 10^{-9}]$ μC onde ρ_1 está em metros (*b*) $4(\rho_1^3 - 10^{-9})/(3\rho_1)\mu$C/m^2 onde ρ_1 está em metros (*c*) D_ρ(0,8 mm) = 0; D_ρ(1,6 mm) = $3{,}6 \times 10^{-6}$ μC/m^2; D_ρ (2,4 mm) = $3{,}9 \times 10^{-6}$ μC/m^2

3.17 (*a*) 0,1028 C (*b*) 12,83 (*c*) 0,1026 C

3.19 113 nC

3.21 (*a*) 8,96 (*b*) 71,67 (*c*) -2

3.23 (*b*) $\rho_{v0} = 3Q/(4\pi a^3)$ $(0 < r < a)$; $D_r = Qr/4\pi a^3)$ e $\nabla \cdot \mathrm{D} = 3Q/(4\pi a^3)$ $(0 < r < a)$; $D_r = Q/(4\pi r^2)$ e $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ $(r > a)$

3.25 (*a*) 17,50 C/m^3 (*b*) 5$\mathbf{a}_r$ C/m^2 (*c*) 320π C
(*d*) 320π C

3.27 (*a*) 1,20 mC/m^3 (*b*) 0 (*c*) -32μC/m^2

3.29 (*a*) 3,47 C (*b*) 3,47 C

3.31 $-3{,}91$ C

Capítulo 4

4.1 (*a*) -12 nJ (*b*) 24 nJ (*c*) -36 nJ (*d*) $-44{,}9$ nJ
(*e*) $-41{,}8$ nJ

4.3 (*a*) 3,1 μJ (*b*) 3,1 μJ

4.5 (*a*) 2 (*b*) -2

4.7 (*a*) 90 (*b*) 82

4.9 (*a*) 8,14 V (*b*) 1,36 V

4.11 1,98 kV

4.13 576 pJ

4.15 $-68{,}4$ V

4.17 (*a*) $-3{,}026$ V (*b*) $-9{,}678$ V

4.19 0,081 V

4.21 (*a*) $-15{,}0$ V (*b*) 15,0 V
(*c*) $7{,}1\mathbf{a}_x + 22{,}8\mathbf{a}_y - 71{,}1\mathbf{a}_z$ V/m (*d*) 75,0 V/m (*e*) $-0{,}095\mathbf{a}_x - 0{,}304\mathbf{a}_y + 0.948\mathbf{a}_z$
(*f*) $62{,}8\mathbf{a}_x + 202\mathbf{a}_y - 629\mathbf{a}_z$ pC/m^2

4.23 (*a*) $-48\rho^{-4}$ V/m (*b*) -673 pC/m^3
(*c*) $-1{,}96$ nC

4.25 (*a*) $V_p = 279{,}9$ V, $\mathbf{E}_p = -179{,}9\mathbf{a}_\rho - 75{,}0\mathbf{a}_\phi$ V/m, $\mathbf{D}_p = -1{,}59\mathbf{a}_\rho - 0{,}664\mathbf{a}_\phi$ nC/m^2, $\rho_{vp} = -443$ pC/m^3 (*b*) $-5{,}56$ nC

4.27 (*a*) 5,78 V (*b*) 25,2 V/m (*c*) 5,76 V

4.29 1,31 V

4.31 (*a*) 387 pJ (*b*) 207 pJ

4.33 (*a*) $(5 \times 10^{-6})/(4\pi r^2)\mathbf{a}_r$ C/m^2
(*b*) 2,81 J (c) 4,45 pF

4.35 (*a*) 0,779 μJ (*b*) 1,59 μJ

Capítulo 5

5.1 (*a*) $-1{,}23$ MA (*b*) 0 (*c*) 0, conforme esperado

5.3 (*a*) 77,4 A (*b*) 53,0$\mathbf{a}_r$ A/m^2

5.5 (*a*) $-178{,}0$A (*b*) 0 (*c*) 0

5.7 (*a*) Densidade de fluxo de massa em (kg/m^2 – s) e densidade de massa em (kg/m^3)
(*b*) –550 g/m^3 – s

5.9 (*a*) 0,28 mm (*b*) $6{,}0 \times 10^7$ A/m^2

5.11 (*a*) $\mathbf{E} = [(9{,}55)/\rho l)]\mathbf{a}_\rho$ V/m, $V = (4{,}88)/l$ V e $R = (1{,}63)/l\ \Omega$, onde l é o comprimento do cilindro (não dado) (*b*) 14,64/ l W

5.13 (*a*) 0,147 V (*b*) 0,144 V

5.15 (*a*) $(\rho + 1)z^2 \cos\phi = 2$
(*b*) $\rho = 0{,}10$, $\mathbf{E}(0{,}10, 0{,}2\pi, 1{,}5) = -18{,}2\mathbf{a}_\rho + 145\mathbf{a}_\phi - 26{,}7\mathbf{a}_z$ V/m (*c*) 1,32 nC/m^2

5.17 (*a*) $\mathbf{D}(z = 0) = -(100\epsilon_0 x)/(x^2 + 4)\mathbf{a}_z$ C/m^2
(*c*) $-0{,}92$ nC

5.19 (*a*) Em 0 V: $2x^2y - z = 0$. Em 60 V: $2x^2y - z = 6/z$ (*b*) 1,04 nC/m^2
(*c*) $-[0{,}60\mathbf{a}_x + 0{,}68\mathbf{a}_y + 0{,}43\mathbf{a}_z]$

5.21 (*a*) 1,20 kV (*b*) $\mathbf{E}_p = 723\mathbf{a}_x - 18{,}9\mathbf{a}_y$ V/m

5.23 (*a*) 289,5 V (*b*) $z/[(x - 1)^2 + y^2 + z^2]^{1{,}5} - z/[(x + 1)^2 + y^2 + z^2]^{1{,}5} = 0{,}222$

5.25 (*a*) $4{,}7 \times 10^{-5}$ S/m (*b*) $1{,}1 \times 10^{-3}$ S/m
(*c*) $1{,}2 \times 10^{-2}$ S/m

5.27 (*a*) 6,26 pC/m^2 (*b*) 1,000176

5.29 (*a*) $\mathbf{E} = [(144{,}9)/\rho]\mathbf{a}_\rho$ V/m, $\mathbf{D} = (3{,}28\mathbf{a}_\rho)/\rho$ nC/m^2 (*b*) $V_{ab} = 192$ V, $\chi_e = 1{,}56$ (*c*) $[(5{,}0 \times 10^{-29})/\rho]\mathbf{a}_\rho$ C · m

5.31 (*a*) 80 V/m (*b*) $-60\mathbf{a}_y - 30\mathbf{a}_z$ V/m (*c*) 67,1 V/m (*d*) 104,4 V/m (*e*) 40,0° (*f*) 2,12 nC/m^2 (*g*) 2,97 nC/m^2 (*h*) $2{,}12\mathbf{a}_x - 2{,}66\mathbf{a}_y - 1{,}33\mathbf{a}_z$ nC/m^2 (*i*) $1{,}70\mathbf{a}_x - 2{,}13\mathbf{a}_y - 1{,}06\mathbf{a}_z$ nC/m^2 (*j*) 54,5°

5.33 $125\mathbf{a}_x + 175\mathbf{a}_y$ V/m

5.35 (*a*) $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1$
(*b*) $W_{E1} = 45{,}1$ μJ, $W_{E2} = 338$ μJ

Capítulo 6

6.1 $b/a = \exp(2\pi\, d/W)$

6.3 Titanato de bário

6.5 451 pF

6.7 (*a*) 3,05 nF (*b*) 5,21 nF (*c*) 6,32 nF (*d*) 9,83 nF

6.9 (*a*) 143 pF (*b*) 101 pF

6.11 (*a*) 53,3 pF (*b*) 41,7 pF

6.13 $K_1 = 23{,}0$, $\rho_L = 8{,}87$ nC/m, $a = 13{,}8$ m, $C = 35{,}5$ pF

6.15 (*a*) 47,3 nC/m^2 (*b*) $-15{,}8$ nC/m^2 (*c*) 24,3 pF/m

6.17 Valor exato: 57 pF/m

6.19 Valor exato: $11\epsilon_0$ F/m

6.21 (*b*) C ≈ 110 pF/m (*c*) O resultado não mudaria

6.23 (*a*) 3,64 nC/m (*b*) 206 mA

6.25 (*a*) -8 V (*b*) $8\mathbf{a}_x - 8\mathbf{a}_y - 24\mathbf{a}_z$ V/m (*c*) $-4xz(z^2 + 3y^2)$ C/m^3 (*d*) $xy^2z^3 = -4$ (*e*) $y^2 - 2x^2 = 2$ e $3x^2 - z^2 = 2$ (*f*) Não

6.27 $f(x, y) = -4e^{2x} + 3x^2$, $V(x, y) = 3(x^2 - y^2)$

6.29 (*b*) $A = 112{,}5$, $B = -12{,}5$ ou $A = -12{,}5$, $B = 112{,}5$

6.31 (*a*) -106 pC/m^3 (*b*) $\pm 0{,}399$ pC/m^2 (dependendo de qual lado da superfície é considerado).

6.33 (*a*) Sim, sim, sim, não (*b*) Na superfície de 100 V, não para todas. Nas superfícies de 0 V, sim, exceto para $V_1 + 3$. (*c*) Somente V_2 é

6.35 (*a*) 33.33 V (*b*) $[(100)/3]\mathbf{a}_z + 50\mathbf{a}_y$ V/m

6.37 (*a*) 1,01 cm (*b*) 22,8 kV/m (*c*) 3,15

6.39 (*a*) $(-2{,}00 \times 10^4)\phi + 3{,}78 \times 10^3$ V
(*b*) $[(2{,}00 \times 10^4)/\rho]\mathbf{a}_\phi$ V/m
(*c*) $(2{,}00 \times 10^4\epsilon_0/\rho)\mathbf{a}_\phi$ C/m^2
(*d*) $[(2{,}00 \times 10^4)/\rho]$ C/m^2
(*e*) 84,7 nC
(*f*) $V(\phi) = 28{,}7\phi + 194{,}9$ V, $\mathbf{E} = -(28{,}7)/\rho\mathbf{a}_\phi$ V/m, $\mathbf{D} = -(28{,}7\epsilon_0)/\rho\mathbf{a}_\phi$ C/m^2, $\rho_s = (28{,}7\epsilon_0)/\rho$ C/m^2, $Q_b = 122$pC (*g*) 471pF

6.41 (*a*) 12,5 mm (*b*) 26,7 kV/m (*c*) 4,23 (com $\rho_s = 1{,}0$ μC/m^2 dado)

6.43 (*a*) $\alpha_A = 26{,}57°$, $\alpha_B = 56{,}31°$ (*b*) 23,3 V

6.45 (*a*) $833{,}3r^{-0{,}4}$ V (*b*) $833{,}3r^{-0{,}4}$ V

Capítulo 7

7.1 (*a*) $-294\mathbf{a}_x + 196\mathbf{a}_y$ μA/m
(*b*) $-127\mathbf{a}_x + 382\mathbf{a}_y$ μA/m
(*c*) $-421\mathbf{a}_x + 578\mathbf{a}_y$ μA/m

7.3 (*a*)

$$H = \frac{I}{2\pi\rho}\left[1 - \frac{a}{\sqrt{\rho^2 + a^2}}\right]\mathbf{a}_\phi \text{ A/m}$$

(*b*) $1/\sqrt{3}$

7.5

$$|\mathbf{H}| = \frac{I}{2\pi}\left[\left(\frac{2}{y^2 + 2y + 5} - \frac{2}{y^2 - 2y + 5}\right)^2 + \left(\frac{(y-1)}{y^2 - 2y + 5} - \frac{(y+1)}{y^2 + 2y + 5}\right)^2\right]^{1/2}$$

7.7 (*a*) $\mathbf{H} = I/(2\pi^2 z)(\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y)$A/m (*b*) 0

7.9 $-1{,}50\mathbf{a}_y$ A/m

7.11 2,0 A/m, 933 mA/m, 360 mA/m, 0

7.13 (*e*) $H_z(a < \rho < b) = k_b$; $H_z(\rho > b) = 0$

7.15 (*a*) $45e^{-150\rho}\mathbf{a}_z$ kA/m^2
(*b*) $12{,}6[1 - (1 + 150\rho_0)e^{-150\rho_0}]$ A (*c*) $\frac{2{,}00}{\rho}[1 - (1 + 150\rho)e^{-150\rho}]$ A/m

7.17 (*a*) $2{,}2 \times 10^{-1}\mathbf{a}_\phi$ A/m (justamente no interior), $2{,}3 \times 10^{-2}\,\mathbf{a}_\phi$ A/m (justamente no exterior)
(*b*) $3{,}4 \times 10^{-1}\mathbf{a}_\phi$ A/m
(*c*) $1{,}3 \times 10^{-1}\mathbf{a}_\phi$ A/m (*d*) $-1{,}3 \times 10^{-1}\mathbf{a}_z$ A/m

7.19 (*a*) $\mathbf{K} = -I\mathbf{a}_r/2\pi r$ A/m ($\theta = \pi/2$)
(b) $\mathbf{J} = I\mathbf{a}_r/[2\pi r^2(1 - 1/\sqrt{2})]$A/m^2 ($\theta < \pi/4$)
(*c*) $\mathbf{H} = I\mathbf{a}_\phi/[2\pi r \text{ sen } \theta]$ A/m ($\pi/4 < \theta < \pi/2$)
(*d*) $\mathbf{H} = I(1 - \cos\theta)\mathbf{a}_\phi/[2\pi r \text{ sen } \theta(1 - 1/\sqrt{2})]$ A/m ($\theta < \pi/4$)

7.21 (*a*) $\mathbf{I} = 2\pi ba^3/3$ A (*b*) $\mathbf{H}_{\text{entrada}} = b\rho^2/3\mathbf{a}_\phi$ A/m (*c*) $\mathbf{H}_{\text{saída}} = ba^3/3\rho\, \mathbf{a}_\phi$ A/m

7.23 (*a*) $60\rho\mathbf{a}_z$ A/m^2 (*b*) 40π A (*c*) 40π A

7.25 (*a*) -259 A (*b*) -259 A

7.27 (*a*) $2(x+2y)/z^3\mathbf{a}_x + 1/z^2\mathbf{a}_z$ A/m (*b*) O mesmo da parte (*a*) (*c*) 1/8 A

7.29 (*a*) $1{,}59 \times 10^7\mathbf{a}_z$ A/m^2 (*b*) $7{,}96 \times 10^6\rho\mathbf{a}_\phi$ A/m, $10\rho\mathbf{a}_\phi$ Wb/m^2 (*c*) como esperado (*d*) $1/(\pi\rho)\mathbf{a}_\phi$ A/m, $\mu_0/(\pi\rho)\mathbf{a}_\phi$ Wb/m^2 (*e*) Como esperado

7.31 (*a*) 0,392 μWb (*b*) 1,49 μWb (*c*) 27 μWb

7.35 (*a*)-40ϕA $(2 < \rho < 4)$, 0 $(\rho > 4)$ (*b*) $40\mu_0 \ln(3/\rho)\mathbf{a}_z$ Wb/m

7.37 $[120-(400/\pi)\phi]$A $(0 < \phi < 2\pi)$

7.39 (*a*) $-30\mathbf{a}_y$ A/m (*b*) $30y - 6$ A (*c*) $-30\mu_0\mathbf{a}_y$ Wb/m^2 (*d*) $\mu_0(30x-3)\mathbf{a}_z$ Wb/m

7.41 (*a*) $-100\rho/\mu_0\mathbf{a}_\phi$ A/m, $-100\rho\mathbf{a}_\phi$ Wb/m^2 (*b*) $-\frac{200}{\mu_0}\mathbf{a}_z$ A/m^2 (*c*) -500 MA (*d*) -500 MA

7.43

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{96\pi}\left[\left(\frac{\rho^2}{a^2} - 25\right) + 98 \ln\left(\frac{5a}{\rho}\right)\right] \text{Wb/m}$$

Capítulo 8

8.1 (*a*) (0,90, 0, −0,135) (*b*) $3 \times 10^5\mathbf{a}_x - 9 \times 10^4\mathbf{a}_z$ m/s (*c*) $1{,}5 \times 10^{-5}$ J

8.3 (*a*) $0{,}70\mathbf{a}_x + 0{,}70\mathbf{a}_y - 0{,}12\mathbf{a}_z$ (*b*) 7,25 fJ

8.5 (*a*) $-18\mathbf{a}_x$ nN (*b*) $19{,}8\mathbf{a}_z$ nN (*c*) $36\mathbf{a}_x$ nN

8.7 (*a*) $-35{,}2\mathbf{a}_y$ nN/m (*b*) 0 (*c*) 0

8.9 $4\pi \times 10^{-5}$ N/m

8.13 (*a*) $-1{,}8 \times 10^{-4}\mathbf{a}_y$ N · m (*b*) $-1{,}8 \times 10^{-4}\mathbf{a}_y$ N · m (*c*) $-1{,}5 \times 10^{-5}\mathbf{a}_y$ N · m

8.15 $(6 \times 10^{-6})[b - 2\,\text{tg}^{-1}(b/2)]\mathbf{a}_y$ N · m

8.17 $\Delta w/w = \Delta m/m = 1{,}3 \times 10^{-6}$

8.19 (*a*) $77{,}6y\mathbf{a}_z$ kA/m^2 (*b*) $5{,}15 \times 10^{-6}$ H/m (*c*) 4,1 (*d*) $241y\mathbf{a}_z$ kA/m (*e*) $77{,}6\mathbf{a}_x$ kA/m^2 (*f*) $241\mathbf{a}_x$ kA/m^2 (*g*) $318\mathbf{a}_x$ kA/m^2

8.21 (Use $\chi_m = 0{,}003$) (*a*) 47,7 A/m (*b*) 6,0 A/m (*c*) 0,288 A/m

8.23 (*a*) 637 A/m, $1{,}91 \times 10^{-3}$ Wb/m^2, 884 A/m (*b*) 478 A/m, $2{,}39 \times 10^{-3}$ Wb/m^2, $1{,}42 \times 10^3$ A/m (*c*) 382 A/m, $3{,}82 \times 10^{-3}$ Wb/m^2, $2{,}66 \times 10^3$ A/m

8.25 (*a*)$1{,}91/\rho$A/m $(0 < \rho < \infty)$ (*b*) $(2{,}4 \times 10^{-6}/\rho)\mathbf{a}_\phi$ T $(\rho < 0{,}01)$, $(1{,}4 \times 10^{-5}/\rho)\mathbf{a}_\phi$ T $(0{,}01 < \rho < 0{,}02)$, $(2{,}4 \times 10^{-6}/\rho)\mathbf{a}_\phi$ T $(\rho > 0{,}02)$ (ρ em metros)

8.27 (*a*) $-4{,}83\mathbf{a}_x - 7{,}24\mathbf{a}_y + 9{,}66\mathbf{a}_z$ A/m (*b*) $54{,}83\mathbf{a}_x - 22{,}76\mathbf{a}_y + 10{,}34\mathbf{a}_z$ A/m (*c*) $54{,}83\mathbf{a}_x - 22{,}76\mathbf{a}_y + 10{,}34\mathbf{a}_z$ A/m (*d*) $-1{,}93\mathbf{a}_x - 2{,}90\mathbf{a}_y + 3{,}86\mathbf{a}_z$ A/m (*e*) 102° (*f*) 95°

8.29 10,5 mA

8.31 (*a*) $2{,}8 \times 10^{-4}$ Wb (*b*) $2{,}1 \times 10^{-4}$ Wb (*c*) $\approx 2{,}5 \times 10^{-4}$ Wb

8.33 (*a*) $23{,}9/\rho$ A/m (*b*) $3{,}0 \times 10^{-4}/\rho$ Wb/m^2 (*c*) $5{,}0 \times 10^{-7}$ Wb (*d*) $23{,}9/\rho$ A/m, $6{,}0 \times 10^{-4}/\rho$ Wb/m^2, $1{,}0 \times 10^{-6}$ Wb (*e*) $1{,}5 \times 10^{-6}$ Wb

8.35 (*a*) $20/(\pi r \operatorname{sen}\theta)\mathbf{a}_\phi$ A/m (*b*) $1{,}35 \times 10^{-4}$ J

8.37 0,17 μH

8.39 (*a*) $(1/2)wd\mu_0K_0^2$ J/m (*b*) $\mu_0 d/w$ H/m (*c*) $\Phi = \mu_0 dK_0$ *Wb*

8.41 (*a*) 33 μH (*b*) 24 μH

8.43 (*b*)

$$L_{\text{interno}} = \frac{2W_H}{I^2} = \frac{\mu_0}{8\pi}\left[\frac{d^4 - 4a^2c^2 + 3c^4 + 4c^4 \ln(a/c)}{(a^2-c^2)^2}\right] \text{H/m}$$

Capítulo 9

9.1 (*a*) $-5{,}33 \operatorname{sen} 120\pi t$ V (*b*) $21{,}3 \operatorname{sen}(120\pi t)$ mA

9.3 (*a*) $-1{,}13 \times 10^5[\cos(3 \times 10^8 t - 1) - \cos(3 \times 10^8 t)]$ V (*b*) 0

9.5 (*a*) $-4{,}32$ V (*b*) $-0{,}293$ V

9.7 (*a*) $(-1{,}44)/(9{,}1 + 39{,}6t)$ A (*b*) $-1{,}44\left[\frac{1}{61{,}9 - 39{,}6t} + \frac{1}{9{,}1 + 39{,}6t}\right]$ A

9.9 $\mathbf{P} = 2{,}9 \times 10^3[\cos(1{,}5 \times 10^8 t - 0{,}13) - \cos(1{,}5 \times 10^8 t)]^2$

9.11 (*a*) $\left(\frac{10}{\rho}\right)\cos(10^5 t)\mathbf{a}_\rho$ A/m (*b*) $8\pi \cos(10^5 t)$ A (*c*) $-0{,}8\pi \operatorname{sen}(10^5 t)$ A (*d*) 0,1

9.13 (*a*) $\mathbf{D} = 1{,}33 \times 10^{-13} \operatorname{sen}(1{,}5 \times 10^8 t - bx)\text{ay}$ C/m^2, $\mathbf{E} = 3{,}0 \times 10^{-3} \operatorname{sen}(1{,}5 \times 10^8 t - bx)\mathbf{a}_y$ V/m

(*b*) $\mathbf{B} = (2{,}0)b \times 10^{-11}$ sen $(1{,}5 \times 10^8 t - bx)\mathbf{a}_z$ T, $\mathbf{H} = (4{,}0 \times 10^{-6})b$ sen $(1{,}5 \times 10^8 t - bx)\mathbf{a}_z$ A/m
(*c*) $4{,}0 \times 10^{-6} b^2 \cos(1{,}5 \times 10^8 t - bx)\mathbf{a}_y$ A/m^2
(*d*) $\sqrt{5{,}0}$ m^{-1}

9.15 $\mathbf{B} = 6\times 10^{-5}\cos(10^{10}t - \beta x)\mathbf{a}_z$ T,
$\mathbf{D} = -(2\beta \times 10^{-10})\cos(10^{10}t - \beta x)\mathbf{a}_y$ C/m^2,
$\mathbf{E} = -1{,}67\beta\cos(10^{10}t - \beta x)\mathbf{a}_y$ V/m,
$\beta = \pm 600$ rad/m

9.17 $a = 66$ m^{-1}

9.21 (*a*) $\pi \times 10^9$sec^{-1}
(*b*) $\frac{500}{\rho}$ sen $(10\pi z)$ sen $(\omega t)\mathbf{a}_\rho$ V/m

9.23 (*a*) $\mathbf{E}_{N1} = 10\cos(10^9 t)\mathbf{a}_z$V/m
$\mathbf{E}_{t1} = (30\mathbf{a}_x + 20\mathbf{a}_y)\cos(10^9 t)$ V/m
$\mathbf{D}_{N1} = 200\cos(10^9 t)\mathbf{a}_z$ pC/m^2
$\mathbf{D}_{t1} = (600\mathbf{a}_x + 400\mathbf{a}_y)\cos(10^9 t)$ pC/m^2
(*b*) $\mathbf{J}_{N1} = 40\cos(10^9 t)\mathbf{a}_z$ mA/m^2
$\mathbf{J}_{t1} = (120\mathbf{a}_x + 80\mathbf{a}_y)\cos(10^9 t)$ mA/m^2
(*c*) $\mathbf{E}_{t2} = (30\mathbf{a}_x + 20\mathbf{a}_y)\cos(10^9 t)$V/m
$\mathbf{D}_{t2} = (300\mathbf{a}_x + 200\mathbf{a}_y)\cos(10^9 t)$pC/m^2
$\mathbf{J}_{t2} = (30\mathbf{a}_x + 20\mathbf{a}_y)\cos(10^9 t)$ mA/m^2
(*d*) $\mathbf{E}_{N2} = 20{,}3\cos(10^9 t + 5{,}6°)az$ V/m
$\mathbf{D}_{N2} = 203\cos(10^9 t + 5{,}6°)\mathbf{a}_z$ pC/m^2
$\mathbf{J}_{N2} = 20{,}3\cos(10^9 t + 5{,}6°)\mathbf{a}_z$ mA/m^2

9.25 (*b*) $\mathbf{B} = \left(t - \frac{z}{c}\right)\mathbf{a}_y$ T $\quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\left(t - \frac{z}{c}\right)\mathbf{a}_y$ A/m
$\mathbf{E} = (ct - z)\mathbf{a}_x$ V/m $\quad \mathbf{D} = \epsilon_0(ct - z)\mathbf{a}_x$C/m^2

Capítulo 10

10.1 $\gamma = 0{,}094 + j2{,}25$
$\alpha = 0{,}094$Np/m
$\beta = 2{,}25$ rad/m
$\lambda = 2{,}8$ m
$Z_0 = 93{,}6 - j3{,}64\ \Omega$

10.3 (*a*) 96 pF/m (*b*) $1{,}44 \times 10^8$ m/s
(*c*) 3,5 rad/m (*d*) $\Gamma = -0{,}09$, $s = 1{,}2$

10.5 (*a*) 83,3 nH/m, 33,3 pF/m (*b*) 65 cm

10.7 7,9 mW

10.9 (*a*) $\lambda/8$ (*b*) $\lambda/8 + m\lambda/2$

10.11 (*a*) V_2^0/R_L (*b*) $R_L\, V_2^0/(R\ell + R_L)^2$ (*c*) V_2^0/R_L
(*d*) $(V_2^0/R_L)\exp(-2\ell\sqrt{RG})$

10.13 (*a*) $6{,}28 \times 10^8$ rad/s (*b*) $4\cos(\omega t - \pi z)$A
(*c*) $0{,}287\angle 1{,}28$rad
(*d*) $57{,}5\exp[j(\pi z + 1{,}28)]V$
(*e*) $257{,}5\angle 36°$ V

10.15 (*a*)104 V (*b*) $52{,}6 - j123$ V

10.17 $P_{25} = 2{,}28$ W, $P_{100} = 1{,}16$ W

10.19 16,5 W

10.21 (*a*) $s = 2{,}62$ (*b*) $Z_L = 1{,}04 \times 10^3 + j69{,}8\ \Omega$
(*c*) $z_{max} = -7{,}2$ mm

10.23 (*a*) $0{,}037\lambda$ ou 0,74 m (*b*) 2,61 (*c*) 2,61
(*d*) $0{,}463\lambda$ ou 9,26 m

10.25 (*a*) $495 + j290\ \Omega$ (*b*) $j98\ \Omega$

10.27 (*a*) 2,6 (*b*) $11 - j7{,}0$ mS (*c*) $0{,}213\lambda$

10.29 $47{,}8 + j49{,}3\ \Omega$

10.31 (*a*) 3,8 cm (*b*) 14,2 cm

10.33 (*a*) $d_1 = 7{,}6$ cm, $d = 17{,}3$ cm (*b*) $d_1 = 1{,}8$ cm, $d = 6{,}9$ cm

10.35 (*a*) 39,6 cm (*b*) 24 pF

10.37 $V_L = (1/3)V_0$ $(l/v < t < \infty)$ e é zero para $t < l/v$. $I_B = (V_0/100)$ A para $0 < t < 2l/v$ e é $(V_0/75)$ para $t > 2l/v$

10.39

$$\frac{l}{v} < t < \frac{5l}{4v}: \quad V_1 = 0{,}44\ V_0$$
$$\frac{3l}{v} < t < \frac{13l}{4v}: \quad V_2 = -0{,}15\ V_0$$
$$\frac{5l}{v} < t < \frac{21l}{4v}: \quad V_3 = 0{,}049\ V_0$$
$$\frac{7l}{v} < t < \frac{29l}{4v}: \quad V_4 = -0{,}017\ V_0$$

As tensões entre esses valores são nulas

10.41

$$0 < t < \frac{l}{2v}: \quad V_L = 0$$
$$\frac{l}{2v} < t < \frac{3l}{2v}: \quad V_L = \frac{V_0}{2}$$
$$t > \frac{3l}{2v}: \quad V_L = V_0$$

10.43

$$0 < t < 2l/v: \quad V_{R_L} = V_0/2$$
$$t > 2l/v: \quad V_{R_L} = 3V_0/4$$
$$0 < t < l/v: \quad V_{R_g} = 0,\ I_B = 0$$
$$t > l/v: \quad V_{R_g} = V_0/4,\ I_B = 3V_0/4Z_0$$

Capítulo 11

11.3 (*a*) 0,33 rad/m (*b*) 18,9 m
(*c*) $-3{,}76 \times 10^3\mathbf{a}_z$ V/m

11.5 (*a*) $\omega = 3\pi \times 10^8$sec^{-1}, $\lambda = 2$ m, e $\beta = \pi$ rad/m (*b*) $-8{,}5\mathbf{a}_x - 9{,}9\mathbf{a}_y$ A/m
(*c*) 9,08 kV/m

11.7 $\beta = 25\ \text{m}^{-1}$, $\eta = 278{,}5\ \Omega$, $\lambda = 25$ cm, $v_p = 1{,}01 \times 10^8$ m/s, $\epsilon_R = 4{,}01$, $\mu R = 2{,}19$, e $\mathbf{H}(x, y, z, t) = 2\cos(8\pi \times 10^8 t - 25x)\mathbf{a}_y + 5\ \text{sen}\,(8\pi \times 10^8 t - 25x)\mathbf{a}_z$ A/m

11.9 (*a*) $\beta = 0{,}4\pi$ rad/m, $\lambda = 5$ m, $vp = 5 \times 10^7$m/s, e $\eta = 251\ \Omega$ (*b*) $-403\cos(2\pi \times 10^7 t)$ V/m (*c*) $1{,}61\cos(2\pi \times 10^{-7} t)$A/m

11.11 (*a*) 0,74 kV/m (*b*) −3,0 A/m

11.13 $\mu = 2{,}28 \times 10^{-6}$ H/m, $\epsilon' = 1{,}07 \times 10^{-11}$ F/m, e $\epsilon'' = 2{,}90 \times 10^{-12}$ F/m

11.15 (*a*) $\lambda = 3$ cm, $\alpha = 0$ (*b*) $\lambda = 2{,}95$ cm, $\alpha = 9{,}24 \times 10^{-2}$ Np/m (*c*) $\lambda = 1{,}33$ cm, $\alpha = 335$ Np/m

11.17 $\langle S_z\rangle(z = 0) = 315\mathbf{a}_z$ W/m², $\langle S_z\rangle(_z = 0{,}6) = 248\mathbf{a}_z$ W/m²

11.19 (*a*) $\omega = 4 \times 10^8$ rad/s (*b*) $\mathbf{H}(\rho, z, t) = (4{,}0/\rho)\cos(4 \times 10^8 t - 4z)\mathbf{a}_\phi$ A/m (*c*) $\langle S\rangle = (2{,}0 \times 10^{-3}/\rho^2)\cos^2(4 \times 10^8 t - 4z)\mathbf{a}_z$ W/m² (*d*) $P = 5{,}7$ kW

11.21 (*a*) $H_{\phi 1}(\rho) = (54{,}5/\rho)(10^4\rho^2 - 1)$ A/m $(0{,}01 < \rho < 0{,}012)$, $H_{\phi 2}(\rho) = (24/\rho)$ A/m $(\rho > 0{,}012)$, $H_\phi = 0$ $(\rho < 0{,}01\text{m})$ (*b*) $\mathbf{E} = 1{,}09\mathbf{a}_z$ V/m (*c*) $\langle S\rangle = -(59{,}4/\rho)(10^4\rho^2 - 1)\mathbf{a}_\rho$ W/m² $(0{,}01 < \rho < 0{,}012\ \text{m})$, $-(26/\rho)\mathbf{a}_\rho$ W/m² $(\rho > 0{,}12\ \text{m})$

11.23 (*a*) $1{,}4 \times 10^{-3}\ \Omega$/m (*b*) $4{,}1 \times 10^{-2}\ \Omega$/m (*c*) $4{,}1 \times 10^{-1}\ \Omega$/m

11.25 $f = 1$ GHz, $\sigma = 1{,}1 \times 10^5$ S/m

11.27 (*a*) $4{,}7 \times 10^{-8}$ (*b*) $3{,}2 \times 10^3$ (*c*) $3{,}2 \times 10^3$

11.29 (*a*) $\mathbf{H}_s = (E_0/\eta_0)(\mathbf{a}_y - j\mathbf{a}_x)e^{-j\beta z}$ (*b*) $\langle S\rangle = (E_2^0/\eta_0)\mathbf{a}_z$ W/m² (considerando E_0 real)

11.31 (*a*) $L = 14{,}6\ \lambda$ (*b*) Esquerda

11.33 (*a*) $\mathbf{H}_s = (1/\eta)[-18e^{j\phi}\mathbf{a}_x + 15\mathbf{a}_y]e^{-j\beta z}$ A/m (*b*) $\langle S\rangle = 275\ \text{Re}\{(1/\eta^*)\}$ W/m²

Capítulo 12

12.1 0,01%

12.3 0,056 e 17,9

12.5 (*a*) $4{,}7 \times 10^8$ Hz (*b*) $691 + j177\ \Omega$ (*c*) −1,7 cm

12.7 (*a*) $s_1 = 1{,}96$, $s_2 = 2$, $s_3 = 1$ (*b*) −0,81m

12.9 (*a*) $6{,}25 \times 10^{-2}$ (*b*) 0,938 (*c*) 1,67

12.11 $641 + j501\ \Omega$

12.13 Onda refletida: polarização circular esquerda; fração de potência = 0,09. Onda transmitida: polarização circular direita; fração de potência = 0,91.

12.15 (*a*) 2,55 (*b*) 2,14 (*c*) 0,845

12.17 2,41

12.19 (*a*) $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ ou $d_1 = d_3 = 0$, $d_2 = \lambda/2$ (*b*) $d_1 = d_2 = d_3 = \lambda/4$

12.21 (*a*) Potência refletida: 15%. Potência transmitida: 85% (*b*) Onda refletida: polarização *s*. Onda transmitida: polarizada elipticamente à direita.

12.23 $n_0 = (n_1/n_2)\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$

12.25 0,76(−1,19 dB)

12.27 2

12.29 4,3 km

Capítulo 13

13.1 (*a*) 1,14 mm (*b*) 1,14 mm (*c*) 1,47 mm

13.3 14,2 pF/m, 0,786 μH/m, 0, 0,023 Ω/m

13.5 (*a*) 1,23 (*b*) 1,99 (*c*) 1,33

13.7 (*a*) 2,8 (*b*) $5{,}85 \times 10^{-2}$

13.9 (*a*) 4,9 (*b*) 1,33

13.11 9

13.13 9

13.15 1,5 ns

13.17 (*a*) 12,8 GHz (*b*) Sim

13.19 (*a*) 2,5 GHz $< f <$ 3,75 GHz (preenchido com ar) (*b*) 3.75 GHs $< f <$ 4,5 GHz (preenchido com ar)

13.21 $a = 1{,}1$ cm, $b = 0{,}90$cm

13.25 72 cm

13.27 3,304

13.29 (*a*) $\theta_{\min} = \text{sen}^{-1}(n_3/n_1)$ (*b*) $v_{p,\max} = c/n_3$

13.31 maior que

Capítulo 14

14.1 (*a*) $-0{,}284\mathbf{a}_x - 0{,}959\mathbf{a}_z$ (*b*) 0,258

14.3 (*a*) $-j(1{,}5 \times 10^{-2})e^{-j1.000}\mathbf{a}_z$ V/m (*b*) $-j(1{,}5 \times 10^{-2})e^{-j1.000}\mathbf{a}_y$ V/m (*c*) $-j(1{,}5 \times 10^{-2})(\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z)$ V/m (*d*) $-(1{,}24 \times 10^{-2})(\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z)$ V/m (*e*) $1{,}75 \times 10^{-2}$ V/m

14.7 (*a*) 0,711 Ω (*b*) 0,178 Ω (*c*) 0,400 Ω

14.9 (*a*) 85,4 A (*b*) 5,03 A

14.11 (*a*) 85,4 A (*b*) 7,1A

14.13 (*a*) $0{,}2e^{-j1.000\pi}$ V/m (*b*) $0{,}2e^{-j1.000\pi}\,e^{j0{,}5\pi}$ V/m (*c*) 0

14.15 Máximo primário: $\theta = \pm 90°$, intensidade relativa 1,00. Máximo secundário: $\theta = \pm 33{,}8°$ e $\theta = \pm 146{,}2°$, intensidade relativa 0,186. $S_s = 7{,}3$ dB

14.17 (*a*) 36,5 W (*b*) 4,8 μW

14.19 $\xi = 0$, $d = \lambda$

14.21 (*a*) $\pm 48{,}2°$ (*b*) $\pm 60°$

14.23 (*a*) $+\pi/2$ (*b*) 0

14.25 (*a*) $\xi = -\pi/2$ (*b*) 5,6% do máximo (12,6 dB abaixo)

14.29 (*a*) 1,7μW (*b*) 672 nW

ÍNDICE

E

F

G

M

N

O

Q

R

S

T

U

V

W

DIVERGENTE

COORDENADAS CARTESIANAS $\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$

COORDENADAS CILÍNDRICAS $\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial_z}$

COORDENADAS ESFÉRICAS $\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial_r}(r^2 D_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(D_\theta \operatorname{sen} \theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}$

GRADIENTE

COORDENADAS CARTESIANAS $\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z$

COORDENADAS CILÍNDRICAS $\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z$

COORDENADAS ESFÉRICAS $\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi$

ROTACIONAL

COORDENADAS CARTESIANAS

$$\nabla \times \mathbf{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\mathbf{a}_z$$

COORDENADAS CILÍNDRICAS

$$\nabla \times \mathbf{H} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right)\mathbf{a}_\rho + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right)\mathbf{a}_\phi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\right]\mathbf{a}_z$$

COORDENADAS ESFÉRICAS

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\left[\frac{\partial(H_\phi \operatorname{sen}\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi}\right]\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rH_\phi)}{\partial r}\right]\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta}\right]\mathbf{a}_\phi$$

LAPLACIANO

COORDENADAS CARTESIANAS

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

COORDENADAS CILÍNDRICAS

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

COORDENADAS ESFÉRICAS

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$